EDHEC 2009 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) Supposons que la suite (X_n) converge en moyenne vers X. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

La variable aléatoire $|X_n - X|$ est à valeurs positives et possède une espérance. L'inégalité de Markov donne alors :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant P(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{E\big(|X_n - X|\big)}{\varepsilon}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$, par encadrement on obtient : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

Alors la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

$$\boxed{\text{Si la suite } (X_n) \text{ converge en moyenne vers } X\text{, alors elle converge en probabilité vers } X.}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Y_n prend une valeur non nulle si et seulement si les variables aléatoires Z_1, Z_2, ..., Z_n prennent une valeur non nulle.

Alors $\{Y_n \neq 0\} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \{Z_k \neq 0\}$ donc $P(Y_n \neq 0) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{Z_k \neq 0\}\right)$.

Par indépendance il vient : $P(Y_n \neq 0) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(Z_k \neq 0) = \prod\limits_{k=1}^{n} \big(1 - P(Z_k = 0)\big)$.

Or Z_1, Z_2, ..., Z_n suivent la loi de Poisson de paramètre λ donc : $P(Y_n \neq 0) = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - e^{-\lambda}) = (1 - e^{-\lambda})^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } P(Y_n \neq 0) = (1 - e^{-\lambda})^n.}$$

b) Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et si ε est un réel strictement positif, la réalisation de l'événement $\{Y_n > \varepsilon\}$ entraîne la réalisation de l'événement $\{Y_n \neq 0\}$!

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \varepsilon \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } \{Y_n > \varepsilon\} \subset \{Y_n \neq 0\}.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit ε un réel strictement positif.

$\{Y_n > \varepsilon\} \subset \{Y_n \neq 0\}$ donc par croissance de P : $P(Y_n > \varepsilon) \leqslant P(Y_n \neq 0)$.

De plus Y_n prend des valeurs positives ou nulles car Z_1, Z_2, ..., Z_n prennent des valeurs positives ou nulles.

Ainsi : $0 \leqslant P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) \leqslant P(Y_n \neq 0) = (1 - e^{-\lambda})^n$.

λ est (strictement) positif donc $|1 - e^{-\lambda}| = 1 - e^{-\lambda} < 1$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - e^{-\lambda})^n = 0$.

Par encadrement on obtient alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout réel ε strictement positif.

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.}}$$

3) *Ici une petite modification du texte s'impose ! Dans l'ensemble de la question nous supposerons que la suite (Y_n) converge en moyenne vers une variable aléatoire Y afin que le Y de c) ne se sente pas trop seul...*

a) Nous avons supposé que la suite (Y_n) converge en moyenne vers une variable aléatoire Y. Alors, d'après la première question, la suite (Y_n) converge en probabilité vers Y . Or d'après la seconde question la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

Le résultat admis au début de l'exercice permet de dire que $P(Y = 0) = 1$.

$$\boxed{\text{Si la suite } (Y_n) \text{ converge en moyenne vers une variable aléatoire } Y \text{ alors } P(Y=0)=1.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Z_1, Z_2, ..., Z_n possèdent une espérance qui vaut λ et ces variables sont indépendantes.

Alors $Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_n$ possède une espérance qui vaut $E(Z_1) \times E(Z_2) \times \cdots \times E(Z_n)$ donc λ^n.

Donc $E(Y_n)$ existe et vaut λ^n.

$$\boxed{\text{Pour tout élément non nul de } \mathbb{N}^*,\ E(Y_n) \text{ existe et vaut } \lambda^n.}$$

c) Y est presque sûrement égale à 0 donc Y possède une espérance qui vaut 0.

Rappelons que Y_n possède une espérance qui vaut λ^n.

Comme la suite (Y_n) converge en moyenne vers Y, $E\big(|Y_n - Y|\big)$ existe pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |Y_n - Y| \geqslant Y_n - Y$.

