

## EXERCICE 1

1) **a.**  $X$  possède une espérance et une variance qui ont pour valeur commune  $\lambda$ .

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ .

Ainsi  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, P(|X - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda}{\varepsilon^2}$ .

$\lambda$  étant strictement positif nous pouvons écrire que  $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{\lambda}{\lambda^2}$ .

Une simplification évidente donne alors :

$$P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**b.**  $\{|X - \lambda| \geq \lambda\} = \{X - \lambda \geq \lambda\} \cup \{X - \lambda \leq -\lambda\} = \{X \geq 2\lambda\} \cup \{X \leq 0\}$ . Alors  $\{X \geq 2\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geq \lambda\}$ .

La croissance de  $P$  fournit  $P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda)$  et a) donne alors :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

2) **a.** Montrons l'inégalité de Markov. Soit  $a$  un réel strictement positif.

**Version 1** Notons  $S$  l'événement  $\{Y \geq a\}$  et  $\mathbb{I}_S$  son indicatrice.  $\mathbb{I}_S$  possède une espérance qui vaut  $P(S)$ .

Montrer que  $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$  revient à montrer que  $a P(S) \leq E(Y)$  ou que  $a E(\mathbb{I}_S) \leq E(Y)$ .

Cela revient encore à montrer que :  $E(Y - a \mathbb{I}_S) \geq 0$ .

Montrons en fait que  $Y - a \mathbb{I}_S$  ne prend que des valeurs positives ou nulles. Soit  $\omega$  un élément de  $\Omega$ .

Si  $\omega$  appartient à  $S$  :  $a \leq Y(\omega)$  donc  $0 \leq Y(\omega) - a = Y(\omega) - a \mathbb{I}_S(\omega) = (Y - a \mathbb{I}_S)(\omega)$  ;  $(Y - a \mathbb{I}_S)(\omega) \geq 0$ .

Si  $\omega$  n'appartient pas à  $S$  :  $(Y - a \mathbb{I}_S)(\omega) = Y(\omega) - a \mathbb{I}_S(\omega) = Y(\omega) \geq 0$  ( $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ).

Ainsi  $\forall \omega \in \Omega, (Y - a \mathbb{I}_S)(\omega) \geq 0$ .  $Y - a \mathbb{I}_S$  ne prend que des valeurs positives donc son espérance est positive.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

**Version 2** Posons  $I = \{i \in \mathbb{N} \mid y_i \geq a\}$ .

Si  $I$  est vide  $P(Y \geq a) = 0$  et l'inégalité est alors vérifiée car  $\frac{E(Y)}{a}$  est un réel positif ou nul.

Supposons  $I$  non vide.

$$\{Y \geq a\} = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \geq a\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N}, Y(\omega) = y_i \text{ et } y_i \geq a\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, Y(\omega) = y_i\}.$$

$$\text{Alors } \{Y \geq a\} = \bigcup_{i \in I} \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_i\} = \bigcup_{i \in I} \{Y = y_i\}.$$

Alors  $P(Y \geq a) = \sum_{i \in I} P(Y = y_i)$  car la réunion précédente est constituée d'une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints.

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i P(Y = y_i) \geq \sum_{i \in I} y_i P(Y = y_i) \text{ car } I \subset \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, y_i P(Y = y_i) \geq 0.$$

Observons que  $\forall i \in I, y_i \geq a$  et  $P(Y = y_i) \geq 0$ . Donc  $\forall i \in I, y_i P(Y = y_i) \geq a P(Y = y_i)$ .

$$\text{Alors } E(Y) \geq \sum_{i \in I} y_i P(Y = y_i) \geq \sum_{i \in I} a P(Y = y_i) = a \sum_{i \in I} P(Y = y_i) = a P(Y \geq a).$$

En divisant par  $a$  qui est strictement positif il vient :  $\frac{E(Y)}{a} \geq P(Y \geq a)$ .

$$\text{Pour tout réel } a \text{ strictement positif : } P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

**b.** Soit  $(a, x)$  un élément de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^+$ . Soit  $\omega$  un élément de  $\Omega$  tel que  $Z(\omega) \geq a$ .

$$Z(\omega) + x \geq a + x > 0 \text{ et ainsi } (Z(\omega) + x)^2 \geq (a + x)^2 \text{ ou } (Z + x)^2(\omega) \geq (a + x)^2.$$

L'événement  $\{Z \geq a\}$  est donc contenu dans l'événement  $\{(Z + x)^2 \geq (a + x)^2\}$ .

Alors la croissance de  $P$  donne :  $P(Z \geq a) \leq P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2)$ .

$$\forall (a, x) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^+, P(Z \geq a) \leq P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2).$$

**c.** Soit  $(a, x)$  un élément de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^+$ .

$(Z + x)^2$  est une variable aléatoire discrète à valeur positives.

