Corrigé

Exercice 1

1) a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$A^3=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&-4\\4&4&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Comme $A^3=2A^2$, on peut conclure :

$\boxed{X^3-2X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } A\text{, donc de } f}$

b) On sait que les valeurs propres de f sont parmi les racines de ce polynôme, par conséquent, 0 et 2 sont les seules valeurs propres possibles de f.
Par ailleurs, 0 est valeur propre de f car A n'est pas inversible (les colonnes C_2 et C_3 de A sont proportionnelles).

Pour finir, $A-2I=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-3\\-2&2&-4\end{pmatrix}$ n'est pas inversible (les colonnes C_1 et C_2 de A sont proportionnelles).
Bilan :

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et 2}}$

c) Cherchons les sous-espaces propres de f. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

- $AX=0X \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-z=0\\-x+3y-3z=0\\-2x+2y-2z=0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3+2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x+y-z=0\\4y-4z=0\\4y-4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=z\end{cases}$.

On en déduit : $AX=0X \Leftrightarrow X=y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 est : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(\ (0,1,1)\ )$. Comme $(0, 1, 1)$ est non nul, on est certain que : $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

- $AX=2X \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y-z=0\\-x+y-3z=0\\-2x+2y-4z=0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-x+y-z=0\\-2z=0\\-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$.

On en déduit : $AX = 2X \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2 est : $\text{Ker}(f-2Id)$ = vect((1, 1, 0)).
Comme (1, 1, 0) est non nul, on est certain que : dim $\text{Ker}(f-2Id)$ = 1.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f n'est pas égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

2) En considérant la première colonne de la matrice T, on devine que le premier vecteur de la base cherchée est un vecteur de Ker$f$: on peut donc choisir u = (0, 1, 1).
En considérant la troisième colonne de la matrice T, on devine que le troisième vecteur de la base cherchée est un vecteur de Ker (f – 2Id) : on peut donc choisir w = (1, 1, 0).
Il reste à trouver le deuxième vecteur v qui, en regardant la deuxième colonne de N vérifie : $f(v) = u$. En posant $v = (a,b,c)$, on obtient : $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\begin{cases}a+b-c=0\\-a+3b-3c=1\\-2a+2b-2c=1\end{cases}$.

On trouve alors, par substitution : $\begin{cases}c=a+b\\-4a=1\\-4a=1\end{cases}$. On peut donc choisir : $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$ et $c=0$.

On a finalement : u = (0, 1, 1), $v = (-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, 0)$ et w = (1, 1, 0) et il reste à montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme elle contient 3 vecteurs et comme dim $\mathbb{R}^3$ = 3, il suffit de prouver sa liberté.

Soit donc a, b, c trois réels tels que $au+bv+cw=0$. Ceci s'écrit : $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}b+c=0\\a+\dfrac{1}{4}b+c=0\\a=0\end{cases}$.

Ce système équivaut à : $\begin{cases}b=4c\\b=-4c\\a=0\end{cases}$. En soustrayant les deux premières équations membre à membre, on trouve : $\begin{cases}b=4c\\8c=0\\a=0\end{cases}$. On a finalement : $a=0$, $c=0$ et $b=0$. La famille (u, v, w) est bien libre.

En conclusion, la famille (u, v, w), avec $u = (0, 1, 1)$, $v = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ et $w = (1, 1, 0)$, est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Remarquons tout de suite que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$, ce qui est rassurant.
Une première méthode consiste à remarquer que :

$$f^2(u) = 0,\ f^2(v) = f(u) = 0$$

Ceci montre que u et v sont deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f^2$, de plus la famille (u, v) est libre (sous-famille d'une famille libre) et, comme $\operatorname{Ker} f^2$ n'est pas de dimension 3 (sinon, on aurait $A^2 = 0$), la famille (u,v) est une base de $\operatorname{Ker} f^2$. Comme la famille (w) est une base de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$, on constate que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée par la juxtaposition d'une base de $\operatorname{Ker} f^2$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)}$$

Une deuxième méthode, plus calculatoire, est la suivante.

- On cherche $\operatorname{Ker} f^2$ comme si de rien n'était.

$A^2 X = 0X \Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$.

On a donc : $A^2 X = 0X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On obtient $\operatorname{Ker} f^2$ = vect ((1, 0, 1) , (0, 1, 1)). Les deux vecteurs de cette famille génératrice ne sont pas proportionnels donc cette famille est libre et c'est une base de $\operatorname{Ker} f^2$, d'où l'on déduit : $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$.
Comme $\dim \operatorname{Ker}(f - 2Id) = 1$, on obtient :

$$\dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Ker}(f - 2Id) = \dim \mathbb{R}^3$$

- On montre que $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$.

