Option S

Corrigé
EDHEC 2010

Exercice 1 ....

1) La fonction f est le produit d'une fonction polynomiale par une somme de fonctions rationnelles bien définies sur U donc f est de classe C^2 sur U.

2) Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_i^{\,2}}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$.

Les points critiques de f sont les points en lesquels le gradient de f est nul, c'est-à-dire les points $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ solutions de :

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i^{\,2}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = 0.$

On en déduit : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_i^{\,2} = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}$ $\qquad$ (S)

Comme les a_i sont positifs, on a :

$$(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_i = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}}\,.$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$, pour tout i élément de $\{2, 3, \ldots, n\}$, on trouve : $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{2, \ldots, n\},\ a_i = a_1$ et $a_1 = \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}}\,.$

En remplaçant dans la dernière équation tous les a_i par a_1, on obtient : $a_1 = a_1$.

Pour terminer : $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{2, \ldots, n\},\ a_i = a_1$.

$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont les } n\text{-uplets } (a, \ldots, a) \text{ avec } a \in \,]0, +\infty[}$

3) a) Les dérivées secondes de f sont :

• Pour $j \neq i$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ldots,x_n) = -\dfrac{1}{x_j^{\,2}} - \dfrac{1}{x_i^{\,2}}$.

• $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(x_1,\ldots,x_n) = -\dfrac{1}{x_i^{\,2}} + \dfrac{2}{x_i^{\,3}}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j - \dfrac{1}{x_i^{\,2}} = 2\,\dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j - x_i}{x_i^{\,3}}$.

b) En les points critiques $(a, \ldots, a)$, on obtient :

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a,\ldots,a) = -\dfrac{2}{a^2}$.

$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, j \neq i$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(a,\ldots,a) = \dfrac{2(n-1)}{a^2}$.

Par définition, la hessienne de f en $(a, \ldots, a)$ est la matrice H_n dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a, \ldots, a)$, on a donc :

$$H_n = \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & \ddots & (-1) & \\ & (-1) & \ddots & \\ & & & n-1 \end{pmatrix} = \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} n & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} - \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & \ddots & (1) & \vdots \\ & (1) & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci confirme bien que :

$$\boxed{H_n = \frac{2}{a^2} K_n, \text{ avec } K_n = n\, I_n - J_n}$$

4) a) Les colonnes de J_n sont toutes égales et non nulles donc $\mathrm{rg}(J_n) = 1$. Ceci prouve que J_n n'est pas inversible (car J_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $n \geq 2$), c'est-à-dire que 0 est valeur propre de J_n, associée à un sous-espace propre qui est de dimension $n-1$ (grâce à la formule du rang). En effet, en considérant J_n comme la matrice d'un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}^n$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{rg}(\varphi_n) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(\varphi_n) = n-1$, puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

b) $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) L'égalité écrite ci-dessus montre que n est valeur propre de J_n associée à un sous-espace propre de dimension au moins égale à 1.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de J_n ne peut pas excéder n, on est certain que :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n}$$

Remarque : on pouvait obtenir ceci grâce au polynôme $X^2 - nX$ qui annule J_n.

Pour finir, la matrice J_n étant diagonalisable (symétrique réelle), il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D_n = \mathrm{diag}(0, ..., 0, n)$ telle que :

$$J_n = P\,D_n\,P^{-1}.$$

Comme $K_n = n\,I_n - J_n$, on peut alors écrire :
$K_n = n\,P\,I_n\,P^{-1} - P\,D_n\,P^{-1} = P\,(n\,I_n - D_n)\,P^{-1}$.
Les éléments diagonaux de la matrice diagonale $nI_n - D_n$ sont donc les valeurs propres de K_n, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } K_n \text{ sont } n \text{ et } 0}$$

d) Les valeurs propres de H_n sont donc 0 et $\dfrac{2}{a^2}n$ qui sont toutes les deux positives, mais pas strictement positives : on est donc dans le cas où l'on ne peut pas conclure à l'existence ou non d'un extremum local en l'un des points critiques.

