
EXERCICE 1

$$1) \text{ a. } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+3} \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n. \text{ Finalement :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A X_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b. (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I)^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

$$\boxed{(A - 2I)^2(A - 2I) = 0.}$$

2) a. Le théorème de la division euclidienne montre que, pour tout élément n de \mathbb{N} , il existe un couple (Q_n, R_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, et un seul, tel que : $X^n = P Q_n + R_n$ et $\deg R_n < \deg P = 3$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ il existe un unique couple } (Q_n, R_n) \text{ de } \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } X^n = P Q_n + R_n.}$

b. $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une famille de trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme pour tout élément n de \mathbb{N} , R_n appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ on peut alors affirmer que :

$\boxed{\text{pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ il existe des réels } a_n, b_n \text{ et } c_n \text{ tels que : } R_n = a_n + b_n(X - 1) + c_n(X - 1)^2.}$

$\boxed{\text{Remarque}}$ La formule de Taylor donne $a_n = R_n(1)$, $b_n = R'_n(1)$ et $c_n = \frac{1}{2} R''_n(1)$.

c. Soit n un élément de \mathbb{N} . $a_n + b_n(X - 1) + c_n(X - 1)^2 = R_n(X) = X^n - P Q_n = X^n - (X - 1)^2(X - 2) Q_n$.

$$a_n + b_n(X - 1) + c_n(X - 1)^2 = X^n - (X - 1)^2(X - 2) Q_n \quad (*).$$

En évaluant en 1 et en 2 on obtient : $a_n = 1$ et $a_n + b_n + c_n = 2^n$.

En dérivant (*) il vient : $b_n + 2c_n(X - 1) = nX^{n-1} - 2(X - 1)(X - 2) Q_n - (X - 1)^2 Q'_n - (X - 1)^2(X - 2) Q'_n$.

En évaluant en 1 on obtient alors : $b_n = n$. Ainsi $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - b_n - a_n = 2^n - n - 1$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, a_n = 1, b_n = n \text{ et } c_n = 2^n - n - 1.}$

3) a. Soit n un élément de \mathbb{N} .

$$A^n = (PQ_n + R_n)(A) = (PQ_n)(A) + R_n(A) = P(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) \text{ car } P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

$$A^n = R_n(A) = (a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2)(A) = a_n I + b_n(A-I) + c_n(A-I)^2 = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.}$$

b. Les troisièmes lignes de I , $A - I$ et $(A - I)^2$ sont respectivement : $(0 \ 0 \ 1)$, $(0 \ 1 \ -1)$ et $(1 \ -2 \ 1)$.

Alors la troisième ligne de $A^n = I + n(A - I) + (2^n - n - 1)(A - I)^2$ est : $(0 \ 0 \ 1) + n(0 \ 1 \ -1) + [2^n - n - 1](1 \ -2 \ 1)$.

Les éléments de la troisième ligne de A^n sont alors $2^n - n - 1$, $n - 2(2^n - n - 1)$ et $1 - n + (2^n - n - 1)$.

Ou encore $2^n - n - 1$, $-2^{n+1} + 3n + 2$ et $2^n - 2n$.

Pour tout élément n de \mathbb{N} , les éléments de la troisième ligne de A^n sont : $2^n - n - 1$, $-2^{n+1} + 3n + 2$ et $2^n - 2n$.

4) a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{La propriété est vraie pour } n = 0 \text{ car : } X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} et montrons la pour $n + 1$.

$$X_{n+1} = A X_n = A A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Ceci achève la récurrence.}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N} . $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi u_n est le produit de la troisième ligne de A_n avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $u_n = (2^n - n - 1) \times 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) \times 1 + (2^n - 2n) \times 0 = 2^n - 2 \times 2^n + 2n + 1 = -2^n + 2n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2^n + 2n + 1.}$$

EXERCICE 2

1) a. Soit n un élément de \mathbb{N} tel que $n \geq p$. Supposons d'abord que $n > p$.