L'inclusion de $\{0\}$ dans $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id)$ étant acquise (le vecteur nul appartient à tous les espaces vectoriels), il reste à montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) \subset \{0\}$
Soit $u = (a,b,c)$ un vecteur élément de $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.
On a alors : $c = a + b$ (équation de $\operatorname{Ker} f^2$ vue une dizaine de lignes plus haut) et $\begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$ (équations de $\operatorname{Ker}(f - 2Id)$ vues à la question 1c)).
On en déduit : $0 = 2a$, $b = a$ et $c = 0$, soit $a = b = c = 0$ et on a $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) \subset \{0\}$.
On vient bien de montrer que : $\operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$

Remarque. Pour ce dernier point, on pouvait plus simplement, avec u élément de $\text{Ker } f^2 \cap \text{Ker}(f-2Id)$, en déduire : $f^2(u)=0$ et $f(u)=2u$, ce qui implique :
$0=f^2(u)=f(f(u))=f(2u)=2f(u)=4u$, c'est-à-dire $u=0$.
Conclusion : grâce aux deux points précédents, on a :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker}(f-2Id)}$$

b) Supposons qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2=f$. Soit alors un vecteur u élément de $\text{Ker } f^2$: on a $f^2(u)=0$.
$f^2\left(g(u)\right)=g^4\left(g(u)\right)=g^5(u)=g\left(g^4(u)\right)=g\left(f^2(u)\right)=g(0)=0$ (puisque g est linéaire).
On a donc : $f^2\left(g(u)\right)=0$, ce qui prouve que $g(u)$ appartient à $\text{Ker } f^2$.

$$\boxed{\text{Ker } f^2 \text{ est stable par } g}$$

D'après la première méthode de la question 3a), la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs sont des vecteurs de base de $\text{Ker } f^2$.
Comme g laisse $\text{Ker } f^2$ stable, alors $g(u)$ et $g(v)$ sont combinaisons linéaires de u et v, ce qui prouve que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G=\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Puisque $g^2=f$, on a $G^2=T$, ce qui donne, sans faire les calculs donnant la dernière colonne de G^2 : $\begin{pmatrix} a^2+ba' & a'(a+b') & x' \\ b'(a+d) & b'^2+bc & y' \\ 0 & 0 & z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Par identification des coefficients, on obtient entre autres : $a^2+ba'=0$, $a'(a+b')=1$, $b(a+b')=0$ et $b'^2+ba'=0$.
La deuxième équation prouve que, ni a' ni $a+b'$ ne sont nuls. En reportant cette information dans la troisième équation, on obtient : $b=0$. On en déduit avec les deux autres équations : $a=b'=0$, ce qui contredit $a'(a+b')=1$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant : } g^2=f}$$

4) a) Procédons par analyse-synthèse.
- Analyse. Considérons x élément de $\mathbb{R}^n$ et supposons que l'on ait : $x=y+z$, avec y élément de $\text{Ker } h^{n-1}$ et z élément de $\text{Ker}(h-\alpha Id)$.

Comme z appartient à $\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$, on a $h(z)=\alpha\, z$, puis on montre par récurrence que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $h^p(z)=\alpha^p z$.

Pour $p=0$, on a bien $h^0(z)=Id(z)=z=\alpha^0 z$ et si l'on suppose pour un entier naturel p fixé que $h^p(z)=\alpha^p z$, alors on a : $h^{p+1}(z)=h\left(h^p(z)\right)=h\left(\alpha^p z\right)=\alpha^p h(z)=\alpha^p\alpha\, z=\alpha^{p+1}z$.

On en déduit ainsi : $h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$.

En appliquant h^{n-1} (linéaire) à l'égalité $x=y+z$, on obtient : $h^{n-1}(x)=h^{n-1}(y)+h^{n-1}(z)$.

Comme y appartient à $\text{Ker}\, h^{n-1}$, il reste : $h^{n-1}(x)=h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$.

Le réel α n'est pas nul donc on a : $z=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$. Il en résulte que : $y=x-\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$.

- Synthèse. Vérifions que y et z trouvés ci-dessus sont effectivement tels que $x=y+z$, avec z élément de $\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$ et y élément de $\text{Ker}\, h^{n-1}$.

$(*)$ $y+z=\left(x-\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)\right)+\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)=x$.

$(*)$ $h(z)=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^n(x)$. Comme $h^n=\alpha\, h^{n-1}$, on a : $h(z)=\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}\alpha\, h^{n-1}(x)=\alpha\dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)=\alpha\, z$.

On a donc bien : $z\in\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$.

$(*)$ $h^{n-1}(y)=h^{n-1}\left(x-z\right)=h^{n-1}(x)-h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z-h^{n-1}(z)=0$ (car $h(z)=\alpha\, z$ et on a, comme dans la partie "analyse", $h^{n-1}(z)=\alpha^{n-1}z$).