Montrons que  $(Z + x)^2$  possède une espérance.

$Z$  possède une variance donc  $E(Z)$  et  $E(Z^2)$  existent. Alors  $(Z + x)^2 = Z^2 + 2xZ + x^2$  possède une espérance égale à  $E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2$ .

$$E(Z) = 0 \text{ et } E(Z^2) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = V(Z) = \sigma^2 \text{ donc } E((Z + x)^2) = E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2.$$

En appliquant 2) a. à  $(Z + x)^2$  avec le réel strictement positif  $(a + x)^2$ , on obtient :

$$P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2) \leq \frac{E((Z + x)^2)}{(a + x)^2} = \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

$$\text{Alors } P(Z \geq a) \leq P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

$$\forall (a, x) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^+, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

**d.** Soit  $a$  un réel strictement positif.

Posons  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$  et notons que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(Z \geq a) \leq f(x)$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  car c'est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{2x(a+x)^2 - (\sigma^2 + x^2) 2(a+x)}{(a+x)^4} = \frac{2(a+x)}{(a+x)^4} (xa + x^2 - \sigma^2 - x^2) = \frac{2a}{(a+x)^3} \left(x - \frac{\sigma^2}{a}\right).$$

$f'$  est négative sur  $\left[0, \frac{\sigma^2}{a}\right]$  et positive sur  $\left[\frac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$  donc  $f$  est décroissante sur  $\left[0, \frac{\sigma^2}{a}\right]$  et croissante sur  $\left[\frac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$ . Alors  $f$  possède un minimum en  $x_0 = \frac{\sigma^2}{a}$ .

Hum, un minimum pour majorer  $P(Z \geq a)$  ?? Oui, on ne pouvait espérer mieux ! Chez les majorants c'est le plus petit qui est le meilleur !

Comme  $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(Z \geq a) \leq f(x)$  en particulier  $P(Z \geq a) \leq f(x_0)$ .

$$f(x_0) = \frac{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}{\left(a + \frac{\sigma^2}{a}\right)^2} = \frac{\frac{\sigma^2 a^2 + \sigma^4}{a^2}}{\frac{(a + \sigma^2/a)^2}{a^2}} = \frac{\sigma^2(a^2 + \sigma^2)}{(a^2 + \sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}. \text{ Alors } P(Z \geq a) \leq f(x_0) = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Pour tout réel  $a$  strictement positif :  $P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ .

**e.** Posons ici  $Z = X - \lambda = X - E(X)$ .  $Z$  est une variable discrète d'espérance nulle et dont la variance est celle de  $X$ . Ainsi  $V(Z) = \lambda = (\sqrt{\lambda})^2$ .

En appliquant ce qui précède à  $Z = X - \lambda$  avec  $a = \lambda$  on obtient :  $P(Z \geq \lambda) \leq \frac{(\sqrt{\lambda})^2}{(\sqrt{\lambda})^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda + 1}$ .

Or  $P(Z \geq \lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) = P(X \geq 2\lambda)$ . Finalement :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}.$$

**3) a.** Soit  $t$  un réel.  $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) t^k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t^k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

La série de terme général  $\frac{(\lambda t)^k}{k!}$  étant convergente, il en est de même de la série de terme général  $P(X = k) t^k$ . Ainsi  $G_X(t)$  existe.

$$\text{De plus } G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Pour tout réel  $t$ ,  $G_X(t)$  existe et vaut  $e^{\lambda(t-1)}$ .

**b. Version 1** Soit  $t$  un élément de  $[1, +\infty[$  et  $a$  un élément de  $]0, +\infty[$ .

Observons que l'événement  $\{X \geq a\}$  est contenu dans l'événement  $\{t^X \geq t^a\}$  ( $z \rightarrow t^z$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  puisque  $t \geq 1$ ). Ainsi  $P(X \geq a) \leq P(t^X \geq t^a)$ .

$t^X$  est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives.

La série de terme général  $t^k P(X = k)$  est convergente, d'après a), et même absolument convergente car à termes positifs.

Alors le théorème de transfert permet de dire que  $t^X$  possède une espérance qui vaut  $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$  donc  $G_X(t)$ .

En appliquant Q2 a) à la variable  $t^X$  avec le réel strictement positif  $t^a$  il vient :

$$P(X \geq a) \leq P(t^X \geq t^a) \leq \frac{E(t^X)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, \forall a \in ]0, +\infty[, P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}.}$$

**Version 2** Soit  $t$  un élément de  $[1, +\infty[$  et  $a$  un élément de  $]0, +\infty[$ . Notons  $\gamma_a$  le plus petit élément de  $\mathbb{N}$  supérieur ou égal à  $a$  ( $\gamma_a$  vaut  $a$  si  $a$  est entier et  $[a] + 1$  si  $a$  n'est pas entier).

