Corrigé

Exercice 1

1) a) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{a_n}$.

On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et sa somme vaut 1.

b) On a : $u_n=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)}=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{n}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}$.

On a donc : $u_n=\frac{6}{(n+1)(2n+1)+3(n+1)}=\frac{6}{(n+1)\big((2n+1)+3\big)}=\frac{6}{(n+1)\big(2n+4\big)}$.

Conclusion :

$$\boxed{u_n=\frac{3}{(n+1)(n+2)}}$$

c) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$\sum_{k=1}^{n}u_k=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=3\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right)$.

Après simplification ("télescopage"), on trouve : $\sum_{k=1}^{n}u_k=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0$, la série de terme général u_n converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$. Comme $\frac{3}{2}\le 2$, on vérifie bien que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}}$$

2) a) Version itérative :

```
function fact (n : integer) : integer ;
var k, aux : integer ;
begin
    aux : = 1 ;
    for k : = 1 to n do aux : = aux * k ;
    fact : = aux ;
end ;
```

Version récursive :

```
function fact (n : integer) : integer ;
begin
if n = 0 then fact : = 1  else fact : = n*fact(n - 1) ;
end ;
```

```
b) Program Edhec2013 ;
var   n, k, S : integer ;
      u : real ;
function fact (n : integer) : integer ;
begin   if n = 0  then  fact : = 1    else   fact : = n*fact(n−1) ; end ;
Begin
Readln(n) ; S : = 0 ;
For k : = 1 to n do S : = S + fact(k) ;
u : = n / S ;
Writeln(u) ;
End.
```

c) D'après le cours sur la série exponentielle (qui converge), la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.

d) D'autre part : $u_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} k!} \leq \frac{n}{n!}$ (on a minoré la somme par son plus grand terme).

En simplifiant par n non nul, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}}$$

e) La série de terme général $\frac{1}{(n-1)!}$ converge (série exponentielle) donc, grâce au critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge et sa somme vérifie : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$. Après changement d'indice, on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$.

Par ailleurs, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1$ donc $2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2e - 2$.

Comme e est supérieur à 2, on a $e \leq 2e - 2$ et on trouve bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

3) Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ muni de son produit scalaire canonique, défini par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

On l'applique avec $x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n})$ et $y = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{2}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{a_n}})$.

On a alors $\langle x, y\rangle^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i}$.

On peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + 2 + \ldots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)}$$

4) a) On sait que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. L'égalité précédente s'écrit donc :

$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$.

En divisant des deux côtés par $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ qui est strictement positif et par $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ qui est également strictement positif, on obtient :

$\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$. En multipliant par $(2n+1) > 0$ de chaque côté, on trouve :

$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4\, \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

Il suffit alors de remarquer que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ d'où l'on tire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}}$$

b) Sommons l'inégalité précédente pour n allant de 1 à N (avec $N \geq 1$) :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$.

Ceci s'écrit : $\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

En intervertissant les deux sommes du membre de droite, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

On arrange, toujours dans le membre de droite :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

La somme intérieure se simplifie et il reste :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)$$

En développant, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} - \frac{4}{(N+1)^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k}$$

Comme $\frac{4}{(N+1)^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \geq 0$, on peut encore majorer et obtenir :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}}$$

c) Comme la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et est une série à termes positifs, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

En notant S_N la somme partielle d'ordre N de la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$, on obtient alors, grâce à la question 4b) : $S_N \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

La suite (S_N) est alors majorée et, comme elle est croissante (en effet, on a immédiatement $S_{N+1} - S_N = \frac{2N+1}{a_1+a_2+\ldots+a_N} > 0$), on en déduit qu'elle converge, ce qui signifie exactement que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \text{ converge}}$$

De plus, $\frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ donc, par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de terme général $\frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge également.

