EDHEC 2011 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1. $Q(X) = (X-1)\,Q_1(X) = Q_1(X)\,(X-1)$. Alors $Q(u) = Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E)$.

Comme $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit y un élément de l'image de $u - \mathrm{Id}_E$. Il existe un élément x de E tel que $y = (u - \mathrm{Id}_E)(x)$.

Donc $Q_1(u)(y) = Q_1(u)\Big((u - \mathrm{Id}_E)(x)\Big) = \Big(Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}_E)\Big)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$.

Ainsi y est dans le noyau de $Q_1(u)$.

$\forall y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E),\ y \in \mathrm{Ker}\, Q_1(u)$.

$$\boxed{\text{L'image de } u - \mathrm{Id}_E \text{ est contenue dans } \mathrm{Ker}\, Q_1(u).}$$

Remarque *C'est une bonne occasion pour redémontrer que si f et g sont deux endomorphismes de E :*

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f.$$

On peut encore généraliser au cas où $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$.

2. (a) Soit x un élément de E_1. $(u - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ donc $u(x) = x$.

Le programme de seconde année (voir I 2) a)) nous permet alors de dire que $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\,x$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est un élément de } E_1 \text{ alors } Q_1(u)(x) = Q_1(1)\,x.}$$

Remarque *Redonnons une preuve de ce que nous avons affirmé (à juste titre...) et même un peu plus.*

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et $r+1$ réels a_0, a_1, ..., a_r tel que $Q_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$. $Q_1(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, u^k$.

Soient λ un réel et x un élément de E tel que $u(x) = \lambda\, x$. Un récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k\, x$.

Alors $Q_1(u)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, u^k(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k\, \lambda^k\, x = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\, \lambda^k\right) x = Q_1(\lambda)\, x$.

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda\, x \Rightarrow Q_1(u)(x) = Q_1(\lambda)\, x$.

(b) • Est-il vraiment utile de dire que E_1 et $\mathrm{Ker}\, Q_1(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E donc contiennent tous les deux 0_E et qu'ainsi $\{0_E\} \subset E_1 \cap \mathrm{Ker}\, Q_1(u)$?

• Soit x un élément de $E_1 \cap \mathrm{Ker}\, Q_1(u)$. $Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x$ d'après **(a)** et $Q_1(u)(x) = 0_E$.

Donc $Q_1(1)\, x = 0_E$. Comme $Q_1(1) \neq 0$ il vient $x = 0_E$. Ceci achève de montrer que $E_1 \cap \mathrm{Ker}\, Q_1(u) \subset \{0_E\}$ Finalement

$$\boxed{E_1 \cap \mathrm{Ker}\, Q_1(u) = \{0_E\}.}$$

(c) $E_1 \cap \mathrm{Ker}\, Q_1(u) = \{0_E\}$ et E est de dimension finie. Donc pour montrer que E_1 et $\mathrm{Ker}\, Q_1(u)$ sont supplémentaires il ne reste plus qu'à montrer que $\dim E_1 + \dim \mathrm{Ker}\, Q_1(u) = \dim E$.

$E_1 + \mathrm{Ker}\, Q_1(u)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim\big(E_1 + \mathrm{Ker}\, Q_1(u)\big) \leqslant \dim E$.

E_1 et $\operatorname{Ker} Q_1(u)$ sont en somme directe donc $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim \big(E_1 + \operatorname{Ker} Q_1(u)\big) \leqslant \dim E$.

Or $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker} Q_1(u)$ donc $\dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

On obtient alors $\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Ou encore $\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) \leqslant \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Le théorème du rang appliqué à $u - \operatorname{Id}_E$ donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E)$.

Alors $\dim E \leqslant \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Or nous avons vu que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) \leqslant \dim E$. Donc $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

Ceci achève de montrer la supplémentarité de E_1 et de $\operatorname{Ker} Q_1(u)$.

$$\boxed{E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1(u).}$$

3. Rappelons que $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1(u)$. Donc $\dim E = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

$\operatorname{Ker} Q_1(u)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie donc $\operatorname{Ker} Q_1(u) = E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E$.

Alors : $Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} Q_1(u) = E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker} Q_1(u)$.

Ainsi : $Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \dim E_1 = 0 \Leftrightarrow E_1 = \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\} \Leftrightarrow$ 1 n'est pas valeur propre de u.

$$\boxed{Q_1(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de } u.}$$

4. Ici $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$ donc $Q_1 = (X+1)^2$. Supposons que E_1 est de dimension supérieure ou égale à deux et montrons que u est diagonalisable.

• Premier cas : $\dim E_1 = 2$.

$Q = (X-1)(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont 1 et -1. Alors les seules valeurs propres **possibles** de u sont 1 et -1.

$\dim E_1 = 2$ donc 1 est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est de dimension 2. Montrons que -1 est également valeur propre de u.

$\dim \operatorname{Ker} \Big((u + \operatorname{Id}_E)^2\Big) = \dim \operatorname{Ker} Q_1(u) = \dim E - \dim E_1 = 3 - 2 = 1$. Alors $\operatorname{Ker} \Big((u + \operatorname{Id}_E)^2\Big)$ n'est pas réduit au vecteur nul donc $(u + \operatorname{Id}_E)^2$ est un endomorphisme de E non injectif.

Supposons que l'endomorphisme $u + \operatorname{Id}_E$ est injectif. Alors $(u + \operatorname{Id}_E)^2 = (u + \operatorname{Id}_E) \circ (u + \operatorname{Id}_E)$ est injectif comme composée de deux endomorphismes injectifs ce qui n'est pas. Donc $u + \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif. Alors -1 est valeur propre de u.

Ainsi les valeurs propres de u sont 1 et -1. Notons E_{-1} le sous-espace propre de u associé à la valeur propre -1.

$\dim E_{-1} \geqslant 1$ et $\dim E_1 + \dim E_{-1} \leqslant \dim E = 3$. Comme $\dim E_1 = 2$ nécessairement $\dim E_{-1} = 1$.

Alors $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3 = \dim E$ et u est diagonalisable.

• Deuxième cas : $\dim E_1 = 3$.

Alors $\dim E_1 = \dim E < +\infty$ donc $E_1 = E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = E$. Ceci donne : $u - \operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Par conséquent $u = \operatorname{Id}_E$ et u est diagonalisable !

$$\boxed{\text{Si la dimension de } E_1 \text{ est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable.}}$$

EXERCICE 2

1. (a) Il y a $2n$ boules dans l'urne et n paires.

Le nombre de manières de faire un tirage simultané de deux boules dans cette urne est $\displaystyle\binom{2n}{2}$. Soit encore $\dfrac{2n\,(2n-1)}{2}$ ou $n\,(2n-1)$.

Le nombre de manières d'obtenir une paire en faisant un tirage simultané de deux boules dans cette urne est n.