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\text{Ker}\, h^{n-1}\oplus\text{Ker}(h-\alpha\, Id)}$$

b) Si $\mathbb{R}^n=\text{Ker}\, h^{n-1}\oplus\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$, alors tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $x=y+z$, avec y élément de $\text{Ker}\, h^{n-1}$, ce qui s'écrit $h^{n-1}\left(y\right)=0$, et z élément de $\text{Ker}(h-\alpha\, Id)$, ce qui s'écrit $h(z)=\alpha\, z$.

Dès lors, on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}^n$ (et grâce à la linéarité de h) :

$h^n(x)=h^n(y+z)=h^n(y)+h^n(z)=h\left(h^{n-1}\left(y\right)\right)+h^{n-1}\left(h(z)\right)=h(0)+h^{n-1}\left(\alpha\, z\right)=\alpha\, h^{n-1}\left(\, z\right)$.

D'autre part, on a : $\alpha\, h^{n-1}(x)=\alpha\, h^{n-1}(y+z)=\alpha\, h^{n-1}(y)+\alpha\, h^{n-1}(z)=\alpha\, h^{n-1}(z)$

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $h^n(x)=\alpha\, h^{n-1}(x)$.

Ceci prouve bien que :

$$\boxed{h^n=\alpha\, h^{n-1}}$$

Exercice 2

1) a) D'après le cours, $-x\, X_0$ est une variable à densité et, comme $x > 0$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

Pour tout réel négatif t, on a (en notant $F_{-x\, X_0}$ et F_{X_0} les fonctions de répartition respectives de $-x\, X_0$ et de X_0) : $F_{-x\, X_0}(t)=P(-x\, X_0\le t)=P(X_0\ge-\dfrac{t}{x})=1-F_{X_0}(-\dfrac{t}{x})$.

Comme $-\dfrac{t}{x}\ge 0$, on a : $F_{-x\, X_0}(t)=1-\left(1-e^{\lambda\frac{t}{x}}\right)=e^{\lambda\frac{t}{x}}$.

Bilan : $F_{-xX_0}(t)=\begin{cases} e^{\lambda \frac{t}{x}} \text{ si } t\le 0 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

En dérivant sauf en 0 où l'on pose $f_{-xX_0}(0)=\dfrac{\lambda}{x}$, on obtient une densité f_{-xX_0} de $-x\,X_0$:

$$\boxed{f_{-xX_0}(t)=\begin{cases} \dfrac{\lambda}{x} e^{\lambda \frac{t}{x}} \text{ si } t\le 0 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}}$$

b) Une densité de $X_1 - x\,X_0$ s'obtient par convolution des densités de X_1 et de $-x\,X_0$. Comme les densités f_{X_1} et f_{-xX_0} de X_1 et de $-x\,X_0$ sont bornées (une seule le serait que ce serait suffisant), on est sûr que l'on a une densité *f* de $X_1 - x\,X_0$ en posant :

$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)f_{-xX_0}(z-t)\,dt$. Cherchons l'intervalle sur lequel la fonction intégrée est non nulle : $f_{X_1}(t)f_{-xX_0}(z-t)\neq 0 \Leftrightarrow t\ge 0 \text{ et } z-t\le 0 \Leftrightarrow t\ge \max(0,z)$.

- Si $z\ge 0$, on obtient :

$f(z)=\int_z^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda}{x}e^{\lambda\frac{z-t}{x}}\,dt = \dfrac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\int_z^{+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt$.

Pour tout *A* supérieur ou égal à *z*, on a (car $\lambda(1+\dfrac{1}{x})\neq 0$) :

$$\int_z^A e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt=\frac{-1}{\lambda(1+\frac{1}{x})}\left[e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\right]_z^A=\frac{-1}{\lambda(1+\frac{1}{x})}\left(e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})A}-e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})z}\right).$$

Comme $\lambda(1+\dfrac{1}{x})>0$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})A}=0$ et il en résulte : $\int_z^{+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt=\dfrac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})z}}{\lambda(1+\frac{1}{x})}$.

$$\forall z\ge 0,\ \ f(z)=\frac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\frac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})z}}{\lambda(1+\frac{1}{x})}=\frac{\lambda}{x+1}e^{-\lambda z}$$

- Si $z<0$, on obtient :

$f(z)=\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda}{x}e^{\lambda\frac{z-t}{x}}\,dt = \dfrac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1+\frac{1}{x})t}\,dt$.

De la même façon que précédemment, on trouve :

$$\forall z<0,\ \ f(z)=\frac{\lambda^2}{x}e^{\lambda\frac{z}{x}}\frac{1}{\lambda(1+\frac{1}{x})}=\frac{\lambda}{x+1}e^{\lambda\frac{z}{x}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Une densité de } X_1 - x\,X_0 \text{ est la fonction } f \text{ définie par : } f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda\frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}}$$

c) La variable aléatoire T est (presque sûrement) bien définie (puisque l'on peut considérer que X_0 prend des valeurs strictement positives) et T prend des valeurs positives donc on a déjà : $\forall x < 0,\ F_T(x) = 0$.

