EDHEC 2008 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) Soit λ un réel. λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Or $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x-\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si $(-\lambda)(2x-\lambda) - y(-1) = 0$,

donc si et seulement si $\lambda^2 - 2x\lambda + y = 0 \quad (1)$.

Le discriminant de cette équation du second degré est $(2x)^2 - 4y$; il a donc le signe de $x^2 - y$.

• Premier cas : $x^2 - y < 0$. L'équation (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$. A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Deuxième cas : $x^2 - y = 0$. L'équation (1) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ qui est x. Ainsi x est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{R}$.

Supposons alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

D est semblable à A donc a les mêmes valeurs propres que A. Ainsi D est diagonale et a pour unique valeur propre x. Dans ces conditions : $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ donc $D = x\, I_2$.

Alors : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix} = A = PDP^{-1} = P(x\, I_2)P^{-1} = x\, PI_2P^{-1} = x\, PP^{-1} = x\, I_2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Cela n'est pas très vraisemblable dans la mesure où -1 n'est pas franchement égal à 0 !

Par conséquent A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Troisième cas $x^2 - y > 0$. L'équation (1) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. Ainsi A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant deux valeurs propres réelles et distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } x^2 - y \text{ est strictement positif.}}$$

2) $\boxed{\text{Dans la suite si } T \text{ est une variable aléatoire nous noterons } F_T \text{ sa fonction de répartition.}}$

a) X^2 prend ses valeur dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_{X^2}(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ F_{X^2}(x) = 1$.

$\forall x \in [0,1[,\ F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R},\quad F_X(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ z & \text{si } z \in [0,1[\\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Alors $\forall x \in [0,1[,\ F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Vérifions rapidement que X^2 est une variable aléatoire à densité même si cela n'est pas demandé. Notons déjà que X^2 est une variable aléatoire car X en est une.

Rappelons que $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Alors F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que F_{X^2} est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

F_{X^2} est aussi continue sur $]-\infty, 0[$, $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que F_{X^2} est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ et continue à droite en 0 et 1 (normal...).

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{X^2}(x) = 0 = \sqrt{0} = F_{X^2}(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F_{X^2}(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1 = F_{X^2}(1)$. F_{X^2} est donc continue à gauche en 0 et 1.

Finalement F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Ainsi X^2 est une variable aléatoire à densité.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F'_{X^2}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[$, $F'_{X^2}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Posons alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_{X^2} est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_{X^2} sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points donc c'est une densité de X^2.

La fonction f_{X^2} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, est une densité de X^2.

b) $-Y$ prend ses valeur dans $[-1, 0]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, -1[$, $F_{-Y}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{-Y}(x) = 1$.

$\forall x \in [0, 1[$, $F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x) = 1 - F_Y(-x)$.

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R} \;\; F_Y(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, 0[\\ z & \text{si } z \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } z \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Alors $\forall x \in [-1, 0[$, $F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x) = 1 - (-x) = 1 + x = \dfrac{x - (-1)}{0 - (-1)}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ \dfrac{x-(-1)}{0-(-1)} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. Donc $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$. Dans ces conditions :

la fonction f_{-Y} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de $-Y$.

c) • X^2 et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes car X et Y le sont.

• X^2 et $-Y$ sont des variables aléatoires à densité admettant pour densité respectivement f_{X^2} et f_{-Y}.

• f_{-Y} est bornée sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions $X^2 + (-Y)$ est une variable aléatoire à densité et la fonction $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(x - t)\, f_{-Y}(t)\, \mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $X^2 - Y$ est une variable aléatoire à densité et h en est une densité. Déterminons h. Soit x un réel.

$h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(x-t)\, f_{-Y}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f_{X^2}(x-t)\,\mathrm{d}t$ car $\forall t \in \mathbb{R},\quad f_{-Y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Le changement de variable($\mathcal{C}^1$!) $u = x - t$ donne sans difficulté : $h(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+1} f_{X^2}(u)\,\mathrm{d}u$.

Rappelons alors que $\forall u \in \mathbb{R},\quad f_{X^2}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Observons que si x appartient à $]-\infty,-1[$: $[x, x+1] \subset]-\infty, 0[$ et si x appartient à $]1,+\infty[$: $[x, x+1] \subset]1,+\infty[$.

Alors si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, f_{X^2} est nulle sur l'intervalle $[x, x+1]$, donc $h(x) = 0$.

Supposons que x appartienne à $[-1, 0]$. Alors $x + 1 \in [0, 1]$.

Ainsi $h(x) = \displaystyle\int_{0}^{x+1} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \Big[\sqrt{u}\Big]_0^{x+1} = \sqrt{x+1}$.

Supposons que x appartienne à $]0, 1]$ alors $x + 1 \in]1, 2]$.

Ainsi $h(x) = \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \Big[\sqrt{u}\Big]_x^{1} = 1 - \sqrt{x}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-\sqrt{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$X^2 - Y$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-\sqrt{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarque *On a encore :* $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \textit{si } x \in [-1,0] \\ 1-\sqrt{x} & \textit{si } x \in [0,1] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$ *!*

d) Notons S l'événement la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$S = \left\{\omega \in \Omega \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y(\omega) & 2\,X(\omega) \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right\}$.

D'après la question 1 : $S = \Big\{\omega \in \Omega \mid \big(X(\omega)\big)^2 - Y(\omega) > 0\Big\} = \{X^2 - Y > 0\}$.