Ainsi lorsque l'on fait un tirage simultané de deux boules dans cette urne, la probabilité d'obtenir une paire est : $\dfrac{n}{n\,(2n-1)}$ donc $\dfrac{1}{2n-1}\cdot$

Notons que $\dfrac{1}{2n-1}$ est un élément de $]0,1[$ car $n \geqslant 2$.

Version 1 T_1 est la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages simultanés de deux boules dans cette urne nécesaire pour obtenir une première paire. Tant que l'on n'obtient pas une paire les tirages se font avec remise donc sont indépendants.

Ainsi T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-1}\cdot$

Version 2 Disons que $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$... Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ notons A_k l'événement le $k^{\text{ème}}$ tirage donne une paire.

$P(T_1 = 1) = P(A_1) = \dfrac{1}{2n-1}\cdot$

$P(T_1 = 2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1})\, P_{\overline{A_1}}(A_2) = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right) \dfrac{1}{2n-1}\cdot$

Soit k un élément de $[\![3, +\infty[\![$.

$P(T_1 = k) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_{k-1}} \cap A_k) = P(\overline{A_1})\, P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\, P_{\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{k-1}}}(A_k)$.

Remarque Les gens rigoureux pourront montrer, avant d'écrire cette dernière ligne, que pour tout élément i de $[\![2, +\infty[\![$, $P(\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{i-1}}) \neq 0$.

$$P(T_1 = k) = P(\overline{A_1}) \left(\prod_{i=2}^{k-1} P_{\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{i-1}}}(\overline{A_i}) \right) P_{\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{k-1}}}(A_k).$$

$P(\overline{A_1}) = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$, $\forall i \in [\![2, k-1]\!]$, $P_{\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{i-1}}}(\overline{A_i}) = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$ et $P_{\overline{A_1} \cap \ldots \overline{A_{k-1}}}(A_k) = \dfrac{1}{2n-1}\cdot$

Alors $P(T_1 = k) = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right) \left(\displaystyle\prod_{i=2}^{k-1} \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right) \right) \dfrac{1}{2n-1} = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right) \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)^{k-2} \dfrac{1}{2n-1}\cdot$

Ce qui donne encore : $P(T_1 = k) = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \dfrac{1}{2n-1}\cdot$ Notons que cette égalité vaut encore pour $k = 1$ et $k = 2$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_1 = k) = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \dfrac{1}{2n-1}\cdot$

On retrouve alors le fait que T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-1}\cdot$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T_1 = k) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \frac{1}{2n-1} \text{ et } T_1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2n-1}\cdot}$$

(b) T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-1}$ donc T_1 a une espérance qui vaut $\dfrac{1}{\frac{1}{2n-1}}$ donc $2n-1$

$$\boxed{T_1 \text{ a une espérance qui vaut } 2n-1.}$$

2. Il faut sans doute remplacer les pointillés par $\boxed{\mathbf{a{=}b}}$...

► Mais notons que ce programme ne simule pas T_1 car il simule clairement un loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$! !

Nous allons écrire une fonction qui simule $T1$ en évitant d'utiliser un lourd tableau. Pour cela quelques remarques.

• Tirer deux boules simultanément dans l'urne ou tirer successivement deux boules dans l'urne sans remettre la première donnent la même loi à T_1.

• La difficulté consiste donc à simuler le tirage de la seconde boule sachant que l'on n'a pas remis la première.

Considérons deux boules distinctes de l'urne que nous noterons a et b (a et b ne sont pas les numéros portés par les boules !).

La probabilité d'obtenir a puis b lorsque l'on fait deux tirages sans remise est $\dfrac{1}{2n}\,\dfrac{1}{2n-1}$.

Procédons de manière différente. Tirons **avec remise** une première boule de l'urne. Puis tirons de nouveau **avec remise** une boules jusqu'à obtenir une boule distincte de la première boule. On montre alors que la probabilité α de tirer pour première boule a et pour dernière boule b est encore $\dfrac{1}{2n}\,\dfrac{1}{2n-1}$.

En effet la probabilité d'obtenir a au premier tirage est $\dfrac{1}{2n}$ et la probabilité d'obtenir dans la seconde phase b sachant que le premier tirage a donné a est $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^{k-1}\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n-1}$ (k est le rang d'apparition de b dans la seconde phase).

Nous utiliserons donc cette procédure pour simuler deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

Notons que pour obtenir un boule distincte de la boule a dans la seconde phase il faut en moyenne $\dfrac{2n}{2n-1}$ tirages ce qui n'est pas très cher...

Exercice Montrer tous ces résultats proprement.

Rappelons que l'urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. Alors pour simuler les tirages successifs de deux boules dans cette urne nous allons procéder de la manière suivante.

1. On choisit un entier k au hasard dans l'intervalle $[\![1, 2n]\!]$. Si $k \leqslant n$ on considère que l'on a obtenu la boule numéro k, si $k > n$ on on considère que l'on a obtenu la boule numéro $k-n$.

2. On répète le choix d'un entier au hasard dans $[\![1, 2n]\!]$ jusqu'à obtenir un entier k' différent de k. Ici encore si $k' \leqslant n$ on considère que l'on a obtenu la boule numéro k', si $k' > n$ on on considère que l'on a obtenu la boule numéro $k'-n$.

Notons alors que nous aurons obtenu une paire si $k = k'$ ou si $|k-k'| = n$.

```
function Simule_T1(n:integer):integer;

var n1,n2,m,compte:integer;

begin

compte:=0;m:=n+n;

repeat
    compte:=compte+1;
    n1:=random(m)+1;
    repeat
    n2:=random(m)+1;
    until(n1<>n2);
until (n1=n2) or (abs(n1-n2)=n);

Simule_T1:=compte;

end;
```

Exercice Utiliser la fonction SimuleT1 pour écrire une fonction qui simule T_i.

3. (a) Soit i dans $[\![2,n]\!]$. T_i est le nombre de tirages nécessaire(s) pour obtenir les i premières paires et T_{i-1} est le nombre de tirages nécessaire(s) pour obtenir les $i-1$ premières paires. Donc $X_i = T_i - T_{i-1}$ est le nombre de tirages nécessaire(s) pour obtenir la $i^{\text{ème}}$ paire (après obtention des $i-1$ premières paires). Ce qui est vrai également pour $i=1$...

> Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, X_i compte le nombre de tirages nécessaire(s) pour obtenir la $i^{\text{ème}}$ paire (après obtention des $i-1$ premières paires).

(b) Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$.

• Supposons i différent de 1. X_i compte le nombre de tirages nécessaire(s) pour obtenir la $i^{\text{ème}}$ paire à partir du moment où l'on a obtenu $i-1$ paires.

Donc X_i compte également le nombre de tirages nécessaire(s) pour obtenir une première paire dans une urne qui contient $2n-2(i-1)$ boules dont $n-(i-1)$ paires ou dans une urne qui contient $2(n-i+1)$ boules dont $n-i+1$ paires.