$P(X \geq a) = \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X = k)$ . Comme  $t$  appartient à  $[1, +\infty[$ , si  $k$  est un élément de  $[\gamma_a, +\infty[$ ,  $P(X = k) \geq 0$  et  $1 \leq \frac{t^k}{t^a}$ ; alors  $P(X = k) \leq P(X = k) \frac{t^k}{t^a}$ .

Ceci permet d'écrire :  $P(X \geq a) = \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} \left( P(X = k) \frac{t^k}{t^a} \right) = \frac{1}{t^a} \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X = k) t^k$  car la série de terme général  $P(X = k) t^k$  converge.

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) t^k \geq 0 \text{ donc } \frac{1}{t^a} \sum_{k=\gamma_a}^{+\infty} P(X = k) t^k \leq \frac{1}{t^a} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k = \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

Le tout redonne sans difficulté :  $P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$ .

$$\text{c. } g \text{ est continue et sur } [1, +\infty[ \text{ et } \forall t \in [1, +\infty[, g'(t) = \frac{t^2 e^{t-1} - 2t e^{t-1}}{t^4} = \frac{(t-2) e^{t-1}}{t^3}.$$

$g'$  est négative sur  $[0, 2]$  et positive sur  $[2, +\infty[$ . Donc  $g$  est décroissante sur  $[0, 2]$  et croissante sur  $[2, +\infty[$ . Alors  $g$  possède un minimum en 2 qui vaut  $g(2) = \frac{e}{4}$ .

$$\boxed{g \text{ possède un minimum sur } [0, +\infty[ \text{ qui vaut } \frac{e}{4}.}$$

$$\text{d. D'après b), } \forall t \in [1, +\infty[, P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = (g(t))^\lambda.$$

$$\text{En particulier } P(X \geq 2\lambda) \leq (g(2))^\lambda = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

$$\boxed{P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.}$$

$$\text{4) Par croissance comparée } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( (\lambda + 1) \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \right) = 0 \text{ car } \left|\frac{e}{4}\right| < 1.$$

Alors, il existe un réel strictement positif  $\lambda_0$  tel que pour tout réel  $\lambda$  strictement supérieur à  $\lambda_0$  on ait :

$$(\lambda + 1) \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda < 1 \text{ c'est à dire } \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda < \frac{1}{\lambda + 1}.$$

La dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question 2 e) dès que  $\lambda$  prend des valeurs assez grandes.

## EXERCICE 2

1) Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}$ . Posons  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $g_x(t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ .  $g_x$  est continue sur  $[1, +\infty[$ . Envisageons deux cas.

• Supposons  $x$  strictement positif.

$\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $1+t+t^{x+1} \geq t^{x+1} > 0$  donc  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $0 \leq g_x(t) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t^{x+1}}$ .

Comme  $x+1 > 1$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$  converge. La convergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$  et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de  $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt$ .

• Supposons  $x$  négatif ou nul.

Comme  $x+1 \leq 1$ ,  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $t^{x+1} \leq t$  donc  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $0 < 1+t+t^{x+1} \leq 1+t+t \leq t+t+t = 3t$ .

Alors  $\forall t \in [1, +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{1}{3t} \leq \frac{1}{1+t+t^{x+1}} = g_x(t)$ .

La divergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{3t}$  et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la divergence de  $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt$ .

Finalement  $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt$  converge si et seulement si  $x$  est strictement positif.

Le domaine de définition de  $f$  est  $]0, +\infty[$ .

*Remarque* On pouvait également obtenir le résultat en montrant que :

$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2t} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{t^{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2) Montrons que  $f$  est croissante en utilisant la définition.

Soient deux éléments  $x$  et  $y$  de  $]0, +\infty[$  tels que  $x \leq y$ . Montrons que  $f(y) \leq f(x)$ .

Soit  $t$  un élément de  $[1, +\infty[$ .  $\ln t \geq 0$  et  $x \leq y$  donc  $(x+1) \ln t \leq (y+1) \ln t$ .

Alors  $t^{x+1} = e^{(x+1) \ln t} \leq e^{(y+1) \ln t} = t^{y+1}$  donc  $0 < 1+t+t^{x+1} \leq 1+t+t^{y+1}$ .

Ainsi  $\frac{1}{1+t+t^{y+1}} \leq \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ .

Finalement :  $\forall t \in [1, +\infty[, \frac{1}{1+t+t^{y+1}} \leq \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ .

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{y+1}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ , c'est à dire :  $f(y) \leq f(x)$ .

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } ]0, +\infty[.}$$

**3) a.** Soit  $x$  un élément de  $]0, +\infty[$ . Posons  $\forall t \in [1, +\infty[, h_x(t) = \frac{1}{t(1+t^x)}$ .  $h_x$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

$\forall t \in [1, +\infty[, t(1+t^x) = t + t^{x+1} \geq t^{x+1} > 0$  donc  $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq h_x(t) \leq \frac{1}{t^{x+1}}$ .