Ainsi $P(S) = P(X^2 - Y > 0) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \big(1 - \sqrt{t}\big)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

La probabilité pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 2

1) Soit λ un réel non nul. f et $t \to \dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Une intégration par parties simple donne alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\left(\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)\right)\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$.

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a) - \int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)\sin(\lambda b)| + |f(a)\sin(\lambda a)| + \left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)||\sin(\lambda b)| + |f(a)||\sin(\lambda a)| + \int_a^b |f'(t)||\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

Comme : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\right) = 0$, le théorème d'encadrement donne alors sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Remarque Ce qui précède donne de la même manière $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty}\int_a^b f(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$

2) a) Soient a et b deux réels. $\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$.

En ajoutant ces deux égalités et en divisant par 2 on obtient : $\cos a\,\cos b = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \cos\dfrac{t}{2}\,\cos(k\,t) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{t}{2} + k\,t\right) + \cos\left(\dfrac{t}{2} - k\,t\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{2k+1}{2}\,t\right) + \cos\left(\dfrac{1-2k}{2}\,t\right)\right)$.

La fonction cos étant paire on a alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \cos\frac{t}{2}\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right).}$$

b) Soit t un élément de $[0,1]$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\,\cos\frac{t}{2}\,\cos(k\,t)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\,\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right)\right).$$

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right).$$

Une petite translation d'indice au niveau de la seconde somme donne :

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right).$$

Ou : $\displaystyle\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)$. En simplifiant il vient :

$\cos\dfrac{t}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=\dfrac{1}{2}(-1)^n\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\,t\right)-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$. Finalement :

$$\boxed{\forall t\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=\frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)-\cos\frac{t}{2}\right).}$$

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Observons que $\forall t\in[0,1],\ \cos\dfrac{t}{2}\neq 0$. Alors, par division, la question précédente fournit :

$\forall t\in[0,1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=\frac{1}{2}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$. Ou :

$\forall t\in[0,1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\cdot$

En intégrant entre 0 et 1, et par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\int_0^1\cos(k\,t)\,\mathrm{d}t\right)=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\cdot$$

Or $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ (-1)^k\displaystyle\int_0^1\cos(k\,t)\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^k}{k}\Big[\sin(k\,t)\Big]_0^1=(-1)^k\frac{\sin k}{k}=u_k$. Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}u_k=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\cdot}$$

3) Notons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|$.

Considérons alors la fonction $g:t\to\dfrac{1}{2\cos\frac{t}{2}}\cdot$ g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t\right|$.

La première question donne : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 g(t)\cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t=0$ car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t=0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t\right|=0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=-\frac{1}{2}\cdot$ Ce qui signifie que la série de terme général u_n est convergente et de somme $-\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n=(-1)^n\frac{\sin n}{n}\text{ converge et }\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}=-\frac{1}{2}\cdot}$$

EXERCICE 3

► Dans la suite si λ est une valeur propre de f nous noterons SEP (f, λ) le sous-espace propre de f associé à λ.

1) a) Supposons que f est un automorphisme de E. Alors $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E$.

Clairement $\{0_E\} \cap E = \{0_E\}$ et $\{0_E\} + E = E$ donc $\{0_E\}$ et E sont supplémentaires dans E !

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est un automorphisme de } E\text{, alors on a bien } E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.}$$

b) Ceci est une question de cours !

Soit x un élément de E. Il existe un unique élément (x_F, x_G) de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Alors $s(x) = x_F - x_G = x_F + (-x_G)$.

Comme x_F est un élément de F et $-x_G$ est un élément de G on a : $s\big(s(x)\big) = x_F - (-x_G)$.

Ainsi $s^2(x) = s\big(s(x)\big) = x_F + x_G = x$ et ceci pour tout élément x de E. Donc :

$$\boxed{s^2 = \operatorname{Id}_E.}$$

Dans ces conditions $s \circ s = \operatorname{Id}_E$ donc s est une bijection de E sur E et $s^{-1} = s$. Alors s est un automorphisme de E.

La question précédente donne alors :

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} s \oplus \operatorname{Im} s.}$$

2) a) Supposons que f est l'endomorphisme nul. Alors $\operatorname{Ker} f = E$ et $\operatorname{Im} f = \{0_E\}$ donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont encore supplémentaires dans E.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est l'endomorphisme nul on a } E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.}$$

b) (i) f n'est pas bijectif et E est de dimension finie donc f n'est pas injectif. Alors $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au vecteur nul ce qui montre que 0 est une valeur propre de f.

Supposons que 0 est la seule valeur propre de f. Comme f est diagonalisable, le sous-espace propre de f associé à 0 est E donc $\operatorname{Ker} f = E$. Alors f est l'endomorphisme nul. Ceci contredit l'hypothèse. Finalement :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } f \text{ a au moins une autre valeur propre que } 0.}$$

(ii) Soit λ une valeur propre de f autre que 0 et x un élément du sous-espace propre de f associé à λ.

$f(x) = \lambda\, x$ et λ n'est pas nul donc $x = \dfrac{1}{\lambda}\, f\big(x\big) = f\left(\dfrac{1}{\lambda}\, x\right)$. x est alors un élément de l'image de f.