Alors comme pour T_1, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2\,(n-i+1)-1}$ ou $\dfrac{1}{2n-2i+1}\cdot$

• Si $i=1$, $X_1 = T_1$ donc X_1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-1}$ ou $\dfrac{1}{2n-2\times 1+1}\cdot$ Le résultat précédent vaut encore.

> Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-2i+1}$ et a une espérance qui vaut $2n-2i+1$.

(c) $T_n = T_1 + (T_n - T_1) = T_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} (T_i - T_{i-1}) = X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i.$

Or pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-2i+1}\cdot$ Donc pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, X_i possède une espérance qui vaut $2n-2i+1$.

Alors, par linéarité de l'espérance T_n a une espérance qui vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1)$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1)$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique (de raison -2) le premier étant $2n-1$ et le dernier 1.

Alors $E(T_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1) = n\,\frac{2n-1+1}{2} = n \times n = n^2$.

$$\boxed{T_n \text{ possède une espérance qui vaut } n^2.}$$

4. (a) *Version 1* Remarquons que les événements $\{S_n = 0\}$ et $\{T_1 > n\}$ ont la même probabilité. Alors :

$$P(S_n = 0) = P(T_1 > n) = P(T_1 \geqslant n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T_1 = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \right).$$

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{2n-1} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n+i} = \frac{1}{2n-1} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{i}.$$

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{2n-1} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)} = \frac{1}{2n-1} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n} (2n-1) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n}.$$

Version 1 Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ notons B_k l'événement le $k^{\text{ème}}$ tirage ne donne pas de paire.

$$P(S_n = 0) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) \ldots P_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) = P(B_1) \prod_{k=2}^{n} P_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(B_k).$$

Or $P(B_1) = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$ et pour tout élément k de $[\![2, n]\!]$, $P_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(B_k) = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$. Donc :

$$P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n}.$$

$$\boxed{P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n} = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{n}.}$$

(b) $n \geqslant 2$ donc $1 - \dfrac{1}{2n-1} > 0$. Alors $\ln\big(P(S_n = 0)\big) = n \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2n-1}\right) = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n-1}$.

Alors $\ln P(S_n = 0) = n \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2n-1}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln\big(P(S_n = 0)\big) = \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{n}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2}$.

Par continuité de la fonction exponentielle en $-\dfrac{1}{2}$ on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(S_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(S_n = 0) = e^{-\frac{1}{2}}.}$$

(c) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ renotons A_k l'événement le $k^{\text{ème}}$ tirage donne une paire.

$$P(S_n = n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) = P(A_1) \prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}}(A_k).$$

$$P(A_1) = P(T_1 = 1) = \frac{1}{2n-1}.$$

De plus, pour tout élément k de $[\![2,n]\!]$, $P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}}(A_k)=P(X_k=1)=\dfrac{1}{2n-2k+1}\cdot$ Donc :

$$P(S_n=n)=\frac{1}{2n-1}\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{2n-2k+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-2k+1}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$$ (en faisant le changement d'indice $i=n-k+1$).

$$P(S_n=n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2i}{(2i)\,(2i-1)}=\left(\prod_{i=1}^{n}(2i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2i\,(2i-1)}\right)=\left(2^n\prod_{i=1}^{n}i\right)\frac{1}{(2n)!}=\frac{2^n\,n!}{(2n)!}\cdot$$

$$\boxed{P(S_n=n)=\frac{n!\,2^n}{(2n)!}\cdot}$$

5. Ce programme voudrait simuler S_n mais c'est loin d'être le cas ! ! Pour les mêmes raisons que dans **2.**

Modifions le pour qu'il simule S_n. Une fois encore nous écrirons une fonction. m est le nombre de boules dans l'urne et z est le nombre de paires obtenues.

```
function Simule_Sn(n:integer):integer;

var z,k,n1,n2,m:integer;

begin z:=0;m:=n+n;

for k:=1 to n do
   begin
   n1:=random(m)+1;
   repeat
   n2:=random(m)+1;
   until (n1<>n2);
   if (n1=n2) or (abs(n1-n2)=n) then begin
                                  z:=z+1; m:=m-2;
                                  end;
   end;
Simule_Sn:=z;
end;
```

EXERCICE 3

1. • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{(k+1)-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

• Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0,a_1,\ldots,a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tel que $R=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}a_k\,X^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{r}a_k\,t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour tout élément R de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

• Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$P\,Q$ appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (PQ)(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge !

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P,Q) \text{ d'éléments de } \mathbb{R}_n[X] : \text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *en montrant que* $\left|P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *par croissance comparée.*

Remarque *Montrons que* $< .,. >$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

• *Soit* (P, Q) *un couple d'éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *converge ! Ainsi* $< P, Q >$ *existe.*

$< .,. >$ *est une application de* $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ *dans* $\mathbb{R}$.

• *Soit* λ *un réel et soient* P, Q, R *trois éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$.

$< \lambda\,P + Q, R >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P + Q\big)(t)\,R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P(t)\,R(t) + Q(t)\,R(t)\big)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$< \lambda\,P + Q, R >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P(t)\,R(t)\,e^{-t} + Q(t)\,R(t)\,e^{-t}\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)\,R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)\,R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\,P + Q, R >= \lambda\ < P, R > + < Q, R >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q, R) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^3,\ < \lambda\,P + Q, R >= \lambda\ < P, R > + < Q, R >$. $< .,. >$ *est linéaire à gauche.*

• *Soit* (P, Q) *un couple d'éléments de* $\mathbb{R}_n[X]$. $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)\,P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t =< Q, P >.$

$\forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^2,\ < P, Q >=< Q, P >$. $< .,. >$ *est symétrique.*

• *Soit* P *un élément de* $\mathbb{R}_n[X]$. $\forall t \in \mathbb{R},\ \big(P(t)\big)^2\,e^{-t} \geqslant 0$ *et* $0 \leqslant +\infty$ *! donc* $< P, P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ < P, P > \geqslant 0$. $< .,. >$ *est positive.*

• *Soit* P *un élément de* $\mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $< P, P >= 0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0.$

▼ $t \to \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}$ *est positive sur* $[0, +\infty[$.

▼ $t \to \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

▼ $0 \neq +\infty$ *!*

Alors $t \to \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}$ *est nulle sur* $[0, +\infty[$. *Comme* $t \to e^{-t}$ *ne s'annule pas sur* $[0, +\infty[: \forall t \in [0, +\infty[,\ \big(P(t)\big)^2 = 0$.