5) a) $(x_1 + x_2)^2 - 4\,x_1\,x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1\,x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.
On a donc :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 + x_2)^2 \geq 4\,x_1\,x_2}$$

b) On a $f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}) = \dfrac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2}$.

Comme x_1 et x_2 appartiennent à $]0, +\infty[$, l'inégalité de 5a) donne, en divisant par $x_1x_2 > 0$: $\dfrac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} \geq 4$. Comme $f_2(a, a) = 4$, la valeur 4 est donc atteinte par f_2 et on peut conclure :

$$\boxed{f_2 \text{ possède un minimum global sur } U \text{ et ce minimum vaut } 4}$$

6) Soit $X_n = \left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n}\right)$ et $Y_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.

En notant $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à X_n et Y_n donne : $\langle X_n, Y_n \rangle^2 \leq \| X_n \|^2\ \| Y_n \|^2$.

Comme $\langle X_n, Y_n \rangle = n$, comme $\| X_n \|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et comme $\| Y_n \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$, on obtient $n^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i})$, ce qui s'écrit : $n^2 \leq f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ admet } n^2 \text{ comme minimum global sur } U}$$

Exercice 2 ....

1) Comme u est non nul (il est de norme 1), on sait que vect(u) est un sous-espace vectoriel de dimension 1. De plus, on sait que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\dim(\text{vect}(u))^{\perp} = n - 1}$$

2) Soit x et y deux vecteurs de E et a un réel.
On a : $f_\lambda(x + ay) = \lambda(x + ay \mid u)u + x + ay$.
Par linéarité à gauche du produit scalaire, on obtient :
$f_\lambda(x + ay) = \lambda(x \mid u)u + \lambda a(y \mid u)u + x + ay$.
$f_\lambda(x + ay) = \lambda(x \mid u)u + x + a(\lambda(y \mid u)u + y)$.
On a bien : $f_\lambda(x + ay) = f_\lambda(x) + af_\lambda(y)$, ce qui montre que f_λ est linéaire.
De plus, pour tout x de E, $f_\lambda(x)$ est combinaison linéaire de u et de x qui sont 2 vecteurs de E, par conséquent : $f_\lambda(x) \in E$.
On peut conclure :

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme de } E}$$

3) Pour tout x de E, on a : $f_\lambda^2(x) = (f_\lambda \circ f_\lambda)(x) = f_\lambda(f_\lambda(x)) = \lambda(f_\lambda(x) \mid u)u + f_\lambda(x)$.
Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a :
$(f_\lambda(x) \mid u) = (\lambda(x \mid u)u + x \mid u) = \lambda(x \mid u)(u \mid u) + (x \mid u)$.
Comme $(u \mid u) = \| u \|^2 = 1$, il reste : $(f_\lambda(x) \mid u) = (\lambda + 1)(x \mid u)$.
On en déduit : $f_\lambda^2(x) = \lambda(\lambda + 1)(x \mid u)u + f_\lambda(x)$.
$f_\lambda^2(x) = \lambda(\lambda + 1)(x \mid u)u + \lambda(x \mid u)u + x = \lambda(\lambda + 2)(x \mid u)u + x$.
On peut alors écrire :
$f_\lambda^2(x) = (\lambda + 2)\big(\lambda(x \mid u)u + x\big) - (\lambda + 1)x$.
Et enfin, on trouve : $f_\lambda^2(x) = (\lambda + 2)f_\lambda(x) - (\lambda + 1)x$.
Ceci étant valable pour tout x de E, on a : $f_\lambda^2 = (\lambda + 2)f_\lambda - (\lambda + 1)Id$.
On a bien établi que :

$$\boxed{X^2 - (\lambda + 2)X + (\lambda + 1) \text{ est un polynôme annulateur de } f_\lambda}$$