Comme  $x+1 > 1$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$  converge. La convergence de  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$  et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de  $\int_1^{+\infty} h_x(t) dt$ .

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } ]0, +\infty[, \text{ la quantité } g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} \text{ existe.}}$$

*Remarque* Notons que si  $x$  appartient à  $] -\infty, 0]$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$  diverge.

En effet, si  $x$  appartient à  $] -\infty, 0]$ ,  $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t(1+t^x)}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$  diverge.

**b.**  $\forall x \in ]0, +\infty[, \forall t \in [1, +\infty[, \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x-t^x}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t(1+t^x)}$ .

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, \forall t \in [1, +\infty[, \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Soit  $x$  un élément de  $]0, +\infty[$ . Soit  $A$  un élément de  $[1, +\infty[$ .

$$\int_1^A \frac{dt}{t(1+t^x)} = \int_1^A \left( \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} \right) dt = \left[ \ln|t| - \frac{1}{x} \ln|1+t^x| \right]_1^A = \frac{1}{x} \left[ x \ln t - \ln(1+t^x) \right]_1^A = \frac{1}{x} \left[ \ln \frac{t^x}{1+t^x} \right]_1^A.$$

$$\int_1^A \frac{dt}{t(1+t^x)} = \frac{1}{x} \left( \ln \frac{A^x}{1+A^x} - \ln \frac{1}{2} \right) \quad (**).$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} A^x = +\infty \text{ donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^x}{1+A^x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{A^x}} = 1 \text{ Alors } \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{A^x}{1+A^x} = 0.$$

En faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  dans  $(**)$  il vient :  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} = -\frac{1}{x} \ln \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{x}$ .

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} = \frac{\ln 2}{x}.$$

**c.** Soit  $x$  un élément de  $]0, +\infty[$ .

$\forall t \in [1, +\infty[, 1+t+t^{x+1} \geq t+t^{x+1} = t(1+t^x) > 0$  donc  $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t(1+t^x)}$ .

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient :  $0 \leq f(x) \leq g(x) = \frac{\ln 2}{x}$ .

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}.}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$ , l'encadrement précédent donne :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

4) a. Soit  $x$  un élément de  $]0, +\infty[$ .

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = g(x) - f(x) = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{t(1+t^x)(1+t+t^{x+1})} \right) dt.$$

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)(1+t+t^{x+1})}.$$

Soit  $t$  un élément de  $[1, +\infty[$ .

$$t \geq t > 0, 1+t^x \geq t^x > 0 \text{ et } 1+t+t^{x+1} \geq t^{x+1} > 0 \text{ donc } t(1+t^x)(1+t+t^{x+1}) \geq t t^x t^{x+1} = t^{2x+2} > 0.$$

$$\text{Alors } \forall t \in [1, +\infty[, t(1+t^x)(1+t+t^{x+1}) \geq t^{2x+2} > 0.$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{t(1+t^x)(1+t+t^{x+1})} \leq \frac{1}{t^{2x+2}}. \quad (***)$$

Observons que  $2x+2 > 1$  donc  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x+2}}$  converge. De plus :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x+2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^{2x+2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{(2x+1)t^{2x+1}} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{(2x+1)A^{2x+1}} + \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{1}{2x+1}.$$

Alors en intégrant l'encadrement (\*\*\*) (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)(1+t+t^{x+1})} \leq \frac{1}{2x+1}. \text{ Ce qui donne } 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}.$$

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}.}$$

$$\text{b. } \forall x \in ]0, +\infty[, 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}. \text{ Donc } \forall x \in ]0, +\infty[, 0 \leq \ln 2 - x f(x) \leq \frac{x}{2x+1}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x+1} = 0$  il vient par encadrement  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x f(x)) = \ln 2$ .

Comme  $\ln 2$  n'est pas nul,  $x f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln 2$  et donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2}{x} = +\infty$  donne alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.}$$

5)  $f$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Je vous laisse le tableau...

---

### EXERCICE 3

---

1) a. Posons :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .  $f$  est une densité de  $X$  et de  $Y$ .

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires à densité indépendantes de densité  $f$ .

Alors  $Z = X + Y$  est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction  $h$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) dt.$$

Soit  $x$  un réel. Par définition de  $f$ ,  $h(x) = \int_0^1 f(x-t) dt$ .

Le changement de variable  $u = x - t$  donne alors  $h(x) = - \int_x^{x-1} f(u) du = \int_{x-1}^x f(u) du$ .