Ainsi $\forall t \in [0, +\infty[,\ P(t) = 0$. P *admet alors une infinité de zéros donc* $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ < P, P > \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. $< .,. >$ *est définie.*

Les cinq points précédents permettent de dire que $< .,. >$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **(a)** Soit (P,Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons que P' et Q' sont encore des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$< P', Q > + < P, Q' >= \int_0^{+\infty} P'(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} P(t)\,Q'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(P'(t)\,Q(t) + P(t)\,Q'(t)\big)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

$$< P', Q > + < P, Q' >= \int_0^{+\infty} (P\,Q)'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Intégrons alors par parties. Soit A dans $\mathbb{R}_+$. PQ et $t \to e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors :

$$\int_0^A (P\,Q)'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[(P\,Q)(t)\,e^{-t}\Big]_0^A - \int_0^A (P\,Q)(t)\,(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = (P\,Q)(A)\,e^{-A} - P(0)\,Q(0) + \int_0^A (P\,Q)(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que $\lim\limits_{A\to+\infty} \big((P\,Q)(A)\,e^{-A}\big) = 0$. C'est clair si $P\,Q$ est le polynôme nul.

Supposons maintenant que $P\,Q$ n'est pas le polynôme nul, notons r son degré et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré.

Alors $(P\,Q)(A)\,e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\sim} a_r\,A^r\,e^{-A}$. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \big((P\,Q)(A)\,e^{-A}\big) = \lim\limits_{A\to+\infty} \big(a_r\,A^r\,e^{-A}\big) = 0$ par croissance comparée.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité $\displaystyle\int_0^A (P\,Q)'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = (P\,Q)(A)\,e^{-A} - P(0)\,Q(0) + \int_0^A (P\,Q)(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$

il vient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (P\,Q)'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = -P(0)\,Q(0) + \int_0^{+\infty} (P\,Q)(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle < P', Q > + < P, Q' >= \int_0^{+\infty} (P\,Q)'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = -P(0)\,Q(0) + \int_0^{+\infty} (P\,Q)(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t =< P, Q > -P(0)\,Q(0).$

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$: $< P', Q > + < P, Q' >=< P, Q > -P(0)\,Q(0).$

(b) Soit P un polynôme non constant orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur.

$\deg P' < \deg P$ donc $< P', P >=< P, P' >= 0$. Alors (a) donne : $< P, P > -P(0)\,P(0) = 0$ ou $\|P\|^2 = \big(P(0)\big)^2$.

Comme $\|P\|$ est un réel positif : $\|P\| = |P(0)|$

Si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

3. **(a)** Nous allons d'abord montrer que pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ sont des bases orthonormées ou orthonormales de $\mathbb{R}_k[X]$. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$.

$\forall i \in [\![0,k]\!], \deg L_i = i$. Alors $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_k[X]$ de degrés échelonnés.

$(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est alors une famille libre (normal pour une famille orthonormée...) de cardinal $k+1$ de $\mathbb{R}_k[X]$ qui est de dimension $k+1$.

Donc $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$. C'est même une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

De même $(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

• $L_0 = 1 = M_0$.

• Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Montrons que $L_k = M_k$.

L_k est orthogonal à tous les éléments de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_{k-1})$ de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc L_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. De même M_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Version 1 L'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$ est une droite vectorielle D_k car $\dim \mathbb{R}_k[X] = k+1$ et $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_k[X]$ de dimension k

D_k contient L_k et M_k. L_k et M_k étant non nuls ils engendrent D_k.

Alors il existe un réel λ (non nul) tel que $L_k = \lambda\, M_k$. Or $L_k(0) = 1 = M_k(0)$ donc $\lambda = 1$ et ainsi $L_k = M_k$.

Version 2 L_k et M_k sont orthogonaux à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc $L_k - M_k$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Supposons $L_k - M_k$ non constant ; alors $1 \leqslant \deg(L_k - M_k) \leqslant k$. Dans ces conditions $L_k - M_k$ est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur puisqu'il est orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors d'après **2. (b)**, $\|L_k - M_k\| = |\big(L_k - M_k\big)(0)| = |L_k(0) - M_k(0)| = |1 - 1| = 0$.

Donc $L_k - M_k$ est nul ce qui contredit le fait que ce n'est pas un polynôme constant.

Finalement $L_k - M_k$ est constant ! Comme il est nul en 0 c'est le polynôme nul. On retrouve $L_k = M_k$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ L_k = M_k.}$$

(b) i. Rappelons que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est l'unique base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$:

$\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^k) = \mathbb{R}_k[X]$ et $< P_k, X^k >> 0$.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une famille orthonormée donc libre de $\mathbb{R}_k[X]$ qui a pour cardinal $k+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_k[X]$. Donc $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

• $\mathrm{Vect}(P_0) = \mathrm{Vect}(1)$. Alors P_0 est constant et non nul. Donc $P_0(0)$ n'est pas nul.

• Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. $\deg P_k \leqslant k$ car P_k appartient à $\mathbb{R}_k[X]$.

Si $\deg P_k < k$ alors $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une famille libre de cardinal $k+1$ de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui est de dimension k !! Donc $\deg P_k = k$.

P_k est orthogonal à tous les éléments de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{k-1})$ qui engendre $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Donc P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

P_k est alors un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$ (!) orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur.

D'après **2. (b)** : $|P_k(0)| = \|P_k\|$. Or $\|P_k\|$ n'est pas nulle car P_k n'est pas nul. Donc $P_k(0) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ P_k(0) \neq 0.}$$

Remarque *Nous venons de voir que* $\forall k \in [\![1,n]\!],\ |P_k(0)| = \|P_k\|$. *Montrons que ceci vaut encore pour* $k = 0$.

$P_0 = 1$ *et* $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1^2 \times e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1) = 1$. *Donc* $\|P_0\| = 1 = |1| = |P_0(0)|$.

Retenons donc que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ |P_k(0)| = \|P_k\|$.

ii. Posons alors $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k = \dfrac{1}{P_k(0)}\, P_k$.

- P_0 engendre $\mathbb{R}_0[X]$ donc P_0 est constant. Alors $P_0 = P_0(0)$ et ainsi $L_0 = 1$.
- $\deg L_0 = 0$.

Nous avons vu plus haut que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $\deg P_k = k$. Alors pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $\deg L_k = k$.

Finalement $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \deg L_k = k$.

- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_k(0) = \dfrac{1}{L_k(0)}\, L_k(0) = 1$.
- Soient i et j deux éléments de $[\![0,n]\!]$. $L_i = \dfrac{1}{P_i(0)}\, P_i$ et $L_j = \dfrac{1}{P_j(0)}\, P_j$ donc $< L_i, L_j >= \dfrac{1}{P_i(0)}\, \dfrac{1}{P_j(0)}\ < P_i, P_j >$.

Si $i \neq j$, $< P_i, P_j >= 0$ donc $< L_i, L_j >= 0$. Supposons $i = j$.

$< L_i, L_j >=< L_i, L_i >= \dfrac{1}{P_i(0)}\,\dfrac{1}{P_i(0)}\; < P_i, P_i >= \dfrac{1}{\big(P_i(0)\big)^2}\|P_i\|^2$. Or $|P_i(0)| = \|P_i\|$ donc $\big(P_i(0)\big)^2 = \|P_i\|^2$.