4) a) Pour tout couple de vecteurs (x, y) éléments de E, on a :
$(f_\lambda(x) \mid y) = (\lambda (x \mid u) u + x \mid y) = \lambda (x \mid u)(u \mid y) + (x \mid y)$.
$(x \mid f_\lambda(y)) = (x \mid (\lambda (y \mid u) u + y) = \lambda (y \mid u)(x \mid u) + (x \mid y)$
$(x \mid f_\lambda(y)) = \lambda (x \mid u) (y \mid u) + (x \mid y)$.
La symétrie du produit scalaire permet de conclure que : $(f_\lambda(x) \mid y) = (x \mid f_\lambda(y))$.

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$$

b) Par définition de f_λ, on a : $f_\lambda(u) = \lambda (u \mid u) u + u = \lambda u + u$.
On a donc :

$$\boxed{f_\lambda(u) = (\lambda + 1) u}$$

Pour tout vecteur v de $(\text{vect}(u))^\perp$, on a : $f_\lambda(v) = \lambda (v \mid u) u + v = 0 u + v$.
On a donc :

$$\boxed{f_\lambda(v) = v}$$

c) Comme u est non nul, la première égalité obtenue à la question 4b) prouve que $\lambda + 1$ est une valeur propre de f_λ associée à un sous-espace propre, noté $E_{\lambda+1}$, contenant $\text{vect}(u)$, donc au moins de dimension 1.
Comme $(\text{vect}(u))^\perp$ n'est pas réduit au vecteur nul (car sa dimension vaut $n-1$), il existe donc un vecteur v **non nul**, élément de $(\text{vect}(u))^\perp$, tel que $f_\lambda(v) = v$ (question 4b), ce qui prouve que 1 est une valeur propre de f_λ associée à un sous-espace propre, noté E_1, contenant $(\text{vect}(u))^\perp$, donc au moins de dimension $(n-1)$.
Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas dépasser n, on peut conclure que $E_{\lambda+1} = \text{vect}(u)$ et $E_1 = (\text{vect}(u))^\perp$.
Il n'y a bien sûr pas d'autres valeurs propres que 1 et $\lambda + 1$, puisque l'on a :
$\dim(\text{vect}(u)) + \dim(\text{vect}(u))^\perp = \dim E$.
Conclusion : $\lambda + 1$ et 1 sont les valeurs propres de f_λ associées respectivement aux sous-espaces propres $\text{vect}(u)$ et $(\text{vect}(u))^\perp$.

Remarque : pour montrer que 1 et $\lambda + 1$ sont les seules valeurs propres de f_λ, on pouvait utiliser le polynôme annulateur exhibé à la question 3).

5) a) En appliquant le résultat de la question 3) avec $\lambda = -1$, on trouve que :
$f_{-1}^2 = f_{-1}$, ce qui signifie :

$$\boxed{f_{-1} \text{ est un projecteur}}$$

b) D'après le cours sur les projecteurs, on sait que $\text{Im} f_{-1}$ est le sous-espace propre de f_{-1} associé à la valeur propre 1. On a donc :

$$\boxed{\text{Im} f_{-1} = (\text{vect}(u))^\perp}$$

On sait aussi que $\operatorname{Ker} f_{-1}$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
On a donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f_{-1} = \operatorname{vect}(u)}$$

On constate que $\operatorname{Ker} f_{-1}$ et $\operatorname{Im} f_{-1}$ sont supplémentaires orthogonaux.
Par conséquent :

$$\boxed{f_{-1} \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\operatorname{vect}(u))^{\perp}}$$

Exercice 3..