Donc $\forall x \in \text{SEP } (f, \lambda)\,,\ x \in \operatorname{Im} f$. Par conséquent SEP $(f, \lambda) \subset \operatorname{Im} f$.

$$\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } f \text{ associé à une valeur propre non nulle est inclus dans l'image de } f}.$$

(iii) Posons $\lambda_0 = 0$ et notons λ_1, λ_2, ..., λ_q les valeurs propres non nulles et distinctes de f.

$E = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{q} \text{SEP } (f, \lambda_i)$. Posons $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} \text{SEP } (f, \lambda_i)$. Alors $E = \text{SEP } (f, \lambda_0) \oplus F$ donc $E = \operatorname{Ker} f \oplus F$.

Pour tout élément i de $[\![1,q]\!]$, SEP (f,λ_i) est contenu dans $\operatorname{Im} f$ donc $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q}$SEP (f,λ_i) est contenu dans $\operatorname{Im} f$.

Ainsi F est contenu dans $\operatorname{Im} f$.

De plus $\dim F = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$ car $E = \operatorname{Ker} f \oplus F$. Le théorème du rang donne alors $\dim F = \dim \operatorname{Im} f$.

$F \subset \operatorname{Im} f$ et $\dim F = \dim \operatorname{Im} f < +\infty$ donc $F = \operatorname{Im} f$. Comme $E = \operatorname{Ker} f \oplus F$:

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.}$$

c) E est de dimension finie et $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$ d'après le théorème du rang.

Ainsi suffit-il de démontrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ pour dire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

Soit y un élément de $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la famille des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

$y = f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, f(e_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k\, e_k.$

y est dans $\operatorname{Ker} f$ donc $0_E = f(y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k\, f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k^2\, e_k.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k^2\, e_k = 0_E$ et la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k\, \alpha_k^2 = 0$.

Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. $x_k\, \alpha_k^2 = 0$ donc $x_k = 0$ ou $\alpha_k^2 = 0$. Alors $x_k = 0$ ou $\alpha_k = 0$ donc $x_k\, \alpha_k = 0$.

Finalement $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k\, \alpha_k = 0$ donc $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k\, e_k = 0_E$.

Ceci achève de redémontrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

3) a) (i) y appartient à $\operatorname{Im} f$ donc il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.

Comme y appartient également à $\operatorname{Ker} f$: $f^2(x) = f(y) = 0_E$.

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est un élément de } \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f, \text{ il existe un élément } x \text{ de } E \text{ tel que } y = f(x) \text{ et } f^2(x) = 0_E.}$$

(ii) $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ f^k(x) = f^{k-2}\big(f^2(x)\big) = f^{k-2}(0_E) = 0_E$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à deux on a } f^k(x) = 0_E.}$$

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $P(f)(x) = 0_E$. Alors $0_E = P(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k\, f^k(x) = a_1\, f(x) = a_1\, y$.

Ainsi $a_1\, y = 0_E$ et $a_1 \neq 0$ donc $y = 0_E$.

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est un élément de } \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f,\ y = 0_E\ !}$$

b) La question précédente montre que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

E est de dimension finie on peut alors dire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E. On a encore :

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.}$$

Exercice   Envisager une réciproque pour le résultat de **3)**.

Une solution de l'exercice

Soit f un endomorphisme de E.

• Nous venons de voir que si f possède un polynôme annulateur (non nul) dont 0 est une racine simple alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. Montrons la réciproque.

• Supposons que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. Montrons que f possède un polynôme annulateur (non nul) dont 0 est une racine simple.

D'après le cours f possède un polynôme annulateur non nul. Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes annulateurs non nuls de f est non vide.

Alors $\{\deg R; R \in \mathcal{S}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle possède alors un plus petit élément r.

Soit T un élément de $\mathcal{S}$ de degré r. Envisageons deux cas.

Premier cas : 0 n'est pas racine de T.

Posons alors $P = X\,T$. 0 est racine simple de P et $P(f) = f \circ T(f) = f \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

P est un polynôme annulateur (non nul) de f et 0 en est une racine simple.

Deuxième cas : 0 est racine de T.

Montrons par l'absurde que 0 est une racine simple de T.

Supposons le contraire. Alors il existe un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $T = X^2\,Q$.

Soit x un élément de E. $0_E = T(f)(x) = \big(f^2 \circ Q(f)\big)(x) = f\Big(f\big(Q(f)(x)\big)\Big)$.

Alors $f\big(Q(f)(x)\big)$ appartient à $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ donc $f\big(Q(f)(x)\big) = 0_E$.

Donc $\forall x \in E,\ f\big(Q(f)(x)\big) = 0_E$ ou $\forall x \in E,\ (f \circ Q(f))(x) = 0_E$. Cela signifie que XQ est un polynôme annulateur (non nul) de F.

Ainsi $XQ \in \mathcal{S}$ et $\deg(XQ) = r - 1$ (car $r = \deg T = \deg(X^2\,Q)$). Ceci contredit alors le fait que r soit le minimum de $\{\deg R; R \in \mathcal{S}\}$.

Finalement : T est un polynôme annulateur (non nul) de f et 0 en est une racine simple.

Dans les deux cas f possède un polynôme annulateur (non nul) dont 0 est une racine simple.