Ceci donne $< L_i, L_j >=< L_i, L_i >= \dfrac{1}{\big(P_i(0)\big)^2}\|P_i\|^2 = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ < L_i, L_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

$(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

Alors $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. Ceci achève de montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifie $(\mathcal{R})$.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_n) = \left(\frac{1}{P_0(0)}\,P_0, \frac{1}{P_1(0)}\,P_1, \ldots, \frac{1}{P_n(0)}\,P_n\right) \text{ est une famille qui vérifie } (\mathcal{R}).}$$

(c) (a) et (b) montrent que :

$$\boxed{\text{il existe une famille } (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ de polynômes et une seule vérifiant } (\mathcal{R}).}$$

Rappelons avant de déterminer L_1 et L_2 que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = (n-1)!$.

• L_1 est de degré 1 et $L_1(0) = 1$ donc il existe un réel non nul a tel que $L_1 = a\,X + 1$.

$L_0 = 1$ et L_1 est orthogonal à L_0.

Donc $0 =< L_0, L_1 >= \displaystyle\int_0^{+\infty} L_0(t)\, L_1(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (a\,t + 1)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = a \int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + a \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

$0 = a\,\Gamma(2) + \Gamma(1) = a \times 1 + 1$. Alors $a = -1$ et $L_1 = -X + 1$.

• L_2 est de degré 2 et $L_2(0) = 1$ donc il existe un réel non nul b et un réel c tels que $L_2 = b\,X^2 + c\,X + 1$.

Notons que $L_2 = b\,X^2 - c\,(-X+1) + c + 1 = X^2 - c\,L_1 + (c+1)\,L_0$ et que L_2 est orthogonal à L_0 et L_1. De plus (L_0, L_1) est une famille orthonormée.

Alors $0 =< L_2, L_0 >= b\ < X^2, L_0 > -c < L_1, L_0 > +(c+1)\ < L_0, L_0 >= b\ < X^2, L_0 > -c \times 0 + (c+1) \times 1$.

Donc $0 = b\ < X^2, L_0 > +c + 1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + c + 1 = b\,\Gamma(3) + c + 1 = 2b + c + 1$. Ainsi $2b + c = -1$.

De même $0 =< L_2, L_1 >= b\ < X^2, L_1 > -c < L_1, L_1 > +(c+1)\ < L_1, L_0 >= b\ < X^2, L_1 > -c \times 1 + (c+1) \times 0 = b\ < X^2, L_1 > -c$.

$0 = b \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,(-t+1)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t - c = -b \int_0^{+\infty} t^3\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + b \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t - c = -b\,\Gamma(4) + b\,\Gamma(3) - c = -6b + 2b - c$.

$c = -4b$ et $2b + c = -1$. Alors $-1 = 2b - 4b = -2b$. $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = -2$. Ainsi $L_2 = \dfrac{1}{2}\,X^2 - 2\,X + 1$.

$$\boxed{L_1 = -X + 1 \text{ et } L_2 = \frac{1}{2}\,X^2 - 2\,X + 1.}$$

PROBLÈME

Partie 1.

1) (a) • $x \to -e^{-x}$ et $x \to e^{x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \to e^{-e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$x \to e^{-x}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, par produit g est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\, e^{-e^{-x}}$ donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

• Soit A un réel. $\displaystyle\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A e^{-t}\, e^{-e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \Big[e^{-e^{-t}}\Big]_0^A = e^{-e^{-A}} - e^{-1}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = e^{-e^{-A}} - e^{-1}$ et $\displaystyle\int_A^0 g(t)\,\mathrm{d}t = e^{-1} - e^{-e^{-A}}$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \left(-e^{-A}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \left(-e^{-A}\right) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-e^{-A}} = 1$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} e^{-e^{-A}} = 0$. Alors :

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(e^{-e^{-A}} - e^{-1}\right) = 1 - e^{-1}$ et $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\left(\int_A^0 g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{A\to-\infty}\left(e^{-1} - e^{-e^{-A}}\right) = e^{-1}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement $1 - e^{-1}$ et e^{-1}.

On peut alors dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $1 - e^{-1} + e^{-1}$ donc 1. Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$$

(b) Soit x dans $\mathbb{R}$. $\displaystyle F_G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après ce qui précède $F_G(x) = e^{-1} + \left(e^{-e^{-x}} - e^{-1}\right) = e^{-e^{-x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_G(x) = e^{-e^{-x}}.}$$

2) (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons F_{M_n} la fonction de répartition de M_n.

X_1, X_2, ..., X_n prennent leurs valeurs dans $[0, +\infty[$ donc M_n prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{M_n}(x) = 0$.

Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $F_{M_n}(x) = P\big(\operatorname{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x\big) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

X_1, X_2, ..., X_n étant indépendantes, $\displaystyle F_{M_n}(x) = P(X_1 \leqslant x)\, P(X_2 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leqslant x)$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$ X_k suit la loi exponentielle de paramètre λ, donc pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $P(X_k \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Ceci donne : $\displaystyle F_{M_n}(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit F_{U_n} la fonction de répartition de $U_n = \lambda\, M_n - \ln n$.

M_n prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ donc U_n prend ses valeurs dans $[-\ln n, +\infty[$ car λ est strictement positif.

Ainsi $\forall x \in]-\infty, -\ln n[,\ F_{U_n}(x) = 0$. Soit x un élément de $[-\ln n, +\infty[$.

$F_{U_n}(x) = P(U_n \leqslant x) = P(\lambda\, M_n - \ln n \leqslant x) = P\left(M_n \leqslant \dfrac{x + \ln n}{\lambda}\right)$ car λ est strictement positif.

x est dans $[\ln n, +\infty[$ donc $\dfrac{x+\ln n}{\lambda} \in [0, +\infty[$. Alors $F_{U_n}(x) = F_{M_n}\left(\dfrac{x+\ln n}{\lambda}\right) = \left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right)}\right)^n$.

$F_{U_n}(x) = \left(1 - e^{-x}\, e^{-\ln n}\right)^n = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{U_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \in [-\ln n, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Fixons x dans $\mathbb{R}$ et cherchons $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{U_n}(x)$.

Remarque *La difficulté ici est de choisir "la bonne expression" de $F_{U_n}(x)$ pour en trouver sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.*

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\ln n) = -\infty$. Donc pour n assez grand $-\ln n \leqslant x$ et ainsi $F_{U_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$.

Il convient donc de trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\,\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)}$ (écriture qui exige $1 - \dfrac{e^{-x}}{n} > 0$...).

Les idées étant claires mettons en forme le tout en se souvenant bien que x est fixé.