La croissance et la linéraité de l'espérance donnent alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E\big(|Y_n - Y|\big) \geqslant E\big(Y_n - Y\big) = E(Y_n) - E(Y)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E\big(|Y_n - Y|\big) \geqslant E(Y_n) - E(Y).}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E\big(|Y_n - Y|\big) \geqslant E(Y_n) - E(Y) = \lambda^n - 0 = \lambda^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$ car $\lambda > 1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si la suite } (Y_n) \text{ converge en moyenne vers une variable aléatoire } Y \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} E\big(|Y_n - Y|\big) = +\infty\,!!}$$

∇ *Remarque En fait la minoration $E\big(|Y_n - Y|\big) \geqslant E(Y_n) - E(Y)$ ne sert à rien car on a presque sûrement (!) directement $E\big(|Y_n - Y|\big) = E(Y_n) = \lambda^n$.* ∇

4) Si la suite (Y_n) converge en moyenne vers une variable aléatoire Y alors $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|Y_n - Y|\big) = +\infty$. Ceci est légèrement contradictoire. Donc la suite (Y_n) ne converge pas en moyenne vers Y.

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ ne converge pas en moyenne.}}$$

Donc la suite (Y_n) converge en probabilité sans converger en moyenne.

$$\boxed{\text{La convergence en moyenne entraîne la convergence en probabilité mais la réciproque est fausse.}}$$

EXERCICE 2

---

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$t \to \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ est alors de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

- $\dfrac{1}{1+t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ donc $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha\, n}}$.

- $t \to \dfrac{1}{t^{\alpha\, n}}$ est positive sur $[1, +\infty[$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha\, n}}$ converge car $\alpha\, n > 1$ puisque $n \geqslant 1$ et $\alpha > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ converge et u_n est défini.

$\forall t \in [0, +\infty[,\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} > 0$ donc $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall t \in [0, +\infty[,\ 1 + t^\alpha \geqslant 1$ et $n + 1 \geqslant n$. Donc $\forall t \in [0, +\infty[,\ (1+t^\alpha)^{n+1} \geqslant (1+t^\alpha)^n > 0$.

Ainsi $\forall t \in [0, +\infty[,\ \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}\cdot$ Ceci donne en intégrant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}\cdot$

Alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit A un réel strictement positif.

Posons : $\forall t \in [0, +\infty[,\ f(t) = t$ et $g(t) = \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}\cdot$

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus $\forall t \in [0, +\infty[,\ f'(t) = 1$ et $g'(t) = -n\,\alpha\, \dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\cdot$ En intégrant par parties il vient :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \int_0^A 1 \times \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t = \left[t \times \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^A - \int_0^A t\left(-n\,\alpha\,\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\,\alpha \int_0^A \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\,\alpha \int_0^A \frac{(1+t^\alpha)-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\,\alpha \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} - n\,\alpha \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \quad (1).$$

Notons que : $\dfrac{A}{(1+A^\alpha)^n} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{A^{\alpha\, n}} = \dfrac{1}{A^{\alpha\, n-1}}\cdot$

Comme $\alpha\, n - 1$ est strictement supérieur à 0 ($n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 1$), $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha\, n-1}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} = 0$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$ convergent, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1) on obtient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = n\,\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} - n\,\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\cdot$ Ainsi $u_n = n\,\alpha\, u_n - n\,\alpha\, u_{n+1} = n\,\alpha\,(u_n - u_{n+1})$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,\alpha\,(u_n - u_{n+1}).}$$

b) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = k\,\alpha\,(u_k - u_{k+1})$ donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_{k+1} = \left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right) u_k$.

On a encore $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right)$ car $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k > 0$.

Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$ ce qui donne $\displaystyle\frac{u_n}{u_1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$ ou encore $\displaystyle u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2, on a } u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right).}$$

3) Rappelons que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs divergente tend vers $+\infty$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\ln u_n = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)$ car $u_1 > 0$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ 1 - \dfrac{1}{k\,\alpha} > 0$.

- $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k\,\alpha}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right) \geqslant 0$.
- La série de terme général $\dfrac{1}{k\,\alpha}$ est divergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\,\alpha}\right)$ est divergente. Cette série étant à termes positifs la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)\right) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right) = -\infty$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\,\alpha}\right)\right) = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \big(k\,\alpha\,(u_k - u_{k+1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(k\,\alpha\,u_k\big) - \sum_{k=1}^{n} \big(k\,\alpha\,u_{k+1}\big).$$

Un petit changement d'indice sur la seconde somme donne :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \big(k\,\alpha\,u_k\big) - \sum_{k=2}^{n+1} \big((k-1)\,\alpha\,u_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \big(k\,\alpha\,u_k\big) - \sum_{k=\mathbf{1}}^{n+1} \big((k-1)\,\alpha\,u_k\big).$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(k\,\alpha\,u_k - \big((k-1)\,\alpha\,u_k\big)\Big) - n\,\alpha\,u_{n+1} = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k - n\,\alpha\,u_{n+1} = \alpha\,S_n - n\,\alpha\,u_{n+1}.$$

Alors $(\alpha - 1)\,S_n = n\,\alpha\,u_{n+1}$. Comme α est différent de $1 : S_n = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha - 1}\,u_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n\,\alpha}{\alpha - 1}\,u_{n+1}.}$$

b) Soit n dans $[\![2,+\infty[\![$. $S_n = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\, u_{n+1} = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\, u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\, u_1 \left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right)$.