PROBLÈME

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1) Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Nous imaginerons que les prévisions du joueur J_i pour chaque lancer sont indépendantes et qu'elles se font au hasard. Dans ces conditions, pour chaque lancer, la probabilité pour que la prévision du joueur J_i soit bonne est $\dfrac{1}{2}\cdot$

Les $2p+1$ prévisions du joueur J_i étant indépendantes :

la variable aléatoire X_i égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i suit la loi binômiale de paramètres $2p+1$ et $\dfrac{1}{2}\cdot$

2) a) $S_p + T_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}.$

La formule du binôme donne : $S_p + T_p = (1+1)^{2p+1} = 2^{2p+1}$.

$$\boxed{S_p + T_p = 2^{2p+1}.}$$

b) Rappelons que $\forall k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $\dbinom{2p+1}{k} = \dbinom{2p+1}{2p+1-k}$. Ainsi $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2p+1-k}$.

Le changement d'indice $i = 2p+1-k$ donne alors : $S_p = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{i} = T_p$.

$$\boxed{S_p = T_p.}$$

c) $2\,S_p = S_p + T_p = 2^{2p+1}$ donc $S_p = \dfrac{2^{2p+1}}{2} = 2^{2p}$.

$r_p = P(X_1 \leqslant p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} = \frac{S_p}{2^{2p+1}} = \frac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{S_p = T_p = 2^{2p} \text{ et } r_p = \frac{1}{2}\cdot}$$

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Pour simplifier nous dirons dans la suite que le joueur J_i gagne (ou gagne quelque chose) si G_i prend une valeur non nulle, autrement dit si J_i a le plus grand nombre de prévisions correctes.

1) Nous allons en fait montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1}\ ;\ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

•• Ou le joueur J_1 ne gagne rien et G_1 prend la valeur 0. Ou le joueur J_1 "gagne quelque chose" ; si nous notons alors j le nombre de joueurs ayant gagné avec lui alors j est un élément de $[\![0, n-1]\!]$ et G_1 prend la valeur $\dfrac{n!}{j+1}\cdot$

Ainsi $G_1(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1}\ ;\ [\![0, n-1]\!] \right\}$.

•• Montrons l'inclusion contraire.

Notons que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall k \in [\![0,2p+1]\!],\ P(X_i = k) \neq 0$.

• L'événement $\{G_1 = 0\}$ contient l'événement $\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}$.

De plus : $P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}) = P(X_1 = 0)\,P(X_2 = 1) \neq 0$ (par indépendance).

Donc $P(G_1 = 0) \neq 0$ et nécessairement $0 \in G_1(\Omega)$.

• Soit j un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

L'événement $\left\{G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ contient l'événement $\{X_1 = 1\}\cap\{X_2 = 1\}\cap\cdots\cap\{X_{j+1} = 1\}\cap\{X_{j+2} = 0\}\cap\cdots\cap\{X_n = 0\}$.
Par indépendance :

$$P\left(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \cdots \cap \{X_{j+1} = 1\} \cap \{X_{j+2} = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}\right) = \prod_{k=1}^{j+1} P(X_k = 1) \prod_{k=j+2}^{n} P(X_k = 0) \neq 0.$$

Donc $P\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) \neq 0$ et nécessairement $\dfrac{n!}{j+1} \in G_1(\Omega)$. Finalement :

$$\boxed{G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\frac{n!}{j+1}\ ;\ [\![0, n-1]\!]\right\}.}$$

2) a) L'événement $\left\{G_1 = \dfrac{n!}{n}\right\}$ se réalise si et seulement si tous les joueurs gagnent.

L'événement $\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{n}\right\}$ se réalise si et seulement si tous les joueurs gagnent en n'ayant aucune prévision correcte.

Alors $P\left(\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{n}\right\}\right) = P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\})$.

Par indépendance : $P\left(\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{n}\right\}\right) = P(X_1 = 0)\,P(X_2 = 0) \cdots P(X_n = 0) = q_0^n$.

Alors $P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = \dfrac{P\left(\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{n}\right\}\right)}{P(X_1 = 0)} = \dfrac{q_0^n}{q_0} = q_0^{n-1}$.

$$\boxed{P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = q_0^{n-1}.}$$

b) Soit j un élément de $[\![0, n-2]\!]$. $P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = \dfrac{P\left(\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right)}{P(X_1 = 0)}$.

Supposons que le joueur J_1 gagne en ne faisant aucune prévision correcte. Nécessairement tous les autres joueurs n'ont fait aucune prévision correcte. Alors les n joueurs se sont partagés les $n!$ euros. J_1 a donc gagné $\dfrac{n!}{n}$ euros.

L'événement $\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ est donc impossible car $j+1$ est strictement inérieur à n. Sa probabilité est nulle.

Alors $P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = \dfrac{P\left(\{X_1 = 0\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right)}{P(X_1 = 0)} = 0$.

$$\boxed{\text{Si } j \text{ est un élément de } [\![0, n-2]\!] : P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = 0.}$$

Remarque *Il résulte de ce qui précède que* $P_{\{X_1=0\}}(G_1 = 0) = 1 - q_0^{n-1}$.

c) $E(G_1 \mid X_1 = 0) = 0 \times P_{\{X_1=0\}}\,(G_1 = 0) + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1}\,P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right)$.

$E(G_1 \mid X_1 = 0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1}\,P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \frac{n!}{n}\,P_{\{X_1=0\}}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right)$ d'après 2) b).

$E(G_1 \mid X_1 = 0) = \dfrac{n!}{n}\,q_0^{n-1} = (n-1)!\,q_0^{n-1}$ d'après 2) a).

$$\boxed{E(G_1 \mid X_1 = 0) = (n-1)!\,q_0^{n-1}\ .}$$

3) a) Soient k un élément non nul de $X_1(\Omega)$ et j un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

$P_{\{X_1=k\}}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = \dfrac{P\left(\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right)}{P(X_1 = k)}$.