$x \in [-\ln n, +\infty[\iff -\ln n \leqslant x \iff \ln n \geqslant -x \iff n \geqslant e^{-x}$. Posons alors $n_0 = \mathrm{Ent}\,(e^{-x}) + 1$. $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. $n \geqslant n_0 = \mathrm{Ent}\,(e^{-x}) + 1 > e^{-x}$. $n > e^{-x}$. Donc $-\ln n < x$ et $e^{-x} < n$.

Ce qui permet de dire que $x \in [-\ln n, +\infty[$ et que $1 - \dfrac{e^{-x}}{n} > 0$. Alors $F_{U_n}(x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)}$.

Finalement $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ F_{U_n}(x) = e^{n\,\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{e^{-x}}{n}\right) = 0$ donc $n\,\ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$. Ceci donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\,\ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)\right) = -e^{-x}$.

Par continuité de la fonction exponentielle en $-e^{-x}$ il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\,\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)} = e^{-e^{-x}} = F_G(x)$.

Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = F_G(x)$. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers la variable aléatoire } G \text{ de densité } g.}$$

Partie 2.

Nous ne dirons pas que φ est la densité de X_1 ! Nous poserons, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ et nous dirons que φ est **UNE** densité de X_1. Nous pouvons aussi dire que φ est la densité de X_1 continue sur $\mathbb{R}$...

► Dans les questions 2 et 7 il faut remplacer dans le texte ϕ par φ si cela n'a pas déjà été fait.

1. (a) Faisons le tout en un ! Soit x un réel strictement positif.

$P(X_1 > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{t}\right)\,(-t\,\varphi(t))\,\mathrm{d}t.$

Notons alors que $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\,e^{\frac{-t^2}{2}}\right) = -t\,\varphi(t)$. Donc $P(X_1 > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Une intégration par parties s'impose. Soit A un élément de $[x, +\infty[$. $u : t \to -\dfrac{1}{t}$ et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

De plus $\forall t \in]0, +\infty[,\ u'(t) = \dfrac{1}{t^2}\cdot$ Alors :

$\displaystyle\int_x^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^A \left(-\frac{1}{t}\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(-\frac{1}{t}\right)\varphi(t)\right]_x^A - \int_x^A \left(\frac{1}{t^2}\,\varphi(t)\right)\mathrm{d}t = \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{1}{A}\,\varphi(A) - \int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{A}\,\varphi(A)\right) = 0$ (car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\varphi(A) = 0$) et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $P(X_1 > x)$.

Ceci et l'égalité précédente suffisent pour dire que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $P(X_1 > x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Pour tout réel x strictement positif l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour tout réel x strictement positif $P(X_1 > x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

(b) Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in [x, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $\varphi(t) \geqslant 0$ donc $\forall t \in [x, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\varphi(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\,\varphi(t)$. En intégrant il vient :

$0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ car les deux intégrales convergent (et $x \leqslant +\infty$!).

Notons que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = P(X_1 > x)$.

Alors $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{P(X_1 > x)}{x^2}$ ou $0 \geqslant -\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{P(X_1 > x)}{x^2}\cdot$ En ajoutant $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ on obtient :

$\dfrac{\varphi(x)}{x} \geqslant \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{P(X_1 > x)}{x^2}$ ou $\dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}\cdot$

Or nous avons montré dans (a) que $P(X_1 > x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Alors $\dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} \leqslant P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}\cdot$

Pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} \leqslant P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}\cdot$

Reprenons x dans $]0, +\infty[$. Nous venons de voir que $\dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} \leqslant P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$, alors :

$P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$ et $\dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x) + \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} = P(X_1 > x)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi :

$P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right).$

Pour tout réel x strictement positif, $P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right).$

2. Posons : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}\cdot$ Rappelons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$.

• $x \to \dfrac{1}{x}$ et φ sont continues sur $]0,+\infty[$ donc par produit ψ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $x \to \dfrac{1}{x}$ et φ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc par produit ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \psi'(x) = \dfrac{x\,\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \dfrac{-x^2\,\varphi(x) - \varphi(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}\,\varphi(x)\,(x^2+1)$ (car $\varphi'(x) = -x\,\varphi(x)$).

Comme φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ψ' est strictement négative sur $]0,+\infty[$.

Alors ψ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

• $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 \times 0 = 0.$

Les trois points précédents et le théorème de la bijection permettent de dire que ψ définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Soit c un réel strictement positif. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\dfrac{c}{n}$ appartient à $]0,+\infty[$ donc possède un antécédent et un seul par ψ dans $]0,+\infty[$.

Donc l'équation $\psi(x) = \dfrac{c}{n}$ ou $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{c}{n}$ admet une solution et une seule dans $]0,+\infty[$ que nous noterons x_n.

Remarquons que $x_n = \psi^{-1}\left(\dfrac{c}{n}\right)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } c \text{ strictement positif, pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*\text{, l'équation } \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n} \text{ admet une solution et une seule dans }]0,+\infty[\text{ que nous noterons } x_n.\ x_n = \psi^{-1}\left(\frac{c}{n}\right) \text{ où } \psi \text{ est définie sur }]0,+\infty[\text{ par } \forall x \in]0,+\infty[,\ \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}\cdot}$$

3. ψ définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, ψ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi^{-1}(x) = +\infty$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{c}{n} \in]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n} = 0$. La caractérisation séquentielle de la notion de limite permet alors de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \psi^{-1}\left(\frac{c}{n}\right) = +\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$$

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\dfrac{c}{n} = \dfrac{\varphi(x_n)}{x_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_n^2}{2}}\,\dfrac{1}{x_n}\cdot$ Alors $e^{-\frac{x_n^2}{2}} = x_n \times \dfrac{1}{n} \times c\sqrt{2\pi}$. Donc :

$-\dfrac{x_n^2}{2} = \ln\left(e^{-\frac{x_n^2}{2}}\right) = \ln\left(x_n \times \dfrac{1}{n} \times c\sqrt{2\pi}\right) = \ln x_n - \ln n + \ln\left(c\sqrt{2\pi}\right)$. En multipliant par -2 il vient :

$x_n^2 = -2\,\ln x_n + 2\,\ln n - 2\,\ln\left(c\sqrt{2\pi}\right) = -2\,\ln x_n + 2\,\ln n - \ln\left(c^2(2\pi)\right) = -2\,\ln x_n + 2\,\ln n - \ln\left(2\,c^2\,\pi\right)$.

Alors $x_n^2 + 2\,\ln x_n = 2\,\ln n - \ln\left(2\,c^2\,\pi\right)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ x_n^2 + 2\,\ln x_n = 2\,\ln n - \ln\left(2\,c^2\,\pi\right).}$$

5. • $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{x_n^2+2\,\ln x_n}{x_n^2}=1+\dfrac{\ln x_n^2}{x_n^2}\cdot$

Or, par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{x^2}=0$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln x_n^2}{x_n^2}=0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2+2\,\ln x_n}{x_n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x_n^2}{x_n^2}\right)=1$ et ainsi $x_n^2+2\,\ln x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}x_n^2$.