$S_n = \dfrac{n\,\alpha}{\alpha-1}\, u_1\, \dfrac{\alpha-1}{\alpha} \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) = n\, u_1 \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right)$.

Alors $\ln(S_n) = \ln n + \ln u_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) = \ln u_1 + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) + \ln n$.

Observons alors que $n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1}$. Ainsi $\ln n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = -\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Ainsi $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right].}$$

c) $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) = -\dfrac{1}{k\,\alpha} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{1}{k\,\alpha} + \dfrac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{k}\right)$. Comme $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ n'est pas nul :

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\frac{1}{k}.}$$

d)
- $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k} \geqslant 0$.
- la série de terme général $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,\dfrac{1}{k}$ est divergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ diverge.

$\alpha > 1$ donc $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{1}{k\,\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k}$. Alors $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ 1-\dfrac{1}{k\,\alpha} \geqslant 1-\dfrac{1}{k} > 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) \geqslant \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$. Finalement $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \geqslant 0$.

La série de terme général $\ln\left(1-\dfrac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ diverge et est à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(S_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\,\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]\right) = +\infty$.

Ceci donne encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln S_n} = +\infty$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ diverge.}}$$

5) Ici $\alpha = 2$. $u_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \Big[\arctan t\Big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{2\,n}\right) u_n$ ou $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2\,(n-1)}\right) u_{n-1}$.

```
Function u(n:integer):real;
Begin
If (n=1) then u:=pi/2
         else u:=(1-0.5/(n-1))*u(n-1);
end;
```

EXERCICE 3

1) • Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un élément de E.

$$f(P) = X^{2n+1}\, P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, \left(X^{2n+1} \times \frac{1}{X^k}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^{2n+1-k}.$$

Un petit changement d'indice donne alors : $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k$. Ainsi $f(P)$ est un élément de E.

$$\boxed{f \text{ est une application de } E \text{ dans } E}.$$

$$\boxed{\text{Soit } P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k,\, X^k \text{ un élément de } E.\ f(P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k.}$$

Dans la suite nous nous appuierons sur cela pour nous éviter de parler de P $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{X}}\right)$**...**

• Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k$ deux éléments de E. Soit λ un réel. $\lambda\, P + Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda\, a_k + b_k)\, X^k$.

Ainsi : $f(\lambda\, P + Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda\, a_{2n+1-k} + b_{2n+1-k})\, X^k = \lambda \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k + \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1-k}\, X^k = \lambda\, f(P) + f(Q)$.

f est donc linéaire. f est alors une application linéaire de E dans E. Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2) a) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un élément de E. $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k$.

Donc $f\big(f(P)\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-(2n+1-k)}\, X^k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k = P$.

$\forall P \in E,\ (f \circ f)(P) = f\big(f(P)\big) = P$. Ainsi :

$$\boxed{f \circ f = Id.}$$

b) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont -1 et 1. Le spectre de f est donc contenu dans $\{-1, 1\}$.

$$\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont les seules valeurs propres posssibles de } f.}$$

3) a) *Nous ne commencerons pas à supposer que P est dans* $\mathrm{Ker}(f - Id)$. *Nous donnerons directement, et pour le même prix une condition nécessaire et suffisante pour que P soit dans* $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un élément de E. $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k$.

$P \in \mathrm{Ker}(f - Id) \iff P = f(P) \iff \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k \iff \forall k \in [\![0, 2n+1]\!],\ a_k = a_{2n+1-k}$.

Observons alors que : $\big(n+1, 2n+1-(n+1)\big) = (2n+1-n, n)$, $\big(n+2, 2n+1-(n+2)\big) = (2n+1-(n-1), n-1)$, ..., $\big(2n+1, 2n+1-(2n+1)\big) = (2n+1-0, 0)$.