On a alors : $\sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$ (la dernière inégalité provenant de la question 4b). En passant à la limite dans cette inégalité (les séries convergent), on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

En divisant par 2, on obtient le résultat demandé :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}}$$

Exercice 2

1) Par lecture de la matrice M, on a : Imf = vect((1, 0, 0), (2, 3, 0)). Les vecteurs (1, 0, 0) et (2, 3, 0) ne sont pas proportionnels donc la famille ((1, 0, 0), (2, 3, 0)) est libre et c'est, ainsi, une base de Imf. Ceci prouve que Imf est de dimension 2 donc Imf est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout vecteur y de $\operatorname{Im} f$, on sait, par définition de $\operatorname{Im} f$, que : $f(y) \in \operatorname{Im} f$ (ceci étant vrai même si y n'appartient pas à $\operatorname{Im} f$).
Conclusion :

$$\boxed{\text{Im}f \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f}$$

2) a) Procédons à une recherche classique.

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

$\boxed{L_1 \leftrightarrow L_3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}$

$\boxed{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+5\lambda-4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M (et de f) sont les réels λ qui rendent $M-\lambda I$ non inversible, ce sont donc les solutions de l'une des équations $-\lambda^2+5\lambda-4 = 0$ et $1-\lambda = 0$, ce qui donne deux valeurs propres :

$$\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 4}$$

b) Recherche de Ker($f - Id$).

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de M pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

On résout le système $(M - I)X = 0$, ce qui se réduit à $x + y + z = 0$.

On en déduit que :

$$X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve que : $\mathrm{Ker}(f-Id) = \mathrm{vect}(\,(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\,)$.
La famille $(\,(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\,)$ est libre car constituée de deux vecteurs non proportionnels donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(f-Id)$ est de dimension 2 et c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Soit x un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Par définition de $\mathrm{Ker}(f-Id)$, on a $f(x) = x$. Par conséquent, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f-Id)$ puisque $f(x)$ est égal à x et x appartient à $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f-Id) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f}$$

Dans toute la suite, on désigne par M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3) a) D'après le cours, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a :
$\langle f(x), y\rangle = {}^t(MX)Y$ et $\langle x, f^*(y)\rangle = {}^tX({}^tM\,Y)$
où X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$, M désignant la matrice de f dans cette base et ${}^tM$ celle de f^*. On a alors, par propriété de la transposition :
$\langle f(x), y\rangle = ({}^tX\,{}^tM\,)Y = {}^tX({}^tM\,Y) = \langle x, f^*(y)\rangle$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E\times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle}$$

b) Supposons qu'il existe un autre endomorphisme g de E tel que :

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

Comme $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$, on obtient : $\forall (x,y) \in E\times E, \langle x,\ g(y)\rangle = \langle x,\ f^*(y)\rangle$. Ceci s'écrit encore (par linéarité à droite du produit scalaire) : $\langle x,\ g(y) - f^*(y)\rangle = 0$.
Cette égalité étant vraie pour tout x de E, elle est vraie pour $x = g(y) - f^*(y)$, ce qui donne :

$$\forall y \in E,\ \| g(y) - f^*(y) \|^2 = 0$$

On obtient alors : $\forall y \in E,\ g(y) - f^*(y) = 0$.
On a donc , pour tout y de E, $g(y) = f^*(y)$, ce qui permet de conclure que : $g = f^*$.

$$\boxed{f^* \text{ est le seul endomorphisme de } E \text{ vérifiant : } \forall (x,y) \in E\times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle}$$

4) a) En notant toujours M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, comme λ est valeur propre de M, la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible. La transposée de cette matrice n'est donc pas inversible non plus, ce qui prouve, par linéarité de la transposition, que ${}^tM - \lambda\,{}^tI$ n'est pas inversible et finalement que ${}^tM - \lambda I$ n'est pas inversible (puisque ${}^tI = I$).
Ceci montre que λ est valeur propre de ${}^tM$ donc de f^*.

b) On sait que, pour tout sous-espace F de E, on a : $\dim F = \dim E - \dim F^{\perp}$. Dans le cas présent, comme $\dim \operatorname{vect}(u) = 1$, on a $\dim(\operatorname{vect}(u))^{\perp} = n-1$, ce qui prouve que $(\operatorname{vect}(u))^{\perp}$ est un hyperplan de E.