1) a) On remarque que $-Y(\Omega) =]-a, 0]$ et, pour tout x de $]-a, 0]$, on a :
$(-Y \leq x) = (Y \geq -x)$.
En notant F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$, on peut écrire :
$\forall x \in]-a, 0],\ F_{-Y}(x) = P(Y \geq -x) = 1 - F_Y(-x)$.
Comme on a admis que $-Y$ est une variable aléatoire à densité, on peut dériver (sauf en 0) et, en posant $f_{-Y}(0) = \dfrac{1}{a}$, on obtient une densité de $-Y$:

$$\boxed{f_{-Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \text{ si } x \in]-a, 0] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

b) On sait que $X - Y$ est une variable aléatoire à densité comme différence de deux variables à densité.
Comme X et $-Y$ sont indépendantes et comme f_X est bornée (f_{-Y} l'est aussi d'ailleurs), une densité de $X - Y$ est la fonction g, définie par le produit de convolution de f_X et f_{-Y} :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_{-Y}(t)\, dt.$$

- Par indépendance de X et Y, on est sûr que $(X - Y)(\Omega) =]-a, a[$, donc :
$\forall x \notin]-a, a[,\ g(x) = 0$.
- Pour tout x de $]-a, a[$, on a l'équivalence suivante :

$$f_X(x-t)\, f_{-Y}(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - t \leq a \\ -a \leq t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{Max}(x - a, -a) \leq t \leq \operatorname{Min}(0, x).$$

Ensuite, la discussion se fait assez naturellement.
(1) Soit x est positif et on a :
$\operatorname{Max}(x - a, -a) = x - a$, $\operatorname{Min}(0, x) = 0$ et $g(x) = \displaystyle\int_{x-a}^{0} \frac{1}{a^2}\, dt = \frac{a - x}{a^2}$).

(2) Soit x est négatif et dans ce cas, on a :

Max $(x - a, -a) = -a$, Min $(0, x) = x$ et $g(x) = \int_{-a}^{x} \frac{1}{a^2}\, dt = \frac{a+x}{a^2}$).

Comme d'après le premier point, $g(a) = g(-a) = 0$, on peut résumer ainsi :

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

2) a) $Z(\Omega) = [0, a]$ et, pour tout x de $[0, a]$, on a : $P(Z \le x) = P(-x \le X - Y \le x)$.
En notant G la fonction de répartition de $X - Y$ et H celle de Z, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in [0, a],\ H(x) = G(x) - G(-x)}$$

Étant donné que $Z(\Omega) = [0, a]$, on a : $H(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $H(x) = 1$ sur $]a, +\infty[$.

b) La fonction H est bien de classe C^1 sur $]0, a[$, puisque G l'est. En dérivant H sur $]0, a[$, on trouve $h(x) = g(x) + g(-x)$ d'où, comme g est paire : $h(x) = 2g(x)$.
Ensuite, on complète à $\mathbb{R}$ entier en posant, par exemple, $h(0) = \frac{2}{a}$ et $h(a) = 0$, avec bien sûr, $h(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]a, +\infty[$, puisque H est constante sur ces deux intervalles. Finalement, une densité h de Z est :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} \text{ si } x \in [0, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

3) La fonction $x \mapsto x\,h(x)$ est continue sur $[0, a]$ et nulle ailleurs (ce qui rend les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x\,h(x)\,dx$ et $\int_{a}^{+\infty} x\,h(x)\,dx$ nulles donc convergentes), par conséquent, Z admet une espérance et l'on a :

$E(Z) = \int_0^a x\,h(x)\,dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$.

$E(Z) = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right)$.

On obtient finalement :

$$\boxed{E(Z) = \frac{a}{3}}$$

De même, la fonction $x \mapsto x^2\, h(x)$ est continue sur $[0, a]$ donc Z admet un moment d'ordre 2 et l'on a : $E(Z^2) = \int_0^a x^2\, h(x)\, dx = \dfrac{2}{a^2} \int_0^a x^2\,(a-x)\, dx$, d'où :

$$E(Z^2) = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^2}{6}.$$

Comme $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$, on a finalement : $V(Z) = \dfrac{a^2}{6} - \dfrac{a^2}{9}$, d'où :

$$\boxed{V(Z) = \frac{a^2}{18}}$$

4) La déclaration de fonction, une fois remplie, s'écrit :

```
Function z (a : real) : real ;
Var x, y : real ;
Begin
x : = a * random ; y : = a * random ; z : = Abs(x – y) ;
End ;
```

Problème ....