$\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ se réalise si et seulement si X_1 fait exactement k prévisions correctes et gagne avec exactement j autres joueurs.

$\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ se réalise si et seulement si X_1 fait exactement k prévisions correctes avec j autres joueurs, $n-1-j$ les autres joueurs faisant au plus $k-1$ prévisions correctes.

Pour simplifier (! !), notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties de $[\![2, n]\!]$ ayant j éléments. Notons également $\overline{I}$ le complémentaire dans $[\![2, n]\!]$ d'une partie I de $\mathcal{I}$.

Alors : $\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right\} = \displaystyle\bigcup_{I\in\mathcal{I}} \left(\{X_1 = k\} \cap \left(\bigcap_{i\in I}\{X_i = k\}\right) \cap \left(\bigcap_{i\in\overline{I}}\{X_i \leqslant k-1\}\right)\right)$.

Par incompatibilité on obtient :

$$P\left(\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right) = \sum_{I\in\mathcal{I}} P\left(\{X_1 = k\} \cap \left(\bigcap_{i\in I}\{X_i = k\}\right) \cap \left(\bigcap_{i\in\overline{I}}\{X_i \leqslant k-1\}\right)\right).$$

Par indépendance ceci donne :

$$P\left(\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \left(P(X_1 = k) \prod_{i\in I} P(X_i = k) \prod_{i\in\overline{I}} P(X_i \leqslant k-1)\right).$$

Si I est un élément de $\mathcal{I}$, I a j éléments et $\overline{I}$ a $n-1-j$ éléments.

De plus $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X_i = k) = q_k$ et $P(X_i \leqslant k-1) = r_{k-1}$. Ainsi :

$$P\left(\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \left(q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right).$$

Or $\mathcal{I}$ est l'ensemble des parties de $[\![2, n]\!]$ ayant j éléments. Donc le cardinal de $\mathcal{I}$ est $\dbinom{n-1}{j}$. Dans ces conditions :

$P\left(\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right\}\right) = \operatorname{Card}\mathcal{I} \times \left(q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right) = \dbinom{n-1}{j}\left(q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right)$. Alors :

$$P_{\{X_1=k\}}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \frac{P\left(\{X_1 = k\} \cap \left\{G_1 = \frac{n!}{j+1}\right\}\right)}{P(X_1 = k)} = \frac{\binom{n-1}{j}\left(q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right)}{q_k} = \binom{n-1}{j} q_k^j\, r_{k-1}^{n-1-j}.$$

Pour tout élément non nul k de $X_1(\Omega)$ et pour tout élément j de $[\![0, n-1]\!]$, on a : $P_{\{X_1=k\}}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = \dbinom{n-1}{j} q_k^j\, r_{k-1}^{n-1-j}$.

b) Soit j un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

$$\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{(n-1)!}{(j+1)\,j!\,(n-1-j)!} = \frac{n!}{n\,(j+1)!\,\big(n-(j+1)!\big)} = \frac{1}{n}\binom{n}{j+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } j \text{ de } [\![0, n-1]\!] \text{ on a} : \frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{1}{n}\binom{n}{j+1}.}$$

Soit k un élément non nul de $X_1(\Omega)$. $E(G_1 \mid X_1 = k) = 0 \times P_{\{X_1=k\}}\,(G_1 = 0) + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1}\, P_{\{X_1=k\}}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right)$.

$$E(G_1 \mid X_1 = k) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{n!}{j+1}\binom{n-1}{j}(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(n!\,\frac{1}{n}\binom{n}{j+1}(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right).$$

$E(G_1 \mid X_1 = k) = \dfrac{(n-1)!}{q_k}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\binom{n}{j+1}(q_k)^{j+1}\,(r_{k-1})^{n-1-j}\right)$. Le changement d'indice $i = j+1$ donne alors :

$E(G_1 \mid X_1 = k) = \dfrac{(n-1)!}{q_k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i}(q_k)^i\,(r_{k-1})^{n-i}\right)$. En appliquant la formule du binôme on obtient :

$$E(G_1 \mid X_1 = k) = \frac{(n-1)!}{q_k}\left((q_k + r_{k-1})^n - \binom{n}{0}(q_k)^0\,(r_{k-1})^{n-0}\right) = \frac{(n-1)!}{q_k}\Big((q_k + r_{k-1})^n - (r_{k-1})^n\Big).$$

Or $q_k + r_{k-1} = P(X_1 = k) + P(X_1 \leqslant k-1) = P(X_1 \leqslant k) = r_k$ donc $E(G_1 \mid X_1 = k) = \dfrac{(n-1)!}{q_k}\Big((r_k)^n - (r_{k-1})^n\Big)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément non nul } k \text{ de } X_1(\Omega) \text{ on a } E(G_1 \mid X_1 = k) = (n-1)!\,\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}.}$$

c) On pose $r_{-1} = 0$. Alors pour $k = 0$: $(n-1)!\,\dfrac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k} = (n-1)!\,\dfrac{(r_0)^n - (r_{-1})^n}{q_0} = (n-1)!\,\dfrac{r_0^n}{q_0}$.

Notons alors que $r_0 = P(X_1 \leqslant 0) = P(X_1 = 0) = q_0$.