Considérons un vecteur v élément de $(\operatorname{vect}(u))^{\perp}$ et montrons que $f(v)$ est également élément de $(\operatorname{vect}(u))^{\perp}$, c'est-à-dire que : $\langle f(v), u\rangle = 0$.

$\langle f(v), u\rangle = \langle v, f^*(u)\rangle = \langle v, \lambda u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle$. Comme v appartient à $(\operatorname{vect}(u))^{\perp}$, on en déduit que $\langle v, u\rangle = 0$, ce qui montre que $\langle f(v), u\rangle = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{(\operatorname{vect}(u))^{\perp} \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f}$$

Exercice 3

1) • Les restrictions de la fonction f aux intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont bien définies et positives (car x^2 est strictement positif sur ces intervalles) et la restriction de f à $]-1, 1[$ est positive sur $]-1, 1[$ puisqu'elle y coïncide avec la fonction nulle.

• Les restrictions de la fonction f aux intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont continues comme fonctions rationnelles et la restriction de f à $]-1, 1[$ est continue sur $]-1, 1[$ en tant que fonction constante (nulle). La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en -1 et en 1.

Remarque. En ce qui concerne la continuité, on peut se permettre d'écrire que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$ à condition d'ouvrir les crochets en -1 et en 1 (sinon, ça voudrait dire que f est continue en -1 et en 1, ce qui n'est pas le cas).

• Pour tout réel $A \geq 1$, l'intégrale $\int_1^A \frac{1}{2x^2}dx$ est bien définie (fonction continue) et on a :

$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{2x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_1^A = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{A})$.

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

De plus, la fonction $(x \mapsto \frac{1}{x^2})$ est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2x^2}dx$ converge également et vaut $\frac{1}{2}$: on a donc $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Pour finir, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ puisque f est nulle sur $]-1, 1[$.

Par définition de la convergence d'une intégrale deux fois impropre, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité}}$$

2) Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

• Pour tout x élément de $]-\infty, -1]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}dt$.

$\forall A < x,\ \int_A^x \frac{1}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2A}$. Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, on a :

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty, -1],\ F(x) = -\frac{1}{2x}}$$

• Pour tout x élément de $]-1, 1[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\,dt + \int_{-1}^{x} 0\,dt = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in \,]-1, 1[,\ F(x) = \frac{1}{2}}$$

• Pour tout x élément de $]1, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\,dt + \int_{-1}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{2t^2}\,dt$.

$F(x) = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x}).\ =1 - \frac{1}{2x}$.

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[,\ F(x) = 1 - \frac{1}{2x}}$$

3) Comme $Y_n = \frac{S_n}{n}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(Y_n \leq x) = (S_n \leq nx)$.

De plus, $S_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(S_n \leq nx) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \leq nx)$.

En prenant les probabilités et par indépendance mutuelle des variables X_k, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq nx) = (\,F(nx)\,)^n$$

Il faut maintenant distinguer trois cas : $nx \leq -1$, $-1 < nx < 1$ et $nx \geq 1$. En revenant à x, on a les trois cas : $x \leq \frac{-1}{n}$, $\frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}$ et $x \geq \frac{1}{n}$. On obtient alors :

• $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{n}\right]$, $G_n(x) = (-\frac{1}{2nx})^n$
• $\forall x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, $G_n(x) = (\frac{1}{2})^n$
• $\forall x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$, $G_n(x) = (1 - \frac{1}{2nx})^n$

4) a) Pour tout réel x négatif ou nul, on a, par croissance de G_n (car G_n est une fonction de répartition) : $G_n(x) \leq G_n(0)$. Comme $G_n(0) = (\frac{1}{2})^n$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \leq 0,\ G_n(x) \leq (\frac{1}{2})^n}$$

b) Pour tout réel x strictement positif, afin avoir $x > \frac{1}{n_0}$, comme tout est strictement positif, il suffit de choisir un entier naturel n_0 tel que $n_0 > \frac{1}{x}$.