Préliminaire

1) a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc aussi sur $[k, k+1]$, avec k dans $\mathbb{N}^*$. Par conséquent, on a, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En intégrant de k à $k+1$ (bornes dans l'ordre croissant, fonctions continues), on obtient : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \displaystyle\int_k^{k+1} 1\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_k^{k+1} 1\, dt$.

Pour finir, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on peut sommer cette double inégalité pour k allant de 1 à $n-1$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La relation de Chasles sur les intégrales et le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme permettent d'écrire :

$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2) En modifiant un peu chacune des sommes et en calculant l'intégrale, on a :
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.
En recentrant cet encadrement (l'ancienne inégalité de gauche devenant la nouvelle inégalité de droite et réciproquement), on obtient bien :
$\forall n \geq 2,\ 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.
Comme $2\sqrt{n} - 2 \leq 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut élargir un peu :
$\forall n \geq 2,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.
Ceci restant valable pour $n = 1$ (l'encadrement donne : $0 \leq 1 \leq 1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1}$$

Partie 1

1) Comme la suite (X_n) converge complètement, alors, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(\,|X_n - X| > \varepsilon\,)$ est convergente. On en déduit (c'est la condition nécessaire de convergence d'une série) que son terme général tend vers 0. On a alors : $\lim_{n\to+\infty} P(\,|X_n - X| > \varepsilon\,) = 0$, ce qui, par définition, signifie :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } X}$$

2) a) Comme Y_n suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$, on a $P(Y_n = 0) = e^{-\frac{1}{n}}$.
De plus, Y_n est à valeurs entières donc : $(Y_n \geq 1) = (Y_n > 0)$, ce qui permet d'écrire : $P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0)$.
On a donc :

$$\boxed{P(Y_n \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}}$$

b) Comme ε est strictement positif, on a : $(Y_n \geq \varepsilon) \subset (Y_n > 0)$.
On en déduit (Y_n est à valeurs entières) : $(Y_n \geq \varepsilon) \subset (Y_n \geq 1)$.
Par croissance de la probabilité, on obtient : $P(Y_n \geq \varepsilon) \leq P(Y_n \geq 1)$.

On a donc : $P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}$. Une probabilité étant positive, on obtient :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}}$$

c) Lorsque n tend vers $+\infty$, $-\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et, par continuité de la fonction exponentielle en 0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$, d'où, par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \geq \varepsilon) = 0.$$

Comme Y_n est à valeurs positives, ceci s'écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|\ Y_n - 0\ | \geq \varepsilon) = 0$.

On a donc montré que :

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à } 0}$$

d) On a vu plus haut que : $P(Y_n \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

Comme Y_n est à valeurs positives, ceci s'écrit : $P(|\ Y_n - 0\ | \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

Pour terminer, lorsque n tend vers $+\infty$, $-\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et on a l'équivalent classique : $e^{-\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. On en déduit que : $P(|\ Y_n - 0\ | \geq 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann de paramètre 1), le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs garantit que la série de terme général : $P(|\ Y_n - 0\ | \geq 1)$ diverge également.

On a donc trouvé un ε ($\varepsilon = 1$) pour lequel la série de terme général $P(|\ Y_n - 0\ | \geq \varepsilon)$ diverge, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ ne converge pas complètement vers la variable certaine égale à } 0}$$

Partie 2

1) a) Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(B_k)$, mais $E(B_k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, donc :

$$\boxed{E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

Par indépendance des variables aléatoires B_k, on a $V(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(B_k)$.