$\forall k \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in \llbracket p, n-1 \llbracket, f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt$ car $k \leq k+1$.

En sommant il vient : $\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_p^n f(t) dt$ ou $\sum_{k=p+1}^n f(k) \leq \int_p^n f(t) dt$.

Ainsi $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t) dt$.

Notons que ceci vaut encore pour $n = p$ car $S_p - f(p) = 0$ et $\int_p^p f(t) dt = 0$. Finalement :

$$\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t) dt.$$

b. $\int_p^{+\infty} f(t) dt$ existe et f est positive sur $[p, +\infty[$. Alors $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \int_p^n f(t) dt \leq \int_p^{+\infty} f(t) dt$.

Ainsi $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, S_n - f(p) \leq \int_p^{+\infty} f(t) dt$ ou $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, S_n \leq f(p) + \int_p^{+\infty} f(t) dt$.

La série de terme général $f(n)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $f(p) + \int_p^{+\infty} f(t) dt$. Ainsi :

la série de terme général $f(n)$ converge.

Remarque Ceci est en fait un résultat de cours dans la mesure où f est continue positive et décroissante sur $[p, +\infty[$.

2) a. Soit n un élément de \mathbb{N} tel que $n \geq p$.

$\forall k \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ car f est décroissante sur $[p, +\infty[$.

En intégrant il vient alors $\forall k \in \llbracket p, +\infty \llbracket, f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k)$ car $k \leq k+1$.

En sommant il vient : $\forall q \in \llbracket n, +\infty \llbracket, \sum_{k=n}^q f(k+1) \leq \sum_{k=n}^q \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_n^{q+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^q f(k)$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \text{ ou } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = R_n + f(n).$$

Alors $\int_n^{+\infty} f(t) dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$.

$$\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \int_n^{+\infty} f(t) dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

b. Soit n un élément de $\llbracket p, +\infty \llbracket$. f est strictement positive sur $[p, +\infty[$ donc $\int_n^{+\infty} f(t) dt$ est un réel strictement positif.

En divisant l'encadrement précédent par $\int_n^{+\infty} f(t) dt$ il vient : $1 - \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} \leq \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} \leq 1$.

Le théorème d'encadrement sur les suites nous indique alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} = 1 \text{ dès que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} \right) = 1 \text{ ou que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} = 0.$$

Ainsi $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt$ dès que $f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt\right)$.

$$f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt\right) \text{ est une condition suffisante pour que } R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

3) a. $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow (\ln x)^2$ sont continues et strictement positives sur $[2, +\infty[$ donc $x \rightarrow x(\ln x)^2$ est continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$. Alors f est continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$.

$x \rightarrow x$ et $x \rightarrow (\ln x)^2$ sont croissantes et strictement positives sur $[2, +\infty[$ donc $x \rightarrow x(\ln x)^2$ est croissante et strictement positive sur $[2, +\infty[$. Alors f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

$$\forall A \in [2, +\infty[, \int_2^A f(t) dt = \int_2^A \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^A = -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A f(t) dt = \frac{1}{\ln 2}$. Ainsi $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{\ln 2}$.

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_n^A f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_n^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln n} \right) = \frac{1}{\ln n}.$$

$$\text{Alors } \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \int_n^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{\ln n}.$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n(\ln n)^2}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0.$$

f est continue, strictement positive, et décroissante sur $[2, +\infty[$.
De plus $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et $f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt\right)$.

b. D'après la question 2, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{\ln n}$.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}.$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n R_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\ln n} \right) = +\infty$; il existe alors n_0 dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ tel que $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, n R_n \geq 1$.

Alors $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$, $R_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$. La divergence de la série de terme général $\frac{1}{n}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général R_n diverge.

La série de terme général R_n diverge.

EXERCICE 3

1) Rappelons que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la trace d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est égale à la trace de sa transposée.

• Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit λ un réel.

$$\langle A, \lambda B + C \rangle = \text{tr}({}^t A(\lambda B + C)) = \text{tr}(\lambda {}^t AB + {}^t AC) = \lambda \text{tr}({}^t AB) + \text{tr}({}^t AC) = \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle.$$

$$\text{Alors } \langle A, \lambda B + C \rangle = \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle.$$

• Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB) = \text{tr}({}^t({}^t AB)) = \text{tr}({}^t BA) = \langle B, A \rangle. \quad \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle.$$

• Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Posons ${}^t A = (b_{ij})$ et ${}^t AA = (c_{ij})$.

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^t AA) = \sum_{i=1}^3 c_{ii} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ki} a_{ki} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ki}^2.$$

$$\text{Alors } \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ki}^2 \geq 0.$$

• Reprenons les notations du point précédent et supposons $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ki}^2 = 0$.

$$\text{Comme } \forall i \in [1, 3], \forall k \in [1, 3], a_{ki}^2 \geq 0, \forall i \in [1, 3], \forall k \in [1, 3], a_{ki}^2 = 0.$$

Par conséquent $\forall i \in [1, 3], \forall k \in [1, 3], a_{ki} = 0$ et ainsi A est nulle. $\langle A, A \rangle$ donne $A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Les quatre points précédents montrent que :

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

2) $\langle I, J \rangle = \text{tr}({}^t IJ) = \text{tr}(IJ) = \text{tr}(J) = 0$.

$$\text{Notons que } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } \langle I, J^2 \rangle = \text{tr}({}^t IJ^2) = \text{tr}(J^2) = 0.$$

$$\langle J, J^2 \rangle = \text{tr}({}^t J J^2) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi } (I, J, J^2) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

Remarque (I, J, J^2) est une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls de E donc (I, J, J^2) est une famille libre de E . Or par définition c'est une famille génératrice de E . Ainsi (I, J, J^2) est une base orthogonale de E . Ceci permet de dire que E est de dimension 3.

3) a. $\|I\|^2 = \langle I, I \rangle = \text{tr}({}^t II) = \text{tr}(I^2) = \text{tr}(I) = 3; \|I\| = \sqrt{3}$.

$$\|J\|^2 = \langle J, J \rangle = \text{tr}({}^t J J) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2; \|J\| = \sqrt{2}.$$

$$\|J^2\|^2 = \langle J^2, J^2 \rangle = \text{tr}({}^t J^2 J^2) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1; \|J\| = 1.$$

Posons alors : $K_0 = \frac{1}{\|I\|} I = \frac{1}{\sqrt{3}} I$, $K_1 = \frac{1}{\|J\|} J = \frac{1}{\sqrt{2}} J$ et $K_2 = \frac{1}{\|J^2\|} J^2 = J^2$.

K_0 , K_1 et K_2 sont trois éléments de E de norme 1.

De plus comme (I, J, J^2) est une famille orthogonale de E il en est de même de (K_0, K_1, K_2) . Alors (K_0, K_1, K_2) est une famille orthonormée de E .

(K_0, K_1, K_2) est une famille orthonormée, donc libre, de trois éléments de E qui est de dimension 3. (K_0, K_1, K_2) est donc une base orthonormée de E .

(K_0, K_1, K_2) est donc une base orthonormée de E et pour tout i dans $\llbracket 0, 2 \rrbracket$, K_i est proportionnel à J^i .

$$\mathbf{b.} \quad \langle K_0, A \rangle = \text{tr}({}^t K_0 A) = \text{tr} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} {}^t I A \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr}(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

$$\langle K_1, A \rangle = \text{tr}({}^t K_1 A) = \text{tr} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} {}^t J A \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right).$$

$$\langle K_1, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} + a_{23}).$$

$$\langle K_2, A \rangle = \text{tr}({}^t K_2 A) = \text{tr}({}^t J^2 A) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \right) = a_{13}$$

Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$\langle K_0, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_{11} + a_{22} + a_{33})$