• $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2\,\ln n-\ln(2\,c^2\,\pi)}{2\,\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(2\,c^2\,\pi)}{2\,\ln n}\right)=1-0=1$ donc $2\,\ln n-\ln(2\,c^2\,\pi)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\,\ln n$. Alors :

Plus de doute : $x_n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}x_n^2+2\,\ln x_n=2\,\ln n-\ln\left(2\,c^2\,\pi\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\,\ln n$ donc $x_n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}2\,\ln n$.

Cela donne encore $|x_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\,\ln n}$, puis $x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\,\ln n}$ car pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $x_n>0$.

$$\boxed{x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\,\ln n}.}$$

Posons $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon_1(n)=x_n-\sqrt{2\,\ln n}$. $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ x_n=\sqrt{2\,\ln n}+\varepsilon_1(n)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-\sqrt{2\,\ln n}}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{\sqrt{2\,\ln n}}-1\right)=1-1=0.$$

$$\boxed{\text{On peut écrire pour } n\geqslant 2,\ x_n=\sqrt{2\,\ln n}+\varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}=0\ .}$$

Traduisons !

$$\boxed{\text{Il existe une suite } (\varepsilon_1(n))_{n\geqslant 2} \text{ de réels telle que } \forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ x_n=\sqrt{2\,\ln n}+\varepsilon_1(n) \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}=0.}$$

En clair : $\boxed{x_n=\sqrt{2\,\ln n}+\mathrm{o}\left(\sqrt{2\,\ln n}\right)\text{ au voisinage de }+\infty.}$

6. (a) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $x_n^2+2\,\ln x_n=2\,\ln n-\ln(2\,c^2\,\pi)$ et $x_n=\sqrt{2\,\ln n}+\varepsilon_1(n)$.

$x_n^2+2\,\ln x_n=\left(\sqrt{2\,\ln n}+\varepsilon_1(n)\right)^2+2\,\ln\left(\sqrt{2\,\ln n}+\varepsilon_1(n)\right)$.

$x_n^2+2\,\ln x_n=2\,\ln n+2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+2\,\ln\left(\sqrt{2\,\ln n}\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)\right)$.

$x_n^2+2\,\ln x_n-2\,\ln n=2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+2\,\ln\sqrt{2\,\ln n}+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)$.

$x_n^2+2\,\ln x_n-2\,\ln n=2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+\ln\left(2\,\ln n\right)+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)$. Alors :

$2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+\ln\left(2\,\ln n\right)+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)=x_n^2+2\,\ln x_n-2\,\ln n=-\ln(2\,c^2\,\pi)$. Ainsi :

$2\sqrt{2\,\ln n}\,\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)=-\ln\left(2\,\ln n\right)-\ln(2\,c^2\,\pi)=-\ln\left(\ln n\right)-\ln 2-\ln(2\,c^2\,\pi)$. Finalement :

$2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)=-\ln\left(\ln n\right)-\ln(4\,\pi\,c^2)$.

$$\boxed{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ 2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\left(\varepsilon_1(n)\right)^2+2\,\ln\left(1+\tfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)=-\ln\left(\ln n\right)-\ln(4\,\pi\,c^2).}$$

(b) • Montrons que $2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\big(\varepsilon_1(n)\big)^2+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)$.

Pour cela nous allons ruser un peu pour éviter de diviser par $2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)$...

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \big(\varepsilon_1(n)\big)^2=\varepsilon_1(n)\sqrt{2\,\ln n}\;\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}=0$. Alors $\big(\varepsilon_1(n)\big)^2\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\Big(\varepsilon_1(n)\sqrt{2\,\ln n}\Big)$.

Ceci donne également $\big(\varepsilon_1(n)\big)^2\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\Big(2\,\varepsilon_1(n)\sqrt{2\,\ln n}\Big)$ (1).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}=0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}$ (2).

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}=2\sqrt{2\,\ln n}\,\varepsilon_1(n)\times\dfrac{1}{2\,(2\,\ln n)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\,(2\,\ln n)}=0$.

Ainsi $\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\big(2\sqrt{2\,\ln n}\,\varepsilon_1(n)\big)$ (3).

(2) et (3) permettent de dire que : $\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\big(2\sqrt{2\,\ln n}\,\varepsilon_1(n)\big)$ (4).

(1) et (4) donnent $\big(\varepsilon_1(n)\big)^2+\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\big(2\sqrt{2\,\ln n}\,\varepsilon_1(n)\big)$.

Ainsi $2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)+\big(\varepsilon_1(n)\big)^2+2\,\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\,\ln n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{2\,\ln n}\;\varepsilon_1(n)=2\,\varepsilon_1(n)\sqrt{2\,\ln n}$ (5).

• $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(-\ln(\ln n)\big)=+\infty$ donc $-\ln(4\pi\,c^2)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\big(-\ln(\ln n)\big)$.

Ainsi $-\ln(\ln n)-\ln(4\pi\,c^2)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\ln(\ln n)$ (6).

(5), (6) et l'égalité de (a) donnent :

$$\boxed{2\,\varepsilon_1(n)\sqrt{2\,\ln n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\ln(\ln n).}$$

Posons $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon_2(n)=\varepsilon_1(n)+\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}\cdot$ Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon_1(n)=-\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}+\varepsilon_2(n)$!

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon_2(n)\,\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}=\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}\,\varepsilon_1(n)+1$.

$\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}\,\varepsilon_1(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{-\ln(\ln n)}{\ln(\ln n)}=-1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}\,\varepsilon_1(n)\right)=-1$.

Ceci donne encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\varepsilon_2(n)\,\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}\right)=-1+1=0$.

Ainsi $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon_1(n)=-\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}+\varepsilon_2(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\varepsilon_2(n)\,\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}\right)=0$.

$$\boxed{\text{Il existe une suite }\big(\varepsilon_2(n)\big)_{n\geqslant 2}\text{ telle que }\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \varepsilon_1(n)=-\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}+\varepsilon_2(n)\text{ et }\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\varepsilon_2(n)\,\dfrac{2\sqrt{2\,\ln n}}{\ln(\ln n)}\right)=0.}$$

Notons qu'ainsi $\varepsilon_1(n)\underset{n\to+\infty}{=}-\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}\right)$. Alors :

$$\boxed{x_n\underset{n\to+\infty}{=}\sqrt{2\,\ln n}-\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}}\right).}$$

7. Soit x dans $\mathbb{R}$. Posons $c = e^{-x}$. c est strictement positif.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, x_n est (toujours) l'unique élément de $]0, +\infty[$ tel que $\dfrac{\varphi(x_n)}{x_n} = \dfrac{c}{n}\cdot$

Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\varphi(x_n)}{x_n} = \dfrac{e^{-x}}{n}\cdot$

(a) Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. D'après le texte $x_n = \sqrt{2\,\ln n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}} - \dfrac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\,\ln n}} - \dfrac{\ln c}{\sqrt{2\,\ln n}} + \varepsilon(n)$. Alors :

$x_n - \varepsilon(n) = \sqrt{2\,\ln n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\,\ln n}} - \dfrac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\,\ln n}} - \dfrac{\ln c}{\sqrt{2\,\ln n}} = b_n + a_n\,(-\ln c) = b_n + a_n\,(-\ln e^{-x}) = a_n\,x + b_n.$

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ a_n\,x + b_n = x_n - \varepsilon(n).}$$

(b) Montrons que $\dfrac{\varphi(a_n\,x + b_n)}{a_n\,x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{n}\cdot$ Cela revient à montrer que $\dfrac{\varphi(a_n\,x + b_n)}{a_n\,x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x_n)}{x_n}\cdot$

Pour cela nous allons montrer que $\varphi(a_n\,x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(x_n)$ et que $a_n\,x + b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

- Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. Rappelons que $a_n\,x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$.