Alors pour $k = 0$: $(n-1)!\,\dfrac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k} = (n-1)!\,\dfrac{q_0^n}{q_0} = (n-1)!\,q_0^{n-1} = E(G_1 \mid X_1 = 0) = E(G_1 \mid X_1 = k)$.

$$\boxed{\text{En posant } r_{-1} = 0 \text{ on a encore } E(G_1 \mid X_1 = k) = (n-1)!\,\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k} \text{ pour } k = 0.}$$

4) $\big(\{X_1 = k\}\big)_{k \in [\![0, 2p+1]\!]}$ et un système complet dévénements et $\forall k \in [\![0, 2p+1]\!],\ P(X_1 = k) \neq 0$.

G_1 prenant un nombre fini de valeurs, G_1 possède une espérance qui vaut : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1} E(G_1 \mid X_1 = k)\,P(X_1 = k)$.

$$E(G_1) = \sum_{k=0}^{2p+1} E(G_1 \mid X_1 = k)\,P(X_1 = k) = (n-1)!\sum_{k=0}^{2p+1}\left(\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}\,q_k\right).$$

$$E(G_1) = (n-1)!\left(\sum_{k=0}^{2p+1}(r_k)^n - \sum_{k=0}^{2p+1}(r_{k-1})^n\right) = (n-1)!\Big((r_{2p+1})^n - (r_{-1})^n\Big) = (n-1)!\,(r_{2p+1})^n.$$

$E(G_1) = (n-1)!\,(P(X_1 \leqslant 2p+1))^n$. Or $P(X_1 \leqslant 2p+1) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{E(G_1) = (n-1)!.}$$

Partie 3 : $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{J_2}$ forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.

1) a) Supposons que J_1 et J_2 aient fait respectivement α et β prévisions correctes. Alors $\beta = 2p+1-\alpha$.

Ou $\alpha \geqslant p+1$ et alors $\beta \leqslant 2p+1-(p+1) = p$. Ou $\alpha < p+1$ et nécessairement $\beta > 2p+1-(p+1) = p$.

On a donc $\alpha \geqslant p+1$ et $\beta < p+1$ ou $\alpha < p+1$ et $\beta \geqslant p+1$.

Ainsi si J_1 a fait au moins $p+1$ prévisions correctes, J_2 en a fait strictement moins que $p+1$ et réciproquement.

$$\boxed{\text{Un et un seul des joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ a au moins } (p+1) \text{ prévisions correctes.}}$$

b) De ce qui précède il résulte que : $Y(\Omega) \subset [\![p+1, 2p+1]\!]$.

Soit k un élément de $[\![p+1, 2p+1]\!]$. L'événement $\{Y = k\}$ contient l'événement $\{X_1 = k\}$ qui est de probabilité non nulle.

Alors $P(Y = k) \neq 0$ ce qui suffit pour dire que k est un élément de $Y(\Omega)$. Finalement :

$$\boxed{Y\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!].}$$

2) Si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F l'un des deux joueurs a trois prévisions correctes et Y prend la valeur 3.

Dans le cas contraire les deux joueurs ont au moins une prévision fausse, Y ne prend donc pas la valeur 3 tout en prenant une valeur de l'ensemble $[\![2, 3]\!]$; Y prend la valeur 2.

$$\boxed{\text{Dans l'exemple donné au début de cette partie, } Y \text{ prend la valeur 3 si les lancers donnent F, P, P ou P, F, F et } Y \text{ prend la valeur 2 sinon.}}$$

3) Soit k un élément de $[\![p+1, 2p+1]\!]$.

L'événement $\{Y = k\}$ est la réunion des événements $\{X_1 = k\}$ et $\{X_1 = 2p+1-k\}$ et ces deux événements sont incompatibles. Alors :

$$P(Y = k) = P(X_1 = k) + P(X_1 = 2p+1-k) = q_k + q_{2p+1-k} = q_k + \binom{2p+1}{2p+1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} = q_k + \binom{2p+1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1}.$$

$P(Y = k) = q_k + q_k = 2\,q_k$.

$$\boxed{\forall k \in [\![p+1, 2p+1]\!],\ P(Y = k) = 2\,q_k.}$$

4) Montrons que $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1}\ ;\ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$ si p n'est pas nul et $G'(\Omega) = \left\{\dfrac{n!}{j+1}\ ;\ j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$ si p est nul.

Notons d'abord que J_1 et J_2 ne peuvent pas gagner "quelque chose" simultanément.

•• Ou les deux joueurs J_1 et J_2 ne gagnent rien et G' prend la valeur 0. Ou un des deux joueurs gagne quelque chose (et l'autre rien) ; si nous notons alors j le nombre de joueurs ayant gagné avec lui alors j est un élément de $[\![0, n-2]\!]$ et G' prend la valeur $\dfrac{n!}{j+1}$.

Ainsi $G'(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1}\ ;\ [\![0, n-2]\!]\right\}$.

•• **Étudions** l'inclusion contraire.

Rappelons que $\forall i \in [\![1,n]\!] - \{2\},\ \forall k \in [\![0,2p+1]\!],\ P(X_i = k) \neq 0$.

- Soit j un élément de $[\![0,n-2]\!]$.

Soit A l'événement $\{X_1 = 0\} \cap \{X_3 = 2p+1\} \cap \cdots \cap \{X_{j+2} = 2p+1\} \cap \{X_{j+3} = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}$.

Si A est réalisé il y a exactement $j+1$ joueurs gagnants : $J_2,\ J_3,\ ...,\ J_{j+2}$, donc $\left\{G' = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ est également réalisé.