- Si  $x$  est élément de  $] -\infty, 0[$ ,  $[x-1, x]$  est contenu dans  $] -\infty, 0[$  et  $h(x) = \int_{x-1}^x 0 du = 0$ .
- Si  $x$  est élément de  $]2, +\infty[$ ,  $[x-1, x]$  est contenu dans  $]1, +\infty[$  et  $h(x) = \int_{x-1}^x 0 du = 0$ .
- Si  $x$  est élément de  $[0, 1[$  alors  $x-1 < 0 \leq x < 1$  et  $h(x) = \int_0^x 1 du = x$ .
- Si  $x$  est élément de  $[1, 2]$  alors  $0 \leq x-1 \leq 1 \leq x$  et  $h(x) = \int_{x-1}^1 1 du = 1 - (x-1) = 2-x$ .

La fonction  $h$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 2-x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de  $Z = X + Y$ .

b. Soit  $x$  un élément de  $]0, 1[$ . Notons que  $0 < 1-x < 1 < 1+x < 2$ .

- $P(Z > 1) = \int_1^{+\infty} h(t) dt = \int_1^2 (2-t) dt = \left[ \frac{-(2-t)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2}$ .
  - $P(1-x < Z \leq 1+x) = \int_{1-x}^{1+x} h(t) dt = \int_{1-x}^1 t dt + \int_1^{1+x} (2-t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{1-x}^1 + \left[ \frac{-(2-t)^2}{2} \right]_1^{1+x}$ .
- $$P(1-x < Z \leq 1+x) = \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - (1-x)^2.$$
- $P(\{Z > 1\} \cap \{1-x < Z \leq 1+x\}) = P(1 < Z \leq 1+x) = \int_1^{1+x} (2-t) dt = \left[ \frac{-(2-t)^2}{2} \right]_1^{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}$ .

Alors  $P(\{Z > 1\} \cap \{1-x < Z \leq 1+x\}) = \frac{1}{2} (1 - (1-x)^2) = P(Z > 1) P(1-x < Z \leq 1+x)$ .

Les événements  $\{Z > 1\}$  et  $\{1-x < Z \leq 1+x\}$  sont indépendants.

2) a. Cherchons la fonction de répartition  $F_T$  de  $T = \text{Max}(X, Y)$ .

Notons  $F_X$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition de  $X$  et  $Y$ .

$$\text{Rappelons que : } \forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}.$$

Soit  $x$  un réel.  $F_T(x) = P(T \leq x) = P(\text{Max}(X, Y) \leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq x\})$ .

Les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes il vient :  $F_T(x) = P(X \leq x) P(Y \leq x) = F_X(x) F_Y(x) = (F_X(x))^2$ .

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}.$$

Comme  $F_T(0) = 0$  on a  $\forall x \in ]-\infty, 0]$ ,  $F_T(x) = 0$  et ainsi  $F_T$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, 0]$ .

Comme  $F_T(1) = 1$  on a  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $F_T(x) = 1$  et ainsi  $F_T$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$ .

De plus  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $F_T(x) = x^2$  donc  $F_T$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

Ce qui précède permet alors de dire que  $F_T$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ .

Par conséquent :

$T$  est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[, F'_T(x) = 0 \text{ et } \forall x \in ]0, 1[, F'_T(x) = 2x. \text{ Posons } \forall x \in \mathbb{R}, f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$f_T$  est une application positive de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui coïncide avec  $F'_T$  sur  $\mathbb{R}$  privé d'un ensemble fini de points donc  $f_T$  est une densité de probabilité de  $T$ .

La fonction  $f_T$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de probabilité de  $T$ .

**b.** Comme  $f_T$  est nulle sur  $] -\infty, 0[$ ,  $\int_{-\infty}^0 t f_T(t) dt$  existe et vaut 0. Il en est de même pour  $\int_1^{+\infty} t f_T(t) dt$ .

$t \rightarrow t f_T$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $\int_0^1 t f_T(t) dt$  existe.

Finalement  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt$  converge et vaut  $\int_0^1 t f_T(t) dt$ .

Alors  $T$  possède une espérance qui est égale à  $\int_0^1 t f_T(t) dt$ . De plus  $\int_0^1 t f_T(t) dt = \int_0^1 2t^2 dt = 2 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$ .

$T$  possède une espérance qui vaut  $\frac{2}{3}$ .

**c.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

Supposons  $a \leq b$ .  $\text{Max}(a, b) = b$  et  $|a - b| = b - a$ .

Donc  $2 \text{Max}(a, b) = 2b = a + b + (b - a) = a + b + |a - b|$ .  $|a - b| = 2 \text{Max}(a, b) - (a + b)$ .

On montre de la même manière cette dernière égalité lorsque  $a > b$ .

Ainsi  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|a - b| = 2 \operatorname{Max}(a, b) - (a + b)$ .

*Remarque* On observera et on retiendra que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\operatorname{Max}(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ .

De même :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\operatorname{Min}(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ .

En appliquant ce qui précède on obtient :

$$\forall \omega \in \Omega, U(\omega) = |X(\omega) - Y(\omega)| = 2 \operatorname{Max}(X(\omega), Y(\omega)) - (X(\omega) + Y(\omega)) = \left(2 \operatorname{Max}(X, Y) - (X + Y)\right)(\omega).$$

Alors  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $U(\omega) = (2T - Z)(\omega)$  et ainsi :

$$\boxed{U = 2T - Z.}$$

$Z = X + Y$ .  $X$  et  $Y$  possèdent une espérance qui vaut  $\frac{1}{2}$ . Alors  $Z$  possède une espérance qui vaut 1.

Rappelons que  $E(T)$  existe et vaut  $\frac{2}{3}$ . Alors  $U = 2T - Z$  possède une espérance égale à  $2 \frac{2}{3} - 1$  c'est à dire  $\frac{1}{3}$ .

$$\boxed{\text{L'espérance de } U \text{ existe et vaut } \frac{1}{3}.}$$


---

---

## PROBLÈME

---

### Partie 1

1) • Par définition  $N$  est un sous-ensemble de  $E_2$ .

•  $0_{E_2}$  s'annule en 0 et 1 donc est un élément de  $N$  ;  $N$  n'est pas vide.

• Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $N$  et soit  $\lambda$  un réel.

$$f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0 \text{ donc } (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 \text{ et } (\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0.$$

$\lambda f + g$  est un élément de  $N$ . Ceci achève de montrer que :

$N \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_2.$

2) Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $N$  et soit  $\lambda$  un réel.

$$u(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' = \lambda f'' + g'' = \lambda u(f) + u(g) ; u \text{ est une application linéaire de } N \text{ dans } E_0.$$

Soit  $f$  un élément de  $\text{Ker } u$ . Alors  $f''$  est nulle sur l'intervalle  $[0, 1]$  donc  $f'$  est constante sur  $[0, 1]$ .

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f'(x) = \alpha ; \text{ donc } \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f(x) = \alpha x + \beta.$$

$$\text{Comme } f(0) = f(1) = 0, \beta = \alpha + \beta = 0. \text{ Ceci donne } \alpha = \beta = 0 \text{ et } u = 0_N.$$

Le noyau de  $u$  est réduit à  $\{0_N\}$  donc  $u$  est injective.

$u \text{ est une application linéaire injective.}$

3) a. Montrons que  $G$  est dérivable sur  $[0, 1]$ . Soit  $x$  un élément de  $[0, 1]$ .

$$G(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x (x-t) g(t) dt + \int_x^1 (t-x) g(t) dt \right).$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left( x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x t g(t) dt + \int_x^1 t g(t) dt - x \int_x^1 g(t) dt \right).$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left( x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x t g(t) dt - \int_1^x t g(t) dt + x \int_1^x g(t) dt \right).$$

$g$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $x \rightarrow \int_0^x g(t) dt$  (resp.  $x \rightarrow \int_1^x g(t) dt$ ) est dérivable sur  $[0, 1]$  car c'est la primitive de  $g$  sur  $[0, 1]$  qui prend la valeur 0 en 0 (resp. 1).

$t \rightarrow t g(t)$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $x \rightarrow \int_0^x t g(t) dt$  (resp.  $x \rightarrow \int_1^x t g(t) dt$ ) est dérivable sur  $[0, 1]$  car c'est la primitive de  $t \rightarrow t g(t)$  sur  $[0, 1]$  qui prend la valeur 0 en 0 (resp. 1).

Notons que  $x \rightarrow x$  est également dérivable sur  $[0, 1]$ . Ce qui précède permet alors de dire que  $G$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x g(t) dt + x g(x) - x g(x) - x g(x) + \int_1^x g(t) dt + x g(x) \right).$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x g(t) dt + \int_1^x g(t) dt \right) \text{ ou } \forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x g(t) dt - \int_x^1 g(t) dt \right).$$

Observons que  $G'$  est sur  $[0, 1]$  la somme de deux primitives de  $g$ . Donc  $G'$  est dérivable sur  $[0, 1]$  ce qui suffit très largement pour dire que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Ainsi

$$G \text{ est élément de } E_1 \text{ et } \forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x g(t) dt - \int_x^1 g(t) dt \right).$$

**b.** Nous venons de voir que  $G'$  est dérivable sur  $[0, 1]$ .

$$\text{De plus } \forall x \in [0, 1], \quad G''(x) = \frac{1}{2} (g(x) + g(x)) \text{ car } \forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x g(t) dt + \int_1^x g(t) dt \right).$$