On peut choisir n_0 égal à la partie entière de $\frac{1}{x}+1$, ce qui donne $n_0 \le \frac{1}{x}+1 < n_0 + 1$ et l'inégalité de droite fournit bien $n_0 > \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{n_0}$.

A fortiori, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a : $x > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$.

D'après la question 3), on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \ge n_0, G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n}$$

5) a) Une fonction de répartition étant positive, on a, d'après la question 4a) :
$\forall x \le 0, 0 \le G_n(x) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Par encadrement, on obtient :

$$\boxed{\forall x \le 0, \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0}$$

D'après la question 4b) : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \ge n_0, G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n$.

On en déduit $\ln(G_n(x)) = n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right)$ et, grâce à l'équivalent $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$ (avec $u = -\frac{1}{2nx}$ qui tend bien vers 0) on en déduit :

$$\ln(G_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \times \frac{-1}{2nx}$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(G_n(x)) = -\frac{1}{2x}$ et, par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{1}{2x}$, on en tire :

$$\boxed{\forall x > 0, \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{2x}}}$$

La fonction G, limite de G_n, est donc définie par : $G(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{2x}) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$.

b) On vérifie les 5 points garantissant que G est une fonction de répartition d'une variable à densité.

- Comme G est nulle sur $]-\infty, 0]$, on a bien $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2x}} = 1$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x} = 0$).

• G est continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, elle l'est sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante, et elle l'est sur $]0, +\infty[$ en tant que composée bien définie de fonctions continues.

De plus, en 0, on a : $\lim_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0)$ et $\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x}} = 0$ (car $\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x} = -\infty$).

• G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (sa restriction à $]-\infty, 0[$ est une fonction constante (nulle), et sa restriction à $]0, +\infty[$ est la composée bien définie de fonctions de classe C^1).

• Pour tout x positif, $G'(x) = \frac{1}{2x^2} e^{-\frac{1}{2x}} > 0$. La fonction G est donc croissante sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, 1[$ et comme G est nulle sur $]-\infty, 0]$, G est bien croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$. En effet, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G_n(x)$	0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est une fonction de répartition d'une variable à densité}}$$

c) Les résultats des deux questions précédentes prouvent que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{Y}(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Comme l'énoncé assure que $\frac{1}{Y}$ est une variable aléatoire, en notant H la fonction de répartition de $\frac{1}{Y}$, on a : $\forall x \le 0,\ H(x) = 0$. (1)

De plus, on a : $\forall x > 0$, $H(x) = P\left(\frac{1}{Y} \le x\right) = P\left(Y \ge \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Y \le \frac{1}{x}\right) = 1 - G\left(\frac{1}{x}\right)$.

La deuxième égalité est justifiée par le fait que x est strictement positif et que $\frac{1}{Y}$ prend des valeurs strictement positives.

En remplaçant grâce à la question 5a), on obtient : $\forall x > 0$, $H(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$. (2)
Grâce à (1) et (2), on conclut :

$$\boxed{\frac{1}{Y} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}}$$

Problème

Partie 1

1) a) $u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \dfrac{\pi}{2}$.

$u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1}\,dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (\sin t - 1)\,dt$.

Comme $\sin t$ est positif sur $[0,\ \pi/2]$ et comme $\sin t - 1$ est négatif, on a, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant : $u_{n+1} - u_n \le 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt$. Comme la fonction sinus est continue, positive et non identiquement nulle ($\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$), le théorème de stricte positivité de l'intégrale assure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$$

2) a) Dans l'intégrale définissant u_{n+2}, on pose : $u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v'(t) = \sin t$.