Par conséquent l'événement $\left\{G' = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ contient A.

Par indépendance on a : $P(A) = P(X_1 = 0) \displaystyle\prod_{k=3}^{j+2} P(X_k = 1) \prod_{k=j+3}^{n} P(X_k = 0) \neq 0$ (encore à deux abus près...).

Donc $P\left(G' = \dfrac{n!}{j+1}\right) \neq 0$ et nécessairement $\dfrac{n!}{j+1} \in G'(\Omega)$.

- Si $p = 0$, il n'y a qu'un lancer donc ou J_1 fait une prévision correcte et il gagne ; dans le cas contraire c'est J_2 qui est gagnant. Donc si $p = 0$, G' ne peut pas prendre la valeur 0.

Supposons p non nul. L'événement $\{G' = 0\}$ contient l'événement $\{X_1 = 1\} \cap \{X_3 = 2p+1\}$ (si J_1 a une prévision correcte et une seule, J_2 en a exactement $2p$).

De plus : $P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_3 = 2p+1\}) = P(X_1 = 0)\, P(X_3 = 2p+1) \neq 0$ (par indépendance).

Donc $P(G' = 0) \neq 0$ et nécessairement $0 \in G'(\Omega)$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1}\ ;\ [\![0,n-2]\!]\right\} \text{ si } p \text{ n'est pas nul.} \\[2ex] G'(\Omega) = \left\{\dfrac{n!}{j+1}\ ;\ [\![0,n-2]\!]\right\} \text{ si } p \text{ est nul.} \end{array}}$$

5) a) Soient k un élément de $[\![p+1,2p+1]\!]$ et j un élément de $[\![0,n-2]\!]$ (et non pas $[\![0,n-1]\!]$).

$$P_{\{Y=k\}}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \frac{P\left(\{Y=k\} \cap \left\{G' = \frac{n!}{j+1}\right\}\right)}{P(Y=k)}.$$

$\{Y=k\} \cap \left\{G' = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ se réalise si et seulement si X_1, ou X_2, a fait k prévisions correctes et gagne avec exactement j autres joueurs de la liste $(J_3, J_4, \ldots, J_n)$.

$\{Y=k\} \cap \left\{G' = \dfrac{n!}{j+1}\right\}$ se réalise si et seulement si X_1, ou X_2, a fait exactement k prévisions correctes avec j autres joueurs de la liste $(J_3, J_4, \ldots, J_n)$, les autres joueurs de cette liste faisant au plus $k-1$ prévisions correctes.

Pour simplifier, nous noterons $\mathcal{I}'$ l'ensemble des parties de $[\![3,n]\!]$ ayant j éléments. Nous noterons également $\overline{I}$ le complémentaire dans $[\![3,n]\!]$ d'une partie I de $\mathcal{I}'$.

Alors : $\{Y=k\} \cap \left\{G' = \dfrac{n!}{j+1}\right\} = \displaystyle\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} \left(\{Y=k\} \cap \left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = k\}\right) \cap \left(\bigcap_{i \in \overline{I}} \{X_i \leqslant k-1\}\right)\right)$.

Par incompatibilité on obtient :

$$P\left(\{Y=k\} \cap \left\{G' = \frac{n!}{j+1}\right\}\right) = \sum_{I \in \mathcal{I}'} P\left(\{Y=k\} \cap \left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = k\}\right) \cap \left(\bigcap_{i \in \overline{I}} \{X_i \leqslant k-1\}\right)\right).$$

Par indépendance ceci donne : $P\left(\{Y=k\}\cap\left\{G'=\dfrac{n!}{j+1}\right\}\right)=\displaystyle\sum_{I\in\mathcal{I}'}\left(P(Y=k)\prod_{i\in I}P(X_i=k)\prod_{i\in\overline{I}}P(X_i\leqslant k-1)\right)$.

Si I est un élément de $\mathcal{I}'$, I a j éléments et $\overline{I}$ a $n-2-j$ éléments.

De plus $\forall i\in[\![3,n]\!],\ P(X_i=k)=q_k$ et $P(X_i\leqslant k-1)=r_{k-1}$. Ainsi :

$P\left(\{Y=k\}\cap\left\{G'=\dfrac{n!}{j+1}\right\}\right)=\displaystyle\sum_{I\in\mathcal{I}'}\left(2\,q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)$.

Or $\mathcal{I}'$ est l'ensemble des parties de $[\![3,n]\!]$ ayant j éléments. Donc le cardinal de $\mathcal{I}'$ est $\dbinom{n-2}{j}$. Dans ces conditions :

$P\left(\{Y=k\}\cap\left\{G'=\dfrac{n!}{j+1}\right\}\right)=\operatorname{Card}\mathcal{I}'\times\left(2\,q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)=\dbinom{n-2}{j}\left(2\,q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)$. Alors :

$P_{\{Y=k\}}\left(G'=\dfrac{n!}{j+1}\right)=\dfrac{P\left(\{Y=k\}\cap\left\{G'=\frac{n!}{j+1}\right\}\right)}{P(Y=k)}=\dfrac{\binom{n-2}{j}\left(2\,q_k\,(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)}{2\,q_k}=\dbinom{n-2}{j}\,q_k^j\,r_{k-1}^{n-2-j}$.

$$\boxed{\forall k\in[\![p+1,2p+1]\!],\ \forall j\in[\![0,n-2]\!],\ P_{\{Y=k\}}\left(G'=\dfrac{n!}{j+1}\right)=\dbinom{n-2}{j}\,q_k^j\,r_{k-1}^{n-2-j}.}$$

b) Soit k un élément de $[\![p+1,2p+1]\!]$.