Ce qui permet de dire que les $n+1$ dernières équations du système précédent se déduisent des n+1 premières.

Illustrons ! ! $\left\{\begin{array}{l} a_0 = a_{2n+1} \\ a_1 = a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} = a_{n+2} \\ a_n = a_{n+1} \\ a_{n+1} = a_n \\ a_{n+2} = a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n+1} = a_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a_0 = a_{2n+1} \\ a_1 = a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 = a_{2n} \\ a_n = a_{n+1} \end{array}\right.$. C'est mieux comme cela Elisa ?

Ainsi $P \in \mathrm{Ker}(f - Id) \iff \forall k \in [\![0, 2n+1]\!],\ a_k = a_{2n+1-k} \iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a_{2n+1-k}$.

$$\boxed{\text{Un élément } P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k \text{ de } E \text{ est un élément de } \mathrm{Ker}(f - Id) \text{ si et seulement si } \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a_{2n+1-k}.}$$

b) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k,\, X^k$ un élément de $\mathrm{Ker}(f - Id)$. Alors $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a_{2n+1-k}$ et même $\forall k \in [\![0, 2n+1]\!],\ a_k = a_{2n+1-k}$.

Donc $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, (X^k + X^{2n+1-k})$.

Alors P appartient à $\mathrm{Vect}(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f - Id) \subset \mathrm{Vect}(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$.

De plus $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(X^k + X^{2n+1-k}) = X^{2n+1-k} + X^{2n+1-(2n+1-k)} = X^k + X^{2n+1-k}$.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!],\ X^k + X^{2n+1-k} \in \mathrm{Ker}(f - Id)$. Ainsi $\mathrm{Vect}(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(f - Id)$.

Finalement $\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Vect}(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$ et alors $(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg(X^k + X^{2n+1-k}) = 2n+1-k$, donc les éléments de la famille $(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$ sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.

Ainsi $(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f - Id)$. Finalement :

$$\boxed{(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - Id).}$$

4) Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ un élément de $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

$f(P) = -P$ donc $\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k = -\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$. Alors : $\forall k \in [\![0, 2n+1]\!],\ a_k = -a_{2n+1-k}$.

Donc $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k - \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, (X^k - X^{2n+1-k})$.

Alors P appartient à $\mathrm{Vect}(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f + Id) \subset \mathrm{Vect}(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$.

De plus $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(X^k - X^{2n+1-k}) = X^{2n+1-k} - X^{2n+1-(2n+1-k)} = X^{2n+1-k} - X^k = -(X^k - X^{2n+1-k})$.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!],\ X^k - X^{2n+1-k} \in \mathrm{Ker}(f + Id)$. Ainsi $\mathrm{Vect}(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(f + Id)$.

Finalement $\mathrm{Ker}(f + Id) = \mathrm{Vect}(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$ et $(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg(X^k - X^{2n+1-k}) = 2n + 1 - k$, donc les éléments de la famille $(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$ sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.

Ainsi $(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f - Id)$. Finalement :

$$\boxed{(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \dots, X^n - X^{n+1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - Id).}$$

5) a) Dans cette section $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k$, $R = \sum_{k=0}^{2n+1} c_k\, X^k$ sont trois éléments de E et λ est un réel.

• $\varphi(\lambda\, P + Q, R) = \sum_{k=0}^{2n+1} ((\lambda\, a_k + b_k)\, c_k) = \sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda\, a_k\, c_k + b_k\, c_k) = \lambda \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, c_k + \sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, c_k = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$.

$\varphi(\lambda\, P + Q, R) = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R) \quad$ (i).

• $\varphi(Q, P) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, a_k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, b_k = \varphi(P, Q)$. $\varphi(Q, P) = \varphi(P, Q) \quad$ (ii).

• $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, a_k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2 \geqslant 0 \quad$ (iii).

• Supposons que $\varphi(P, P) = 0$.

Alors $\sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2 = 0$. Ce qui donne $a_0^2 = a_1^2 = \cdots = a_{2n+1}^2 = 0$ car a_0^2, a_1^2, ..., a_{2n+1}^2 sont des réels positifs ou nuls.

Donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_{2n+1} = 0$. Ainsi P est nul.

Si $\varphi(P, P) = 0$ alors P est nul $\quad$ (iv).