On peut alors choisir $v(t) = -\cos t$ et on a : $u'(t) = (n+1)(\sin t)^n \cos t$. Les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0,\ \pi/2]$, l'intégration par parties est licite et on trouve :

$u_{n+2} = \left[-\cos t (\sin t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t)^n\,dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t)^n\,dt$.

(le crochet est nul car $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $(\sin 0)^{n+1} = 0$, puisque $n+1 \ge 1$)

Grâce à la relation la plus connue de la trigonométrie, on obtient :

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)(\sin t)^n\,dt$$

En développant dans l'intégrale et, toujours par linéarité, on obtient :

$u_{n+2} = (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\,dt\right) = (n+1)(u_n - u_{n+2}) = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}$.

On trouve finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2} = (n+1)\,u_n}$$

b) Procédons par récurrence.

- Pour $n = 0$, $\dfrac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après la première question).

On a donc : $u_0 = \dfrac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

• Si l'on suppose que, pour un certain n de $\mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$, alors, d'après la question 2a), on trouve :

$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)} \times \dfrac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$. En multipliant haut et bas par $(2n+2)$, on obtient :

$u_{2n+2} = \dfrac{2n+2}{2(n+1)(2n+2)} \times \dfrac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}}$$

c) En multipliant par u_{n+1} les deux membres de l'égalité trouvée à la question 2a), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\, u_{n+2}\, u_{n+1} = (n+1)\, u_{n+1}\, u_n$$

Si l'on pose $v_n = (n+1) u_n u_{n+1}$, ceci donne : $v_{n+1} = v_n$. La suite (v_n) est donc constante, de premier terme $v_0 = u_0 u_1 = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\pi}{2}$.

En d'autres termes :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\ u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2}}$$

d) D'après la relation précédente, en remplaçant n par $2n$, on a : $u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)\, u_{2n}}$.

Avec le résultat de la question 2b), on obtient : $u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1) \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}}$

Ceci se simplifie et donne :

$$\boxed{u_{2n+1} = \dfrac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3) a) D'après la question 2a), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$.

b) Comme la suite (u_n) est décroissante, on a : $u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n$. En divisant les trois membres de cette double inégalité par u_n qui est strictement positif, on obtient :

$\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = 1$, on a, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1}$$

c) Le résultat de la question 2c) peut s'écrire : $u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. D'après la question précédente, on sait que : $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. En prenant un équivalent de chaque côté, on obtient :

$u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. En prenant la racine carrée, on obtient : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Comme u_n est positif, on a bien :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Partie 2

1) Établissons tout d'abord la convergence de l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$ et, comme $\lim\limits_{t\to 1} e^{-tx} = e^{-x}$, on a :

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2}<1$), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives assure que l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge également.

Établissons maintenant la convergence de l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 0]$ et, comme $\lim\limits_{t\to -1} e^{-tx} = e^{x}$, on a :

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to -1}{\sim} \frac{e^{x}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2}<1$), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives assure que l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge également.

Par définition de la convergence d'une intégrale deux fois impropre, on peut dire que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ converge}}$$

2) a) Comme x est positif, on a, pour tout t de $[0,1]$: $0 \le e^{-tx} \le 1$.

On en déduit, pour tout t de $[0,1[$: $0 \le \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (car $\sqrt{1-t^2}$ est strictement positif).