Pour tout réel x positif, on a :

$$F_T(x) = P(\frac{X_1}{X_0} \leq x) = P(X_1 \leq x\,X_0) = P(X_1 - x\,X_0 \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz$$

La deuxième égalité est justifiée par le fait que X_0 prend des valeurs positives.

En remplaçant, on obtient : $\forall x \geq 0,\ F_T(x) = \dfrac{\lambda}{x+1}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\frac{z}{x}}\,dz$.

Pour tout réel A négatif, on a (car $\dfrac{\lambda}{x} \neq 0$) : $\displaystyle\int_A^0 e^{\lambda\frac{z}{x}}\,dz = \frac{1}{\lambda/x}\left[e^{\lambda\frac{z}{x}}\right]_A^0 = \frac{x}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda\frac{A}{x}}\right)$.

Comme $\dfrac{\lambda}{x} > 0$, on a $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} e^{\lambda\frac{A}{x}} = 0$ et il en résulte : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\frac{z}{x}}\,dz = \frac{x}{\lambda}$.

En remplaçant, on trouve : $\forall x \geq 0,\ F_T(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Conclusion :

$$\boxed{F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

2) Comme $X = \lfloor T \rfloor + 1$, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(X = n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n-1) = P(n-1 \leq T < n)$.

Par conséquent, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n}$.

Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}}$$

3) a) En reprenant le calcul fait à la question 1a) avec $x = 1$, on trouve une densité de $-X_0$:

$$\boxed{f_{-X_0}(t) = \begin{cases} \lambda\,e^{\lambda t} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

b) Comme Y_n prend la plus grande des valeurs prises par $(X_1, ..., X_n)$, dire que Y_n prend une valeur inférieure ou égale à x, c'est dire que chacune des variables $X_1, ..., X_n$ prend une valeur inférieure ou égale à x.

On a donc : $G_n(x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leq x]\right)$.

Par indépendance mutuelle des variables X_k, on obtient : $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_k \leq x\right)$.

Pour finir, comme les X_k suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$\boxed{G_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

On dérive G_n, sauf en 0 où l'on pose $g_n(0) = 0$, et on trouve une densité g_n de Y_n :

$$\boxed{g_n(x) = \begin{cases} \lambda n\, e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

c) Ici encore, la fonction f_{-X_0} est bornée donc une densité de $Y_n - X_0$ est la fonction h_n définie par : $h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) f_{-X_0}(x-t)\, dt$.

$g_n(t) f_{-X_0}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$ et $x - t \leq 0 \Leftrightarrow t \geq \max(0, x)$.

Pour tout réel x négatif, cette condition devient $t \geq 0$ et on obtient :

$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda n\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1} \lambda\, e^{\lambda(x-t)}\, dt = \lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$.

On peut écrire : $h_n(x) = \lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t}-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$.

On a donc : $h_n(x) = -\lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\left((1-e^{-\lambda t})^n - (1-e^{-\lambda t})^{n-1}\right) dt$.

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$ convergent. En effet, pour tout réel A positif, on a :

$$\int_0^A \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt = \left[\frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda t})^{n+1}\right]_0^A = \frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda A})^{n+1}$$

Comme $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = 0$ et il en résulte : $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt = \frac{1}{n+1}$.

On a de la même manière : $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt = \frac{1}{n}$.

On peut donc scinder l'intégrale définissant $h_n(x)$, ce qui donne :

$h_n(x) = -\lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\, dt + \lambda n e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\, dt$.

$h_n(x) = -\lambda n e^{\lambda x} \times \frac{1}{n+1} + \lambda n e^{\lambda x} \times \frac{1}{n} = \lambda n\, e^{\lambda x}\left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$.

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1}\lambda\, e^{\lambda x}}$$

4) a) L'événement ($Y_n \le X_0$) est réalisé si, et seulement si, tous les événements ($X_1 \le X_0$), ($X_2 \le X_0$), ..., ($X_n \le X_0$) sont réalisés, ce qui signifie que, soit ($Z > n$) est réalisé, soit $(Z = 0)$ est réalisé.
On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (Z > n) \cup (Z = 0)\ = (Y_n \le X_0)}$$

b) $(Z = 0)$ est réalisé si et seulement si "le record n'est jamais battu", c'est-à-dire qu'aucune des variables X_k ne prend une valeur strictement supérieure à celle prise par X_0. En d'autres termes, comme Y_k = Sup(X_1, ..., X_k), toutes les variables Y_k prennent des valeurs inférieures ou égales à celle prise par X_0.
Ceci s'écrit :