Finalement  $G'' = g$  et ainsi  $G''$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ . Résumons :

$$G \text{ est élément de } E_2 \text{ et } G'' = g.$$

**c.**  $G$  et  $x \rightarrow ax + b$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  donc  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ .

$$\text{Ainsi } H \in N \iff H(0) = H(1) = 0 \iff G(0) + b = G(1) + a + b = 0 \iff a = G(0) - G(1) \text{ et } b = -G(0).$$

$$\text{Notons que } G(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt, \quad G(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) g(t) dt \text{ et } G(0) - G(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (2t-1) g(t) dt.$$

$$H : x \rightarrow G(x) + ax + b \text{ appartient à } N \text{ si et seulement si } a = \frac{1}{2} \int_0^1 (2t-1) g(t) dt \text{ et } b = -\frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt.$$

*Remarque* Dans la suite nous supposons que  $a = \frac{1}{2} \int_0^1 (2t-1) g(t) dt$  et  $b = -\frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt$  donc que  $H$  appartient à  $N$ .

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0, 1], \quad H(x) = G(x) + ax + b = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t| g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t) g(t) dt.$$

$$\text{d. } H \text{ appartient à } N \text{ et } u(H) = H'' = G'' = g. \quad u(H) = g.$$

Nous avons donc montré que pour tout élément  $g$  de  $E_0$ , il existe un élément  $H$  de  $N$  tel que  $u(H) = g$ . Ainsi :

$$u \text{ est une application surjective de } N \text{ sur } E_0.$$

**e.** De 2) et 3 d) il résulte que  $u$  est une application linéaire bijective de  $N$  sur  $E_0$ .

$$u \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de } N \text{ sur } E_0.$$

**4)** Soit  $g$  un élément de  $E_0$ . La question 3) nous a montré que l'antécédent de  $g$  par  $u$  dans  $N$  est la fonction  $H$  définie par  $\forall x \in [0, 1], \quad H(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t| g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t) g(t) dt$ . Alors

$$\forall g \in E_0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t| g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t) g(t) dt.$$

## Partie 2

1) •  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est de toute évidence une famille d'éléments de  $N_{n+2}$ .

• Soit  $P$  un élément de  $P_{n+2}$ .

$$P \in N_{n+2} \iff P(0) = P(1) = 0 \iff \exists Q \in P_n, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x(x-1)Q(x)$$

$$P \in N_{n+2} \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x(x-1) \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

$$P \in N_{n+2} \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{k+1} (x-1).$$

$$P \in N_{n+2} \iff \exists(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, P = \sum_{k=0}^n a_k f_k \iff P \in \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n).$$

$(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est une famille génératrice de  $N_{n+2}$ .

• Montrons que cette famille est libre.

Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\sum_{k=0}^n a_k f_k = 0_{N_{n+2}}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k f_k(x) = 0. \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_k x(x-1) e_k(x) = 0 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \sum_{k=0}^n a_k e_k(x) = 0.$$

$\sum_{k=0}^n a_k e_k$  est alors un élément de  $P_n$  admettant une infinité de zéros, c'est donc la fonction nulle de  $P_n$ .

Alors  $\sum_{k=0}^n a_k e_k = 0_{P_n}$ . Comme  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  est libre :  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ .

Ceci achève de montrer que la famille  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est libre. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{C} = (f_0, f_1, \dots, f_n) \text{ est une base de } N_{n+2}.}$$

2) a. Soit  $k$  un élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, f_k''(x) = (k+2)(k+1)x^k - (k+1)kx^{k-1}.$$

$$\text{Ainsi } v(f_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = x^2 - x \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, f_0''(x) = 2. \text{ Ainsi } v(f_0) = 2e_0.$$

$$\boxed{v(f_0) = 2e_0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(f_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1}.}$$

$$\text{La matrice de } v \text{ relativement aux bases } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} d_0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -d_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

avec  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, d_k = (k+2)(k+1)$ .

**b.** La matrice  $A$  est une matrice triangulaire supérieure de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  sans zéro sur sa diagonale ; elle est donc inversible.

Ainsi  $v$  est une application linéaire bijective de  $N_{n+2}$  sur  $P_n$ .

$$\boxed{v \text{ est un isomorphisme de } N_{n+2} \text{ sur } P_n.}$$

**c.** Soit  $k$  un élément de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et  $x$  un réel.

$$\sum_{j=0}^k f_j(x) = \sum_{j=0}^k (x^{j+2} - x^{j+1}) = \sum_{j=0}^k x^{j+2} - \sum_{j=0}^k x^{j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} x^{j+1} - \sum_{j=0}^k x^{j+1} = x^{k+2} - x.$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^k f_j(x) = x^{k+2} - x.}$$

**d.** Le résultat de la question P1 2 c) peut s'appliquer pour déterminer  $v^{-1}$  dans la mesure où :

- la restriction d'un élément de  $N_{n+2}$  (resp.  $P_n$ ) à  $[0, 1]$  est un élément de  $N$  (resp  $E_0$ ) ;
- deux fonctions polynômiales réelles qui coïncident sur  $[0, 1]$  sont égales.