(i), (ii), (iii) et (iv) montrent que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire défini sur } E.}$$

b) $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k\, X^k$ sont deux éléments de E. $f(P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, X^k$ et $f(Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1-k}\, X^k$.

Ainsi $\varphi\left(f(P), Q\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}\, b_k = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i\, b_{2n+1-i} = \varphi\left(P, f(Q)\right)$. $\varphi\left(f(P), Q\right) = \varphi\left(P, f(Q)\right)$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

c) f est un endomorphisme symétrique de E donc f est diagonalisable.

Nous avons vu plus haut que les deux valeurs propres possibles de f sont 1 et -1. Nous avons également vu que :

$\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Vect}(1 + X^{2n+1}, X + X^{2n}, \ldots, X^n + X^{n+1})$ et $\mathrm{Ker}(f + Id) = \mathrm{Vect}(1 - X^{2n+1}, X - X^{2n}, \ldots, X^n - X^{n+1})$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ ne sont pas réduit au vecteur nul ; 1 et -1 sont des valeurs propres de f.

Finalement 1 et -1 sont les valeurs propres de f. Comme f est diagonalisable, $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ sont supplémentaires.

De plus f est symétrique donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Alors $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ sont orthogonaux. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f + Id) \text{ et } \mathrm{Ker}(f - Id) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

∇ *Remarque* *Ceci indique que* $\mathrm{Ker}(f + Id)$ *est l'orthogonal de* $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

Or f est un endomorphisme involutif de E donc f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id)$ *dans la direction* $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

Finalement f est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id)$. ∇

PROBLÈME

Partie 1 : Préliminaire

Dans toute cette partie x est un élément de $[0, 1[$.

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $[0, x]$. t est différent de 1 donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}$.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ appartient à } \mathbb{N}^* \text{ et si } t \text{ appartient à } x : \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0, x]$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t}$.

En intégrant on obtient : $\displaystyle\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t}\, \mathrm{d}t$. Ce qui donne par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\, \mathrm{d}t$. Alors $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \big[-\ln|1 - t|\big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\, \mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln|1 - x| - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\, \mathrm{d}t = -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\, \mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.}$$

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ et $t^n \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{1-x}\cdot$

x étant un élément de $[0,1[$, il vient en intégrant :

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{(1-x)(n+1)}\cdot$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1-x)(n+1)} = 0$. Par encadrement on obtient alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

d) Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right) = -\ln(1-x)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{x^p}{p} \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$$

Exercice Montrer que le résultat vaut encore pour $x \in [-1,0[$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}\cdot$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \dfrac{x^{n+1}}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\,\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot$

Les séries de termes généraux $\dfrac{x^n}{n}$ et $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ étant convergentes, la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ est convergente.}}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ car les trois séries convergent.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\,(-\ln(1-x)) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = -x\,\ln(1-x) - \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{x^p}{p}\cdot$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x\,\ln(1-x) - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} + x = -x\,\ln(1-x) - (-\ln(1-x)) + x = x + (1-x)\,\ln(1-x).$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x).}$$

Partie 2

---

1) Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) = 1$. F étant croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in [x_0, +\infty[, F(x) = 1$! !

f est continue sur $]0, +\infty[$. Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'(x) = f(x)$.

Or f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$. Par conséquent F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (et même sur $[0, +\infty[$ car F est continue sur $\mathbb{R}$).

F étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et constante sur $[x_0, +\infty[$, une légère contradiction apparaît...

Ainsi il n'existe pas de réel x_0 tel que $F(x_0) = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) < 1$. Alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - F(x) > 0.}$$

2) Il convient de montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Une remarque préliminaire s'impose.

f étant nulle sur $]-\infty, 0[$: $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[,\ -f(x)\ \ln(1 - F(x)) = -f(x)\ \ln(1) = 0 = g(x)$. Plus de doute :

$$\boxed{\boxed{\forall x \in \boxed{\mathbb{R}},\ g(x) = -f(x)\ \ln(1 - F(x)).}}$$

- Soit x un réel.

$0 < 1 - F(x) \leqslant 1$ donc $\ln(1 - F(x)) \leqslant 0$. $f(x) \geqslant 0$ donc $-f(x) \leqslant 0$. Alors $g(x) = -f(x)\ \ln(1 - F(x)) \geqslant 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$.

- $x \to 1 - F(x)$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Alors $x \to \ln(1 - F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $[0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ donc f est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$. Il en est alors de même pour $-f$.