$$\boxed{(Z = 0)\ = \bigcap_{k=1}^{+\infty}(Y_k \le X_0)}$$

Si ($Y_{n+1} \le X_0$) est réalisé, alors les événements ($X_1 \le X_0$), ($X_2 \le X_0$), ..., ($X_n \le X_0$), ($X_{n+1} \le X_0$) sont réalisés, ce qui implique que, en particulier, les événements ($X_1 \le X_0$), ($X_2 \le X_0$), ..., ($X_n \le X_0$) sont réalisés et ainsi ($Y_n \le X_0$) est réalisé.
Par conséquent, on a : ($Y_{n+1} \le X_0$) $\subset$ ($Y_n \le X_0$).
La suite $\left((Y_n \le X_0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite décroissante d'événements et le théorème de limite monotone assure que : $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Y_n \le X_0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le X_0)$.
Pour finir, on a : $P(Y_n \le X_0)\ =\ P(Y_n - X_0 \le 0)\ =\ \int_{-\infty}^{0} h_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{0} \lambda\, e^{\lambda x}\,dx$. Comme l'intégrale ne dépend pas de n et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le X_0)\ = 0$.
On a donc : $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Y_n \le X_0)\right) = 0$.
D'après le résultat établi au début de cette question, on peut conclure :

$$\boxed{P(Z = 0) = 0}$$

Remarque. On pouvait aussi utiliser le corollaire du théorème de limite monotone après avoir pris soin de justifier que $\bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \le X_0)\ = (Y_n \le X_0)$. On avait ensuite :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Y_n \le X_0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \le X_0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le X_0) = 0\,.$$

c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z > n) = P(Y_n \leq X_0) = P(Y_n - X_0 \leq 0)$$

Grâce à la question 3c), on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z > n) = \int_{-\infty}^{0} h_n(x)\,dx = \dfrac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{\lambda x}\,dx$.

Pour tout réel A négatif, on a : $\int_A^0 \lambda e^{\lambda x}\,dx = \left[e^{\lambda x}\right]_A^0 = 1 - e^{\lambda A}$.

Comme λ est strictement positif, on a $\lim\limits_{A \to -\infty} e^{\lambda A} = 0$ et on obtient : $\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{\lambda x}\,dx = 1$.

Finalement, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z > n) = \dfrac{1}{n+1}$.

Pour terminer, on a : $(Z \geq n) = (Z > n) \cup (Z = n)$.
Par incompatibilité, on en déduit : $P(Z \geq n) = P(Z > n) + P(Z = n)$.
Enfin, comme Z prend des valeurs entières, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (Z \geq n) = (Z > n-1)$.

On trouve alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ les événements } (X = n) \text{ et } (Z = n) \text{ ont même probabilité}}$$

5) a) En notant F_V et F_U les fonctions de répartition de V et U, on a, pour tout réel x :

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -\lambda x) = P(1-U \geq e^{-\lambda x}).$$

La dernière égalité provient du fait que la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = F_{UV}(1 - e^{-\lambda x})$.
La fonction exponentielle est à valeurs dans $]0, +\infty[$ donc : $1 - e^{-\lambda x} < 1$.
- Si $x \geq 0$, alors, comme $\lambda > 0$, $e^{-\lambda x} \leq 1$ et $1 - e^{-\lambda x} \geq 0$. On en déduit que : $0 \leq 1 - e^{-\lambda x} < 1$.

On peut alors remplacer et obtenir : $F_V(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Si $x < 0$, alors $e^{-\lambda x} > 1$ et $1 - e^{-\lambda x} < 0$. On en déduit que : $F_V(x) = 0$.

On a donc le résultat :

$$\boxed{V \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

b) Il y a deux façons de faire :
- On peut remarquer que simuler la loi de Z, c'est simuler la loi de X, puisque X et Z ont même loi. On peut donc simuler d'abord la loi de T (quotient de deux variables suivant la loi exponentielle de paramètre λ), puis en prendre la partie entière et ajouter 1.

Comme random simule la loi uniforme sur $[0,1[$, on sait, d'après le résultat de la question 5a), que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\text{random})$ simule la loi exponentielle de paramètre λ.

Voici une première version de fonction simulant la loi de Z :

```
function z : integer ;
var t : real ;
Begin
t : = ln(1− random) / ln(1− random) ;      {les facteurs −1/λ se sont simplifiés}
z : = trunc(t) + 1 ;
End ;
```

• On pouvait aussi simuler directement la loi de Z de la façon suivante :

```
function z (lambda : real) : integer ;
var k : = integer ; X0 : real ;
Begin
X0 : = –ln(1 – random) / lambda ; k : = 0 ;
Repeat  k : = k+1 ; until –ln(1 – random) / lambda > X0 ;
z : = k ;
End ;
```