Comme $V(B_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}(1 - \frac{1}{\sqrt{k}})$, on obtient : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k})$.

$$\boxed{V(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

b) On a : $E(S_n) - V(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Comme la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est positive, alors facilement :

$$\boxed{V(S_n) \leq E(S_n)}$$

2) a) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire Z_n (qui possède bien une espérance et une variance), ce qui donne :

$\forall \varepsilon > 0$, $P(\, |Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon\,) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Comme $Z_n = \frac{S_n}{E(S_n)}$, on a, par linéarité de l'espérance : $E(Z_n) = \frac{1}{E(S_n)}E(S_n) = 1$.

On obtient alors : $P(\left| Z_n - 1 \right| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Par propriété de la variance, $V(Z_n) = \left(\frac{1}{E(S_n)}\right)^2 V(S_n)$.

Avec la question précédente, on en déduit que : $V(Z_n) \leq \frac{1}{E(S_n)}$, ce qui permet d'écrire (comme $\varepsilon^2 > 0$) : $\frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$.

On a donc enfin : $P(\left| Z_n - 1 \right| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$ et comme une probabilité est positive, on obtient :

$$\boxed{0 \leq P(\left| Z_n - 1 \right| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}}$$

b) Comme $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et comme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n} - 2$, on a en prenant l'inverse (tout est strictement positif) : $0 \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 (2\sqrt{n} - 2)}$.

Par encadrement, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)} = 0$

Toujours par encadrement, grâce à la double inégalité obtenue en 2a), on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(\left|Z_n - 1\right| \geq \varepsilon) = 0}$$

Ceci signifie bien que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3) En remplaçant n par n^4, l'inégalité obtenue à la question 2a) devient :

$$0 \leq P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_{n^4})}.$$

En majorant comme 8 lignes plus haut (en remplaçant n par n^4), on trouve :

$$\boxed{0 \leq P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 (2n^2 - 2)}}$$

Comme $\dfrac{1}{\varepsilon^2 (2n^2 - 2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\varepsilon^2 n^2}$, et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre 2 > 1) on en déduit, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, que la série de terme général $\dfrac{1}{\varepsilon^2 (2n^2 - 2)}$ est convergente, puis, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,) \text{ est convergente}}$$

4) a) Par définition de la partie entière, on a : $e_n \leq n^{\frac{1}{4}} < e_n + 1$. En élevant à la puissance 4 (tout est positif), on obtient : $e_n^4 \leq n < (e_n + 1)^4$.

Par ailleurs, $S_{(e_n+1)^4} = \sum_{k=1}^{(e_n+1)^4} B_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$ et $S_{e_n^4} = \sum_{k=1}^{e_n^4} B_k$ et, comme les variables aléatoires B_k sont à valeurs positives, on en déduit :

$$S_{e_n^4} \leq S_n \leq S_{(e_n+1)^4}. \qquad (1)$$

Par croissance de l'espérance, on a alors : $E(S_{e_n^4}) \leq E(S_n) \leq E(S_{(e_n+1)^4})$.

En inversant (tout est strictement positif, puisque la variable $S_{e_n^4}$ est positive et n'est pas la variable certaine égale à 0, on a :

$$\frac{1}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq \frac{1}{E(S_n)} \leq \frac{1}{E(S_{e_n^4})}. \qquad (2)$$

En multipliant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \frac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \le Z_n \le \frac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}}$$

b) Par définition de Z_n, on a : $Z_{e_n^4} = \dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{e_n^4})}$ et $Z_{(e_n+1)^4} = \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})}$

On en déduit alors que : $S_{e_n^4} = E(S_{e_n^4})Z_{e_n^4}$ et $S_{(e_n+1)^4} = E(S_{(e_n+1)^4})Z_{(e_n+1)^4}$

En remplaçant dans l'encadrement obtenu à la question 3a), on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \le Z_n \le \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}}$$

5) a) En divisant par $2\sqrt{n}$ l'encadrement obtenu dans le préliminaire, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} \le 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, ce qui prouve (par encadrement) que :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On en déduit : $E(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

En remplaçant n par $e_n{}^4$, on obtient : $E(S_{e_n^4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,e_n{}^2$.