Les intégrales $\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ convergent (la deuxième est un cas particulier de la première avec $x=0$) d'après la question précédente, et en intégrant bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$0 \le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ est bornée}}$$

b) Pour tout u de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{1}{2} \le 1-u \le 1$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, on obtient : $2 \ge \frac{1}{\sqrt{1-u}} \ge 1$. On a donc, en particulier : $1 \le \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Par ailleurs, pour comparer $1+u$ et $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$, on va comparer leurs carrés en faisant leur différence : $(1+u)^2 - \frac{1}{1-u} = \frac{-u(u^2+u-1)}{1-u}$. Le trinôme entre parenthèses est une fonction croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et prend ses valeurs entre –1 et $-\frac{1}{4}$, ce qui prouve qu'il est négatif, et ainsi : $\frac{-u(u^2+u-1)}{1-u} \ge 0$. On a donc : $(1+u)^2 \ge \frac{1}{1-u}$ et, par croissance de la fonction racine carrée, on a bien : $1+u \ge \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ 1 \le \frac{1}{\sqrt{1-u}} \le 1+u}$$

3) a) D'après le cours sur la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, on sait que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}\,dt = 1$. On en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Par parité de la fonction intégrée, on a donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

En se référant au moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, on a : $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$.

Comme $E(Z^2) = V(Z) + \left(E(Z)\right)^2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$, on en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Toujours par parité de la fonction intégrée, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$$

b) En posant $u = \sqrt{t\,x}$, ce changement de variable étant bien de classe C^1 sur $]0, 1]$, bijectif de $[0,1]$ sur $[0, \sqrt{x}]$, on obtient : $\int_0^1 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-u^2}}{\frac{u}{\sqrt{x}}} \frac{2u}{x}\, du = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$.

D'après la question précédente, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{t}}\, dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}}$$

c) Toujours avec le même changement de variable, on trouve :
$\int_0^1 e^{-t\,x} \sqrt{t} dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} \frac{u}{\sqrt{x}} \frac{2u}{x}\, du = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} u^2 e^{-u^2} du$.

D'après la question 3a), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} t^2 e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\int_0^1 e^{-t\,x} \sqrt{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}}$$

4) a) On fait le changement de variable $u = 1 + t$, qui est de classe C^1 sur $[-1, 0]$, bijectif de $[-1,0]$ sur $[0,1]$, et on trouve : $\int_{-1}^0 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{(1-u)x}}{\sqrt{u(2-u)}}\, du = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\, du$

Conclusion :

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\, du}$$

b) Pour tout *u* de $[0,1]$, on a $\frac{u}{2}$ élément de $[0, \frac{1}{2}]$, et d'après la question 2b) :

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leq 1 + \frac{u}{2}$$

En multipliant par $\frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}$ positif, on obtient : $\frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}} \leq \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}} \leq (1+\frac{u}{2}) \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}$.

En intégrant de 0 à 1, on a : $\int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}} (1+\frac{u}{2}) du$.

En développant dans l'intégrale de droite, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}} du + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-u\,x} \sqrt{u}\, du \qquad (*)$$

D'après la question 3b), on a : $\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

En divisant l'encadrement ($*$) ci-dessus par $\sqrt{\frac{\pi}{x}} > 0$, on a :

$$\frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \le \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \le \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} + \frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}}{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{8x} = 0$, on obtient par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 1$.

Par définition, ceci veut dire que $\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

Comme $\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du$, on a finalement :

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}}$$

Pour finir, par définition de $I(x)$, on a : $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

La première intégrale est bornée d'après la question 2a) et la deuxième tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (d'après le dernier résultat encadré et grâce aux croissances comparées).
Par conséquent, la première intégrale est négligeable devant la deuxième au voisinage de $+\infty$ et on en conclut : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

Par transitivité de l'équivalence, on obtient :

$$\boxed{I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}}$$

Partie 3

1) Avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales s'écrit : $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([X=Y]\cap[X=k]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([Y=k]\cap[X=k]\big)$.

Par indépendance de X et Y, on obtient : $P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(X=k \right) P\left(Y=k\right)$.

En remplaçant la valeur des probabilités, on a :

$$\boxed{P(X=Y)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{\left(k!\right)^2}}$$

2) a) Comme t est élément de $\left[-1, 1\right]$, deux cas se présentent :

- Soit $t \leq 0$ et on a $0 \leq u \leq -tx \leq x$ (la dernière inégalité provient de $-t \leq 1$ et $x \geq 0$).
- Soit $t \geq 0$ et on a $-x \leq -tx \leq u \leq 0$ (la première inégalité provient de $-t \geq -1$ et $x \geq 0$).