Exercice 3

1) Par définition de la division euclidienne, on sait que $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Montrons maintenant que f est linéaire.
Soit P_1 et P_2 deux polynômes de E et λ un réel.
La division de $(1-X+X^2)P_1$ par $(1+X^3)$ garantit qu'il existe un unique polynôme Q_1 tel que : $(1-X+X^2)P_1 = (1+X^3)\,Q_1 + f(P_1)$ (1)
De même, en divisant $(1-X+X^2)P_2$ par $(1+X^3)$, on sait qu'il existe un unique polynôme Q_2 tel que : $(1-X+X^2)P_2 = (1+X^3)\,Q_2 + f(P_2)$ (2)
En multipliant l'égalité (1) par λ et en ajoutant l'égalité (2), on obtient :
$(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1+X^3)\,(\lambda Q_1 + Q_2) + \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Par ailleurs, la division euclidienne de $(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2)$ par $(1+X^3)$ assure qu'il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme, noté $f(\lambda P_1 + P_2)$ selon l'énoncé, tels que :

$$(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1+X^3)Q + f(\lambda P_1 + P_2)$$

Par unicité, on a donc : $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.
En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2) a) On a : $(1-X+X^2)1 = (1+X^3)\,0 + 1-X+X^2$.
Par unicité, on a donc $f(e_0) = 1-X+X^2$, d'où :

$$\boxed{f(e_0) = e_0 - e_1 + e_2}$$

De même, on a : $(1-X+X^2)X = (1+X^3)\,1\ -1+X-X^2$.
Par unicité, on a donc $f(e_1) = -1+X-X^2$, d'où :

$$\boxed{f(e_1) = -e_0 + e_1 - e_2}$$

Enfin : $(1-X+X^2)X^2=(1+X^3)(X-1)+1-X+X^2$.
Par unicité, on a donc $f(e_2)=1-X+X^2$, d'où :

$$\boxed{f(e_2)=e_0-e_1+e_2}$$

On constate que l'on a bien :

$$\boxed{f(e_0)=-f(e_1)=f(e_2)}$$

b) Comme (e_0, e_1, e_2) est une base de E, on a $\mathrm{Im} f=\mathrm{vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2))$.
Comme $f(e_1)=-f(e_0)$ et $f(e_2)=f(e_0)$, il reste (par exemple) : $\mathrm{Im} f=\mathrm{vect}(f(e_0))$.
Pour finir, $\mathrm{Im} f=\mathrm{vect}(e_0-e_1+e_2)$.
Comme $e_0-e_1+e_2\neq 0$, on est sûr que $(e_0-e_1+e_2)$ est une famille libre.
On peut conclure :

$$\boxed{(e_0-e_1+e_2) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$$

c) Comme $\mathrm{rg}(f)=1$ et $\dim E=3$, le théorème du rang montre que : $\dim \mathrm{Ker} f=2$.

De plus, par linéarité de f, on a $f(e_0+e_1)=0$ et $f(e_1+e_2)=0$, ce qui prouve que e_0+e_1 et e_1+e_2 sont deux vecteurs de $\mathrm{Ker} f$. Ces deux vecteurs forment une famille libre (sinon il existerait deux réels α et β non tous les deux nuls tels que $\alpha(e_0+e_1)+\beta(e_1+e_2)=0$, d'où l'on tirerait $\alpha e_0+(\alpha+\beta)e_1+\beta e_2=0$, ce qui contredirait le fait que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E). Par conséquent, la famille (e_0+e_1, e_1+e_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathrm{Ker} f$ et $\dim \mathrm{Ker} f=2$ donc :

$$\boxed{(e_0+e_1, e_1+e_2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$$

3) a) Avec les résultats de la question 2a), on a (par linéarité de f):

$$f(e_0-e_1+e_2)=3(e_0-e_1+e_2)$$

Comme tout polynôme P de $\mathrm{Im} f$ est proportionnel à $e_0-e_1+e_2$, on obtient, en posant $P=\alpha(e_0-e_1+e_2)$:

$f(P)=f\left(\alpha(e_0-e_1+e_2)\right)=\alpha f\left(e_0-e_1+e_2\right)=3\alpha\left(e_0-e_1+e_2\right)=3P$.

$$\boxed{\forall P\in \mathrm{Im} f,\ f(P)=3P}$$

Comme, en particulier, le vecteur $e_0-e_1+e_2$ est non nul, ceci montre que 3 est valeur propre de f.
Ce qui vient d'être fait permet d'écrire : $\mathrm{Im} f\subset \mathrm{Ker}(f-3Id)$.
Pour finir, si P appartient à $\mathrm{Ker}(f-3Id)$, alors $f(P)=3P$, soit $P=\dfrac{1}{3}f(P)=f(\dfrac{1}{3}P)$, ce qui prouve que P appartient à $\mathrm{Im} f$. On a donc l'inclusion : $\mathrm{Ker}(f-3Id)\subset \mathrm{Im} f$.
Bilan :

$$\boxed{3 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } \mathrm{Im} f=\mathrm{Ker}(f-3Id)}$$

b) Première méthode. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique réelle donc f est diagonalisable.