Donc, par produit, $g : x \to -f(x)\ \ln(1 - F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

g est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

∇ *Remarque* *Ce qui précède montre que g est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.*

g est aussi continue à droite en 0 car $-f$ et $x \to \ln(1 - F(x))$ sont continues sur $[0, +\infty[$.

Notons que $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Alors $g(0) = -f(0)\ \ln(1 - 0) = 0$. Rappelons que g est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Alors : $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue à gauche en 0.

Finalement g est continue sur $\mathbb{R}$. ∇

- g est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Montrons alors que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Cela revient à montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \big(-f(t)\big)\ \ln(1 - F(t))\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Utilisons pour cela une intégration par parties.

Soit H la restriction de F à $[0, +\infty[$. $\forall x \in [0, +\infty[,\ H(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et f est continue sur $[0, +\infty[$ donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ H'(x) = f(x)$.

∇ *Remarque* *L'utilisation de H s'impose (? !) car F n'est pas nécessairement dérivable en 0 ; $F'(x) = f(x)$ est donc un peu osé pour $x = 0$...* ∇

Posons $\forall x \in [0,+\infty[,\ u(x) = 1 - H(x)$. u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ u'(x) = -f(x)$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[,\ v(x) = \ln(1-H(x))$. $x \to 1 - H(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et strictement positive. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, par composition v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. $\forall x \in [0,+\infty[,\ v'(x) = \dfrac{-f(x)}{1-H(x)}$.

Soit A un réel strictement positif. En utilisant une intégration par parties (justifiée par ce qui précède) il vient :

$$\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \Big(-f(t)\,\ln(1-H(t))\Big)\,\mathrm{d}t = [(1-H(x))\,\ln(1-H(x))]_0^A - \int_0^A (1-H(t))\,\frac{-f(t)}{1-H(t)}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = (1-H(A))\,\ln(1-H(A)) - (1-H(0))\,\ln(1-H(0)) + \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = (1-H(A))\,\ln(1-H(A)) - (1-H(0))\,\ln(1-H(0)) + F(A) - F(0).$$

$H(0) = F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $(1-H(0))\,\ln(1-H(0)) = \ln 1 = 0$.

Alors $\displaystyle\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = (1-H(A))\,\ln(1-H(A)) + F(A)$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}(1-H(A)) = \lim_{A\to+\infty}(1-F(A)) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x\,\ln x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\Big((1-H(A))\,\ln(1-H(A))\Big) = 0$.

Comme en plus $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} F(A) = 1$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\Big((1-H(A))\,\ln(1-H(A)) + F(A)\Big) = 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

Ceci achève de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

g est positive sur $\mathbb{R}$, g est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Alors g est une densité de probabilité donc :

$$\boxed{g \text{ peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire } Y.}$$

3) a) Soit X_0 une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \begin{cases} \lambda\,e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_0 est une densité de X_0, continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$. Ainsi :

$$\boxed{\text{une variable aléatoire } X_0 \text{ suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.}}$$

b) Ici X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors f_0 est encore une densité de X. f et f_0 sont donc deux densités de X !

∇ *Remarque* *À priori (à priori seulement), rien ne permet de dire que* f *est* f_0... ∇

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_0(x) = \begin{cases} -f_0(x)\,\ln(1-F(x)) & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f et f_0 diffèrent seulement en un nombre fini de points il en est alors de même de g et g_0.
Comme g_0 est positive sur $\mathbb{R}$ et que g est une densité de Y, g_0 est encore une densité de Y !

$\forall x \in [0,+\infty[, g_0(x) = -\lambda\,e^{-\lambda\,x}\,\ln(1-(1-e^{-\lambda\,x})) = -\lambda\,e^{-\lambda\,x}\,\ln(e^{-\lambda\,x})) = (-\lambda)\,(-\lambda\,x)\,e^{-\lambda\,x} = \dfrac{x^{2-1}\,e^{-\frac{x}{(1/\lambda)}}}{(1/\lambda)^2\,\Gamma(2)}$.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[,\ g_0(x) = 0$.