En remplaçant n par $(e_n+1)^4$, on obtient : $E(S_{(e_n+1)^4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(e_n+1)^2$.

On a alors : $\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(e_n+1)^2}{e_n{}^2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(e_n+1)^2}{e_n{}^2} = 1$, ce qui donne bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1}$$

b) Par définition de la limite, on a, pour n assez grand :

$\forall \varepsilon > 0, \left| \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} - 1 \right| \le \varepsilon.$

Ceci s'écrit aussi : $1 - \varepsilon \le \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \le 1 + \varepsilon$, et on a bien, en particulier :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \le 1 + \varepsilon} \qquad (1)$$

On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} = 1$ donc, pour n assez grand, on a, toujours par définition : $\forall \varepsilon' > 0, \left| \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} - 1 \right| \le \varepsilon'$.

Ceci s'écrit aussi : $1 - \varepsilon' \le \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \le 1 + \varepsilon'$ et on a, entre autres :

$\forall \varepsilon' > 0,\ 1 - \varepsilon' \le \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}$. En posant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, on obtient :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \le \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}} \qquad (2)$$

c) Comme $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \le Z_n$, on a : $(Z_n \le 1 - \varepsilon) \subset \left(\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \le 1 - \varepsilon \right)$.

Ceci donne $(Z_n \le 1 - \varepsilon) \subset \left(Z_{e_n^4} \le \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} (1 - \varepsilon) \right)$, et grâce à l'inégalité (1), on obtient $(Z_n \le 1 - \varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} \le 1 - \varepsilon^2)$, soit :

$$\boxed{(Z_n \le 1 - \varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} - 1 \le -\varepsilon^2)}$$

De la même façon, comme $\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4} \ge Z_n$, on a :

$$(Z_n \ge 1 + \varepsilon) \subset \left(\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4} \ge 1 + \varepsilon \right)$$

On peut alors écrire : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(Z_{(e_n+1)^4} \geq \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}(1+\varepsilon) \right)$, et grâce à l'inégalité (2), on obtient : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(Z_{(e_n+1)^4} \geq \dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(1+\varepsilon) \right)$, soit : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset (Z_{(e_n+1)^4} \geq 1+\dfrac{\varepsilon}{2})$, et enfin :

$$\boxed{(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)}$$

d) D'après la question 5c), on a : $(Z_n \leq 1-\varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2)$. On sait aussi que $(Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2) \subset (| Z_{e_n^4} - 1 | \geq \varepsilon^2)$, donc on en déduit :

$$\boxed{(Z_n \leq 1-\varepsilon) \subset (| Z_{e_n^4} - 1 | \geq \varepsilon^2)}$$

Toujours d'après la question 5c), on a : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset (Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2})$.

Comme $(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2}) \subset (| Z_{(e_n+1)^4} - 1 | \geq \dfrac{\varepsilon}{2})$, on peut écrire :

$$\boxed{(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(| Z_{(e_n+1)^4} - 1 | \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right).}$$

Pour finir, on sait que : $(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) = (Z_n - 1 \geq \varepsilon) \cup (Z_n - 1 \leq -\varepsilon)$. On peut alors écrire : $(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) = (Z_n \geq 1+\varepsilon) \cup (Z_n \leq 1-\varepsilon)$.
Par incompatibilité, on obtient : $P(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) = P(Z_n \geq 1+\varepsilon) + P(Z_n \leq 1-\varepsilon)$.
En tenant compte de tout ce qui précède, on a bien :

$$\boxed{P(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) \leq P\left(| Z_{(e_n+1)^4} - 1 | \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + P(| Z_{e_n^4} - 1 | \geq \varepsilon^2)}$$

e) La domination trouvée à la question 5d) ci-dessus ne permet malheureusement pas de conclure : on ne peut pas appliquer ici le résultat de la question 3), puisque e_n et e_n+1 ne sont pas des entiers naturels quelconques (e_n n'est que la partie entière de $n^{\frac{1}{4}}$).