$P(Y=k)$ est non nulle et G' prend un nombre fini de valeurs donc $E(G'\mid Y=k)$ existe et vaut :

$E(G'\mid Y=k)=0\times P_{\{Y=k\}}(G'=0)+\displaystyle\sum_{j=0}^{n-2}\dfrac{n!}{j+1}\,P_{\{Y=k\}}\left(G'=\dfrac{n!}{j+1}\right)$ (même si $p=0$...).

$E(G'\mid Y=k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-2}\left(\dfrac{n!}{j+1}\dbinom{n-2}{j}(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)$. Remarquons encore que :

$\forall j\in[\![0,n-2]\!],\ \dfrac{1}{j+1}\dbinom{n-2}{j}=\dfrac{(n-2)!}{(j+1)\,j!\,(n-2-j)!}=\dfrac{(n-1)!}{(n-1)\,(j+1)!\,\big((n-1)-(j+1)\big)!}=\dfrac{1}{n-1}\dbinom{n-1}{j+1}$.

Alors $E(G'\mid Y=k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-2}\left(n!\,\dfrac{1}{n-1}\dbinom{n-1}{j+1}(q_k)^j\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)=\dfrac{(n)!}{(n-1)\,q_k}\sum_{j=0}^{n-2}\left(\dbinom{n-1}{j+1}(q_k)^{j+1}\,(r_{k-1})^{n-2-j}\right)$.

Le changement d'indice $i=j+1$ donne alors :

$E(G'\mid Y=k)=\dfrac{n\,(n-2)!}{q_k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(\dbinom{n-1}{i}(q_k)^i\,(r_{k-1})^{n-1-i}\right)$. En appliquant la formule du binôme on obtient :

$E(G'\mid Y=k)=\dfrac{n\,(n-2)!}{q_k}\left((q_k+r_{k-1})^{n-1}-\dbinom{n-1}{0}(q_k)^0\,(r_{k-1})^{n-1-0}\right)$.

$E(G'\mid Y=k)=\dfrac{n\,(n-2)!}{q_k}\left((q_k+r_{k-1})^{n-1}-(r_{k-1})^{n-1}\right)$.

Or $q_k+r_{k-1}=P(X_1=k)+P(X_1\leqslant k-1)=P(X_1\leqslant k)=r_k$ donc $E(G'\mid Y=k)=\dfrac{n\,(n-2)!}{q_k}\left((r_k)^{n-1}-(r_{k-1})^{n-1}\right)$.

$$\boxed{\forall k\in[\![p+1,2p+1]\!],\ E(G'\mid Y=k)=n\,(n-2)!\,\dfrac{(r_k)^{n-1}-(r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.}$$

6) a) $\big(\{Y=k\}\big)_{k\in[\![p+1,2p+1]\!]}$ est un système complet dévénements et $\forall k\in[\![p+1,2p+1]\!],\ P(Y=k)=2\,q_k\neq 0$.

G' prenant un nombre fini de valeurs, G' possède une espérance qui vaut : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1}E(G'\mid Y=k)\,P(Y=k)$.

$$E(G') = \sum_{k=p+1}^{2p+1} E(G' \mid Y = k)\, P(Y = k) = n\,(n-2)! \sum_{k=p+1}^{2p+1} \left(\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}\, 2\, q_k \right).$$

$$E(G') = 2\,n\,(n-2)! \left(\sum_{k=p+1}^{2p+1} (r_k)^{n-1} - \sum_{k=p+1}^{2p+1} (r_{k-1})^{n-1} \right) = 2\,n\,(n-2)! \left((r_{2p+1})^{n-1} - (r_p)^{n-1} \right).$$

Or $P(X_1 \leqslant 2p+1) = 1$ et $r_p = \dfrac{1}{2}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{E(G') = 2\,n\,(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).}$$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ 2^{n-1} > n$.

- $2^{3-1} = 4 > 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 3$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![3, +\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$2^{(n+1)-1} = 2 \times 2^{n-1}$ et $2^{n-1} > n$ (par hypothèse de récurrence) donc $2^{(n+1)-1} > 2n = (n+1) + (n-1) > n+1$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ 2^{n-1} > n.}$$

c) $G' = G'_1 + G'_2$, $G'_1 = G'_2$ et G', G'_1, G'_2 sont des variables aléatoires finies.

Donc G'_1 et G'_2 possèdent une espérance. De plus $E(G') = E(G'_1) + E(G'_2)$ et $E(G'_1) = E(G'_2)$.

Dans ces conditions : $E(G'_1) = E(G'_2) = \dfrac{1}{2}\, E(G') = n\,(n-2)! \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \right)$.

$$\boxed{E(G'_1) = E(G'_2) = n\,(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).}$$

$$E(G'_1) - E(G_1) = n\,(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - (n-1)! = (n-2)! \left(n \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - (n-1) \right) = (n-2)! \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right).$$

Comme n est supérieur ou égal à 3 : $2^{n-1} > n$ donc $1 - \dfrac{n}{2^{n-1}} > 0$ et ainsi $E(G'_1) - E(G_1) > 0$.

La stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est donc avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.