$\langle K_1, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} + a_{23})$

$\langle K_2, A \rangle = a_{13}$

c. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme (K_0, K_1, K_2) est une base orthonormée de E , la projection orthogonale $p(A)$ de A sur E est $\langle K_0, A \rangle K_0 + \langle K_1, A \rangle K_1 + \langle K_2, A \rangle K_2$.

$$\text{Ainsi } P(A) = \langle K_0, A \rangle K_0 + \langle K_1, A \rangle K_1 + \langle K_2, A \rangle K_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) K_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} + a_{23}) K_1 + a_{13} K_2.$$

Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) K_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} + a_{23}) K_1 + a_{13} K_2$

d. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Rappelons que (K_0, K_1, K_2) est une famille libre. Ainsi :

$$A \in \text{Ker } p \iff \frac{1}{\sqrt{3}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) K_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{12} + a_{23}) K_1 + a_{13} K_2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \iff a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{12} + a_{23} = a_{13} = 0.$$

$$A \in \text{Ker } p \iff \begin{cases} a_{33} = -a_{11} - a_{22} \\ a_{12} = -a_{23} = 0 \\ a_{13} = 0 \end{cases}$$

$$A \in \text{Ker } p \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{23} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A \in \text{Ker } p \iff a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors Ker } p = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

$\text{Ker } p = E^\perp$ donc $\dim \text{Ker } p = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim E = 9 - 3 = 6$.

$$\text{Or } \mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une famille}$$

génératrice de $\text{Ker } p$ de cardinal 6 donc c'est une base de $\text{Ker } p$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est}$$

une base de $\text{Ker } p$.

PROBLÈME

Partie 1

Dans toute cette partie, r est un élément de \mathbb{N} .

Dans tout le problème nous noterons f la fonction définie sur $\boxed{[0, 1[}$ par $\forall x \in \boxed{[0, 1[}$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1) Notons que f est une fonction de \mathcal{C}^∞ comme restriction à $[0, 1[$ d'une fonction rationnelle.

$$\text{Montrons par récurrence que } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{(r+k)!}{r!} \frac{1}{(1-x)^{r+1+k}}.$$

L'égalité est claire pour $k = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un élément k de \mathbb{N} et montrons la pour $k + 1$.

$$\forall x \in [0, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{(r+k)!}{r!} \frac{1}{(1-x)^{r+1+k}} = \frac{(r+k)!}{r!} (1-x)^{-r-1-k}.$$

$$\text{Alors } \forall x \in [0, 1[, f^{(k+1)}(x) = \frac{(r+k)!}{r!} (-r-1-k)(-1)(1-x)^{-r-1-k-1} = \frac{(r+k+1)!}{r!} \frac{1}{(1-x)^{r+1+k+1}}.$$

Ceci achève la récurrence.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{(r+k)!}{r!} \frac{1}{(1-x)^{r+1+k}}.$$

2) Si $r = 0 : \forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n+r}{n} = \binom{n}{n} = 1 = \frac{1}{0!} = \frac{n^r}{r!}$. Par conséquent $\binom{n+r}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

Supposons $r \geq 1$. $\binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r} = \frac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+r-r+1)}{r!} = \frac{1}{r!} \prod_{k=1}^r (n+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r!} \prod_{k=1}^r n = \frac{n^r}{r!}$.

Dans tous les cas :

$$\boxed{\binom{n+r}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}}$$

3) Soit x un élément de $[0, 1[$. $|x| < 1$ donc, par croissance comparée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{r+1} x^n) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{r+1} x^n) = 0.}$$

4) Soit x un élément de $[0, 1[$.

$\forall t \in [0, x]$, $x-t \geq 0$ et $1-t > 0$ donc $\forall t \in [0, x]$, $\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t} \geq 0$.

$\forall t \in [0, x]$, $x - \varphi_x(t) = x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{-xt+t}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geq 0$. Alors $\forall t \in [0, x]$, $\varphi_x(t) \leq x$.