Deuxième méthode. En notant $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, on a d'après la question 2c) : $E_0(f) = \text{Ker} f$ et $\dim E_0(f) = 2$.
On a aussi, d'après la question 3a) : $E_3(f) = \text{Im} f$ et $\dim E_3(f) = 1$.
On a donc $\dim E_3(f) + \dim E_0(f) = \dim E$, ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

4) a) On a $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$ donc φ est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k = \sum_{k=0}^{2} b_k a_k = \varphi(Q,P)$. L'application φ est donc symétrique.

Pour tous polynômes P_1, P_2 et Q de E et tout réel λ, on a :

$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \sum_{k=0}^{2} (\lambda a_{1,k} + a_{2,k}) b_k = \lambda \sum_{k=0}^{2} a_{1,k} b_k + \sum_{k=0}^{2} a_{2,k} b_k$. On a donc :

$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$.

L'application φ est linéaire à gauche et, par symétrie, φ est bilinéaire.

$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{2} a_k^2 \geq 0$ donc φ est positive (car les a_k sont réels).

Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{2} a_k^2 = 0$. Cette somme est une somme de réels positifs qui est nulle, donc chacun de ses termes est nul, d'où : $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $a_k = 0$.
On en déduit $P = 0$ et la forme φ est définie positive.
En conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

4) b) Il faut montrer que tout vecteur de $\text{Ker} f$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im} f$, ce qui montrera que $\text{Ker} f \subset (\text{Im} f)^\perp$, l'égalité étant assurée puisque :
$\dim \text{Ker} f = 3 - \dim \text{Im} f = \dim (\text{Im} f)^\perp$.
De plus, comme $\text{Ker} f = \text{vect}(e_0 + e_1,\ e_1 + e_2)$ et $\text{Im} f = \text{vect}(e_0 - e_1 + e_2)$, il suffit de montrer que $(e_0 + e_1) \perp (e_0 - e_1 + e_2)$ et $(e_1 + e_2) \perp (e_0 - e_1 + e_2)$.

$\varphi(e_0 + e_1,\ e_0 - e_1 + e_2) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = 0$.

$\varphi(e_1 + e_2,\ e_0 - e_1 + e_2) = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$.

On a bien montré que :

$$\boxed{\text{Ker} f \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \text{Im} f \text{ dans } E}$$

5) a) Par définition de φ, on vérifie :
$\varphi(e_0, e_1) = 1\times0 + 0\times1 + 0\times0 = 0$.
$\varphi(e_0, e_2) = 1\times0 + 0\times0 + 0\times1 = 0$.
$\varphi(e_1, e_2) = 0\times0 + 1\times0 + 0\times1 = 0$.
$\varphi(e_0, e_0) = 1\times1 + 0\times0 + 0\times0 = 1$.
$\varphi(e_1, e_1) = 0\times0 + 1\times1 + 0\times0 = 1$.
$\varphi(e_2, e_2) = 0\times0 + 0\times0 + 1\times1 = 1$.
On a bien montré que :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base orthonormale pour } \varphi}$$

b) D'après les résultats de la question 2a), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice de f dans une base orthonormale est symétrique réelle donc f est un endomorphisme symétrique, ce qui prouve que ses sous-espaces propres, $\operatorname{Ker}(f-3Id)$ et $\operatorname{Ker} f$, sont supplémentaires orthogonaux.
On retrouve bien le résultat de la question 4b), puisque $\operatorname{Ker}(f-3Id) = \operatorname{Im} f$.

Problème

Partie 1

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i\,x_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)} i\,x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} i\,x_i$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} i\,x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} i\,x_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Après "télescopage", on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} i\,x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{i}{n+1})\,x_i$.

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\,x_i}$$

On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=i}^{n} 1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_i$.

En intervertissant les sommes, on trouve :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} S_j$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = T_n}$$

Remarque. On pouvait aussi "partir" de $T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} S_j$, puis remplacer S_j et trouver, après permutation des sommes : $T_n = = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i (n+1-i)$, ce qui faisait le lien avec la première partie du calcul.

b) Comme la série de terme général x_k est convergente, la suite (S_n) est convergente et, en notant S sa limite, on sait, d'après le résultat admis au début du problème, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k = S$$

De plus, on a $T_n = \dfrac{n}{n+1}\times\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$, ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n = S$.

D'après la question 2a), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}y_k = S$.

Ceci signifie que la série de terme général y_n converge et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}y_n = \sum_{n=1}^{+\infty}x_n}$$

2) a) • L'inégalité proposée est évidente si l'un au moins des réels a_k est nul (elle confirme que 0 est inférieur ou égal à un nombre positif).

• Sinon, on utilise la fonction logarithme népérien qui est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (en effet $\ln''(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$), ce qui donne :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.

Grâce aux propriétés du logarithme, on a successivement :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right) \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \le \ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$.

Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \le \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

En regroupant les deux points précédents, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\left(\mathbb{R}_+\right)^n,\ \left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k}$$

b) On a : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\left(\dfrac{\prod_{k=1}^{n}k}{\prod_{k=1}^{n}k}\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\dfrac{\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)^{1/n}}{(n!)^{1/n}}$.

On a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n}k\,x_k\right)^{1/n}}$$

On sait, d'après la question 2a), que : $\left(\prod_{k=1}^{n} k\,x_k\right)^{1/n} \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq \dfrac{1}{(n!)^{1/n}} \times \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k$.

Comme $y_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k$, on a : $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,x_k = (n+1)\,y_n$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\ y_n}$$

c) L'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme népérien : la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, tangente qui a pour équation : $y = x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leq x}$$

Remarque. On pouvait aussi étudier la fonction g : $x \mapsto \ln(1+x) - x$ dont la dérivée est $x \mapsto \dfrac{-x}{1+x}$, qui est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $g(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \leq 0$ (ce qui est le résultat demandé).

d) On sait que : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

En appliquant le résultat de la question précédente avec $x = \dfrac{1}{n}$ (qui est bien positif), on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Ceci s'écrit aussi $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq 1$, et, par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :

$\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) \leq e$. On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e}$$

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} j^{j-1}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} j^{j}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{1}{j}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} j^{j}}{\prod_{k=1}^{n}k^k} \times \frac{1}{(n+1)!}$. Les deux produits restants se "télescopent" et on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = (n+1)^{n+1} \times \frac{1}{(n+1)!}$.

En simplifiant par $n+1$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k}$$

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k$.

D'après le résultat obtenu à la question 2d), on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k \leq e$.

On en déduit, en multipliant membre à membre ces inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$.

Comme la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}} \leq e$.

Pour finir, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq \dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$. On peut donc écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq e\, y_n$.

D'après la question 1b), la série de terme général y_n converge donc, grâce au critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général z_n converge aussi et on a de plus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Toujours grâce à la question 1b), on sait que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Par conséquent :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n}$$

3) a) Pour tout entier naturel n non nul et pour tout k élément de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\ \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln x \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En intégrant de $\dfrac{k}{n}$ à $\dfrac{k+1}{n}$, (fonctions continues et bornes dans l'ordre croissant), on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

b) On sait qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x\ln x - x$. Par conséquent, on a :

$\displaystyle\int_{1/n}^{1} \ln x\,dx = \left[\,x\ln x - x\,\right]_{1/n}^{1} = -1 - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$.

En arrangeant, on trouve :

$$\boxed{\int_{1/n}^{1} \ln x\,dx = -1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}}$$

En sommant pour k allant de 1 à $n-1$ l'égalité obtenue à la question 3a) , on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Après changement d'indice dans la deuxième somme, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

On trouve alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ln\frac{n}{n}\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right).$

En simplifiant : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{1/n}^{1}\ln x\,dx\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{\ln n}{n}.$

On obtient, en remplaçant l'intégrale par son expression :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq-1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{\ln n}{n}.$$

En recentrant cet encadrement, on a :

$$\boxed{-1+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq-1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}}$$

c) Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$,on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=-1}$$

Ce qui précède s'écrit : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n\right)=-1$. Avec les propriétés du logarithme, on a aussi : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln n\right)=-1$, ce qui s'écrit encore : $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)=-1$.

Par continuité de la fonction exponentielle, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)=\frac{1}{e}$.

En écrivant autrement, on trouve : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{e}{n}}{\frac{1}{(n!)^{1/n}}}\right)=1$.

On a donc bien :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{n}}$$

4) a) Comme les termes de la suite $\left(x_n(N)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont nuls dès que n est strictement supérieur à N, on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}$$

De plus, on a : $\forall n \le N,\ z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{1/n} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$.

On a aussi : $\forall n > N,\ z_n(N) = 0$ (puisque le produit contient au moins un facteur nul).

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}}$$

b) Comme la série de terme général $\frac{e}{n}$ est divergente (la série de Riemann de paramètre 1 diverge), le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs garantit que la série de terme général $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$ diverge également.

En tenant compte du résultat admis par l'énoncé, on peut en déduire que :

$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{N\to+\infty}{\sim} e\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, ce qui signifie d'après la question 4a) : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$.

On a donc :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e}$$

5) S'il existait une constante λ strictement inférieure à e telle que, pour toute suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge, on ait :

$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \le \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, alors, en écrivant cette inégalité pour la suite $\left(x_n(N)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on aurait :

$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \le \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$. En divisant par la somme de gauche (strictement positive), on obtiendrait : $\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \le \lambda$, et en prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on aurait :

$\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \le \lambda$. Comme $\lambda < e$, ceci contredit le résultat de la question 4b), on peut conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n \le \lambda \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.