Alors Y suit la loi Gamma de paramètres $\dfrac{1}{\lambda}$ et 2. Ainsi $E(Y) = \dfrac{2}{\lambda}$ et $V(Y) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

$$\boxed{Y \text{ suit la loi Gamma de paramètres } \frac{1}{\lambda} \text{ et } 2,\ E(Y) = \frac{2}{\lambda} \text{ et } V(Y) = \frac{2}{\lambda^2}.}$$

Exercice *Montrer que* $f = f_0$ *! En déduire que ceux qui n'ont pas pris de précaution avaient raison... ! Comme disait ma grand-mère il n'y a de la chance que pour la canaille...*

Partie 3

1) $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{r} u_n = \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{r+1}\cdot$ Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\sum_{n=1}^{r} u_n = 1.$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.}$$

2) a) Soit x un réel. Montrons que $Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \mid \text{Max}\big(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big) \leqslant x\}.$

Comme $\Big(\{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P) : \Omega = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}.$

Alors : $Z^{-1}(]-\infty,x]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(Z^{-1}(]-\infty,x]) \cap \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\big).$

$$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\{\omega \in \Omega \mid \text{Max}\big(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\big).$$

$$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big\{\omega \in \Omega \mid \text{Max}\big(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big) \leqslant x \text{ et } N(\omega) = n\Big\}.$$

$$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big\{\omega \in \Omega \mid \text{Max}\left(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) \leqslant x \text{ et } N(\omega) = n\Big\}.$$

$$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) \leqslant x,\ X_1(\omega) \leqslant x,\ \ldots, X_n(\omega) \leqslant x,\ N(\omega) = n\Big\}.$$

$$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leqslant x\} \cap \cdots \cap \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n\}\Big).$$

$$Z^{-1}(]-\infty,x]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(X_0^{-1}(]-\infty,x]) \cap X_1^{-1}(]-\infty,x]) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(]-\infty,x]) \cap N^{-1}(\{n\})\Big).$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

X_0, X_1, ..., X_n, N sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $X_0^{-1}(]-\infty,x])$, $X_1^{-1}(]-\infty,x])$, ..., $X_n^{-1}(]-\infty,x])$, $N^{-1}(\{n\})$ sont des éléments de la tribu $\mathcal{A}$.

Alors $X_0^{-1}(]-\infty,x]) \cap X_1^{-1}(]-\infty,x]) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(]-\infty,x]) \cap N^{-1}(\{n\})$ est un élément de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ou dénombrable).

Ainsi $Z^{-1}(]-\infty,x])$ est réunion dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$ c'est donc un élément de $\mathcal{A}$ et ceci pour tout élément x de $\mathbb{R}$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{X \text{ est une variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}, P).}$$

Soit x un réel. $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(Z^{-1}(]-\infty,x]))$.

$$F_Z(x) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(X_0^{-1}(]-\infty,x]) \cap X_1^{-1}(]-\infty,x]) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(]-\infty,x]) \cap N^{-1}(\{n\})\Big)\right).$$

Par indépendance et incompatibilité il vient :

$$F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(P(X_0^{-1}(]-\infty, x]))\, P(X_1^{-1}(]-\infty, x])) \cdots P(X_n^{-1}(]-\infty, x]))\, P(N^{-1}\{n\}) \Big).$$

$$F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(P(X_0 \leqslant x)\, P(X_1 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x)\, P(N = n) \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((F(x))^{n+1}\, u_n \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n\,(n+1)}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n\,(n+1)}.}$$

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

$F(x) \in [0, 1[$ donc, d'après le préliminaire : $F_Z(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n\,(n+1)} = F(x) + (1 - F(x))\, \ln(1 - F(x))$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = F(x) + (1 - F(x))\, \ln(1 - F(x))}$$

Pour faire plaisir au concepteur :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ F_Z(x) = F(x) + (1 - F(x))\, \ln(1 - F(x))}$$

c) • Nous avons déjà vu que F, $x \to 1 - F(x)$ et $x \to \ln(1 - F(x))$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Alors $x \to F(x) + (1 - F(x))\, \ln(1 - F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

• f est continue au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$.

$1 - F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\ln(1 - F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par produit $(1 - F)\, \ln(1 - F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par somme $F + (1 - F)\, \ln(1 - F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

F_Z est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc :

$$\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F_Z'(x) = f(x) - f(x)\, \ln(1 - F(x)) + (1 - F(x)\, \dfrac{-f(x)}{1 - F(x)} = -f(x)\, \ln(1 - F(x)) = g(x).$

Alors g est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_z' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est une densité de } Z.}$$