$\varphi(a_n\,x + b_n) = \varphi(x_n - \varepsilon(n)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(x_n - \varepsilon(n)\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(x_n^2 - 2\,x_n\,\varepsilon(n) + (\varepsilon(n))^2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_n^2}{2}}\, e^{x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2}.$

Donc $\varphi(a_n\,x + b_n) = \varphi(x_n)\, e^{x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2}$.

Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2} = 1$ et ainsi nous aurons $\varphi(a_n\,x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(x_n)$ non ?

Pour cela il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2\right) = 0$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ x_n\,\varepsilon(n) = \dfrac{x_n}{\sqrt{2\,\ln n}}\,\varepsilon(n)\,\sqrt{2\,\ln n}$. Rappelons alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,\ln n}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\varepsilon(n)\,\sqrt{2\,\ln n}\right) = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(x_n\,\varepsilon(n)\big) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{\sqrt{2\,\ln n}}\,\varepsilon(n)\,\sqrt{2\,\ln n}\right) = 1 \times 0 = 0$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(x_n\,\varepsilon(n)\big) = 0$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\varepsilon(n)\,\sqrt{2\,\ln n}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\,\ln n}}\right) = 0$. Par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(\varepsilon(n)\big)^2 = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2\right) = 0 - \frac{1}{2} \times 0 = 0$. Finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2} = 1$.

On a donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \varphi(a_n\,x + b_n) = \varphi(x_n)\, e^{x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{x_n\,\varepsilon(n) - \frac{1}{2}\,(\varepsilon(n))^2} = 1$.

Ceci permet de dire que $\varphi(a_n\,x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(x_n)$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ donc $\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x_n)$ et ainsi $x_n - \varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$. Donc $a_n\,x + b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

Par quotient d'équivalents : $\dfrac{\varphi(a_n\,x + b_n)}{a_n\,x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x_n)}{x_n} = \dfrac{c}{n} = \dfrac{e^{-x}}{n}\cdot$

$$\boxed{\frac{\varphi(a_n\,x + b_n)}{a_n\,x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}\cdot}$$

(c) D'après **1. (b)**, $\forall x \in]0, +\infty[,\ P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\cdot$

Alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\,\dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}\cdot$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (a_n\,x + b_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n - \varepsilon(n)) = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Alors il existe un élément n_1 de $[\![2,+\infty[\![$ tel que $\forall n \in [\![n_1,+\infty[\![,\ a_n\,x+b_n>0$.

Dans ces conditions, $\forall n \in [\![n_1,+\infty[\![,\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{(a_n\,x+b_n)^2}}\,\dfrac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n} \leqslant P(X_1>a_n\,x+b_n) \leqslant \dfrac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n}\cdot$

Pour tout n dans $[\![n_1,+\infty[\![$, $a_n\,x+b_n>0$ et $\varphi(a_n\,x+b_n)>0$ donc $\dfrac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n}>0$.

Alors pour tout n dans $[\![n_1,+\infty[\![$, $\dfrac{1}{1+\frac{1}{(a_n\,x+b_n)^2}} \leqslant \dfrac{P(X_1>a_n\,x+b_n)}{\frac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n}} \leqslant 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\,x+b_n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{(a_n\,x+b_n)^2}}\right)=\dfrac{1}{1+0}=1$.

Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{P(X_1>a_n\,x+b_n)}{\frac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n}}=1$. Ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X_1>a_n\,x+b_n).}$$

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Notons F_n la fonction de répartition de $\dfrac{M_n-b_n}{a_n}\cdot$ Soit x un réel.

$F_n(x)=P\left(\dfrac{M_n-b_n}{a_n}\leqslant x\right)=P(M_n\leqslant a_n\,x+b_n)=P\big(\mathrm{Sup}(X_1,X_2,\dots,X_n)\leqslant a_n\,x+b_n\big)$.

$F_n(x)=P\big(\{X_1\leqslant a_n\,x+b_n\}\cap\{X_2\leqslant a_n\,x+b_n\}\cap\ldots\cap\{X_n\leqslant a_n\,x+b_n\}\big)$. Par indépendance on obtient :

$F_n(x)=P(X_1\leqslant a_n\,x+b_n)\,P(X_2\leqslant a_n\,x+b_n)\ \ldots P(X_n\leqslant a_n\,x+b_n)$. Or X_1, X_2, ..., X_n ont même loi donc :

$F_n(x)=\Big(P(X_1\leqslant a_n\,x+b_n)\Big)^n=\Big(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\Big)^n$.

X_1 suit une loi normale donc $\forall z\in\mathbb{R},\ P(X_1\leqslant z)\in]0,1[$ alors $\forall z\in\mathbb{R},\ 1-P(X_1>z)>0$. Ce qui permet d'écrire :

$F_n(x)=\Big(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\Big)^n=e^{n\,\ln\left(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\right)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\,x+b_n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{X_1}(a_n\,x+b_n)=1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_1>a_n\,x+b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\big(1-F_{X_1}(a_n\,x+b_n)\big)=0$.

Donc $n\,\ln\big(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\big)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\,\big(-P\big(X_1>a_n\,x+b_n\big)\big)=-n\,P(X_1>a_n\,x+b_n)$.

$n\,\ln\big(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\big)\underset{n\to+\infty}{\sim}-n\,P(X_1>a_n\,x+b_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-n\,\dfrac{\varphi(a_n\,x+b_n)}{a_n\,x+b_n}=-n\,\dfrac{e^{-x}}{n}=-e^{-x}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(n\,\ln\big(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\big)\Big)=-e^{-x}$. Par continuité de la fonction exponentielle en $-e^{-x}$ il vient :

$\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\,\ln\left(1-P(X_1>a_n\,x+b_n)\right)}=e^{-e^{-x}}=G(x)$ et ceci pour tout réel x. Alors :

$$\boxed{\text{la suite }\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\right)_{n\geqslant1}\text{ converge en loi vers la variable aléatoire } G.}$$