Déterminons  $A^{-1}$  en utilisant le résultat de la question 2) c. Soit  $k$  un élément de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^k f_j(x) = x^{k+2} - x \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, \left( \sum_{j=0}^k f_j \right)''(x) = (k+2)(k+1)x^k.$$

$$\text{Par conséquent : } v \left( \sum_{j=0}^k f_j \right) = (k+2)(k+1)e_k.$$

Ceci qui donne encore  $\sum_{j=0}^k f_j = v^{-1}((k+2)(k+1)e_k) = (k+2)(k+1)v^{-1}(e_k)$ . Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, v^{-1}(e_k) = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \sum_{j=0}^k f_j}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \times 1} & \frac{1}{3 \times 2} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ 0 & \frac{1}{3 \times 2} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{pmatrix}}$$

*Remarque* Un calcul assez simple donne :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in [0, 1], \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t| t^k dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t t^k dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1-2t) t^k dt = \frac{1}{(k+1)(k+2)} (x^{k+2} - x).$$

Il permet de retrouver le résultat précédent en utilisant la question 4 de la partie 1.

**e.** Supposons  $n = 2$ . Alors  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$AX = Y \iff \begin{cases} 2x - 2y = x' \\ 6y - 6z = y' \\ 12z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{12} z' \\ y = \frac{1}{6} y' + z = \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \\ x = \frac{1}{2} x' + y = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \\ y = \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \\ z = \frac{1}{12} z' \end{cases}$$

$$\text{Alors } A \text{ est invresible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

*Remarque* On pouvait se contenter de vérifier que :  $A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = I_3 \dots$

**3) a.** Soit  $\varphi$  l'application qui à tout élément  $P$  de  $P_n$  associe l'application  $\varphi(P)$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = (x^2 - x)P(x)$ .

$\varphi$  est clairement une application linéaire de  $P_n$  dans  $N_{n+2}$ . Remarquons alors que  $w = v \circ \varphi$ .

$w$  est alors la composée d'une application linéaire de  $P_n$  dans  $N_{n+2}$  avec une application linéaire de  $N_{n+2}$  dans  $P_n$ . Alors  $w$  est une application linéaire de  $P_n$  dans  $P_n$ .

$w$  est un endomorphisme de  $P_n$ .

**b.** Soit  $k$  un élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - x)e_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, w(e_k)(x) = (k+2)(k+1)x^k - (k+1)kx^{k-1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, w(e_k)(x) = \left( (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1} \right)(x). \text{ Alors } w(e_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - x)e_0(x) = x^2 - x \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, w(e_0)(x) = 2 = 2e_0(x). \text{ } w(e_0) = 2e_0.$$

$$w(e_0) = 2e_0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, w(e_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1}.$$

**c.** La matrice de  $w$  dans  $\mathcal{B}$  est clairement  $A$  !

**d.** La matrice  $A$  de  $w$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure, donc l'ensemble des valeurs propres de  $w$  et de  $A$  est l'ensemble des éléments de la diagonale de  $A$ .

$$\text{Alors } \text{Sp } w = \text{Sp } A = \{(k+2)(k+1); k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}. \text{ Posons } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = (k+2)(k+1).$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+3)(k+2) - (k+2)(k+1) = 2(k+2) > 0. \text{ Alors } \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n.$$

$w$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n+1$  qui admet  $n+1$  valeurs propres deux à deux distinctes donc

$w$  est diagonalisable.

Nous avons déjà vu que  $A$  est inversible ainsi  $w$  est un endomorphisme bijectif de  $P_n$ .

$w$  est un automorphisme de  $P_n$ .

**e.**  $n = 2$ . La matrice de  $w$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$

Les valeurs propres de  $w$  et de  $A$  sont : 2, 6 et 12. Les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Notons que  $w(e_0) = 2 e_0$  donc :

le sous-espace propre de  $w$  associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par  $e_0$ .

Soit  $P = x e_0 + y e_1 + z e_2$  un élément de  $P_2$ .

$$w(P) = 6 P \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 6x \\ 6y - 6z = 6y \\ 12z = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases} ;$$

le sous-espace propre de  $w$  associé à la valeur propre 6 est la droite vectorielle engendrée par  $e_0 - 2 e_1$ .

$$w(P) = 12 P \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 12x \\ 6y - 6z = 12y \\ 12z = 12z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -5x \\ z = -y = 5x \end{cases} ;$$

le sous-espace propre de  $w$  associé à la valeur propre 12 est la droite vectorielle engendrée par  $e_0 - 5 e_1 + 5 e_2$ .

---