Finalement : pour tout u entre 0 et $-tx$, on a : $-x \leq u \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\boxed{e^u \leq e^x}$$

En notant h la fonction $u \mapsto e^u$, on a : $h^{(2n+1)}(u)=e^u$ et $\left|h^{(2n+1)}(u)\right|=e^u$. D'après ce qui précède, on obtient : $\left|h^{(2n+1)}(u)\right| \leq e^x$.
L'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $2n$, appliquée à la fonction h, entre 0 et $-tx$ s'écrit alors :

$$\boxed{\left| e^{-tx}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k t^k x^k}{k!}\right| \leq e^x \frac{\left|t\right|^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

b) L'intégrale $J=\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est impropre en 1. On effectue le changement de variable $u=s^{-1}\left(t\right)$, où l'on a désigné par s la restriction de la fonction sinus à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction s^{-1} est bien de classe C^1 sur $\left[0, 1\right[$ et est une bijection de $\left[0, 1\right]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc : $t=\sin u$, $dt=\cos u\, du$ et $\sqrt{1-t^2}=\cos u$.
Dès lors on obtient : $J=\int_0^{\pi/2} (\sin u)^k\, du$ et on a bien :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt=u_k}$$

c) En divisant les deux membres de l'inégalité obtenue à la question 2a) de cette partie par $\sqrt{1-t^2}$ qui est strictement positif (ce qui explique que l'on peut "rentrer" $\sqrt{1-t^2}$ dans la valeur absolue), on trouve : $\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\left|t\right|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$.
En intégrant de –1 à 1, bornes dans l'ordre croissant, on a :

$$\int_{-1}^1\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt \leq e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_{-1}^1\frac{\left|t\right|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et la linéarité de l'intégration, on trouve :

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt \right| \le e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt .$$

• Si k est pair, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est paire donc $\int_{-1}^{1} \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et, d'après la question 2b), on a : $\int_{-1}^{1} \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_{0}^{1} \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2u_k$.

• Si k est impair, alors $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est impaire donc $\int_{-1}^{1} \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et est nulle.

Par conséquent, les termes impairs de la somme $\sum_{k=0}^{2n} \dfrac{(-1)^k x^k}{k!}\int_{-1}^{1} \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ sont nuls et il reste :

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\int_{-1}^{1} \frac{t^{2i}}{\sqrt{1-t^2}}dt \right| \le e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

En divisant par π, on obtient :

$$\left| I(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\,2u_{2i} \right| \le \frac{e^x}{\pi}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Pour terminer, la fonction $t \mapsto \dfrac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$ étant paire, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_{0}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2u_{2n+1}$$

En conclusion : $\left| I(x) - \dfrac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n} \dfrac{x^{2i}}{(2i)!}2u_{2i} \right| \le 2e^x \dfrac{x^{2n+1}}{\pi(2n+1)!}u_{2n+1}$.

En remplaçant u_{2i} par son expression, il reste :

$$\boxed{\left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(i!)^2 2^{2i}} \right| \le \frac{2x^{2n+1}e^x}{\pi(2n+1)!}u_{2n+1}}$$

d) La série exponentielle converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, ce qui assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ (suite extraite d'une suite convergente). Par ailleurs, on a vu à la question 5) que $u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}}$, ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

Tout ceci montre, par encadrement (une valeur absolue est positive), que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(i!)^2 2^{2i}} \right| = 0$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{I(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{(i!)^2 2^{2i}}}$$

3) D'après la question 1) de cette partie, on a : $P(X=Y)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}=e^{-2\lambda}I(2\lambda)$.

Grâce à la question 4b) de la partie 2, avec $x=2\lambda$, on a $I(2\lambda)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{2\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{P(X=Y)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}}$$