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, \forall t \in [0, x], 0 \leq \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t} \leq x.}$$

5) a. Soit x un élément de $[0, 1[$ et n un élément de \mathbb{N} .

f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[0, x]$. La formule de Taylor appliquée à f sur $[0, x]$ à l'ordre n donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

$$\text{Ainsi : } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{(r+k)!}{r!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(r+n+1)!}{r!} \frac{1}{(1-t)^{r+1+n+1}} dt.$$

$$\text{On a encore : } f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k + (r+n+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k + (r+n+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt.}$$

b. Soit x un élément de $[0, 1[$ et n un élément de \mathbb{N} .

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k = (r+n+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x (\varphi_x(t))^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt.$$

Or $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \varphi_x(t) \leq x$. Ainsi on a : $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq (\varphi_x(t))^n \leq x^n$ et $0 \leq \frac{1}{(1-t)^{r+2}}$.

Par conséquent : $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq (\varphi_x(t))^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}} \leq x^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}}$.

Comme $0 \leq x$, il vient en intégrant : $0 \leq \int_0^x (\varphi_x(t))^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt \leq x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$.

En multipliant par $(r+n+1) \binom{n+r}{n}$ on obtient :

$$0 \leq (r+n+1) \binom{n+r}{n} \int_0^x (\varphi_x(t))^n \frac{1}{(1-t)^{r+2}} dt \leq (r+n+1) \binom{n+r}{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}.$$

$$\text{Ainsi : } 0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k \leq (r+n+1) \binom{n+r}{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, 0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k \leq (r+n+1) \binom{n+r}{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$$

c. Soit x un élément de $[0, 1[$. $(n+r+1) \binom{n+r}{n} x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{n^r}{r!} x^n = \frac{1}{r!} n^{r+1} x^n$ (d'après Q2).

Alors Q3 autorise à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r!} n^{r+1} x^n \right) = 0$ donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((n+r+1) \binom{n+r}{n} x^n \right) = 0$.

L'encadrement de b) donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k \right) = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{k+r}{k} x^k = f(x)$. Ainsi :

pour tout élément x de $[0, 1[$, la série de terme général $\binom{k+r}{k} x^k$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Partie 2

1) a. On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et X_1 compte le nombre d'épreuves qu'il faut réaliser pour obtenir un premier succès. La probabilité de réalisation d'un succès étant p :

$$X_1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.$$

b. Le cours indique que : $E(X_1) = \frac{1}{p}$ et $V(X_1) = \frac{q}{p^2}$.

2) Dans cette question n est un élément de \mathbb{N}^* .

a. $X_n(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket n, +\infty \llbracket$.

b. Soit k un élément de \mathbb{N} . Notons T_{n+k-1} la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des $n+k-1$ premières épreuves. T_{n+k-1} suit une loi binômiale de paramètres $n+k-1$ et p .

$$\text{Ainsi } P(T_{n+k-1} = n-1) = \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^k.$$

Pour tout entier naturel k , la probabilité que l'on obtienne $n-1$ succès au cours des $n+k-1$ premières épreuves est : $\binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^k$.

c. Soit k un élément de \mathbb{N} . Notons S_{n+k} l'événement la $(n+k)$ ^{ème} épreuve donne un succès.

$$P(X_n = n + k) = P(\{T_{n+k-1} = n - 1\} \cap S_{n+k}) = P(T_{n+k-1} = n - 1) P_{\{T_{n+k-1} = n-1\}}(S_{n+k}).$$

$$P(X_n = n + k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^k p = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = n + k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k}$$

d. En appliquant le résultat de I Q5 c pour $r = n - 1$ et $x = 1 - p$ ($n - 1 \in \mathbb{N}$ et $1 - p \in]0, 1[$) on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p)^k = \frac{1}{(1-(1-p))^{n-1+1}}.$$

Ce qui s'écrit encore : $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} (1-p)^k = \frac{1}{p^n}$. Par conséquent : $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k = 1$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n + k) = 1}$$

Rappelons que $X_n(\Omega) = \{0\} \cup \llbracket n, +\infty \llbracket$. Alors $P(X_n = 0) = 1 - \sum_{i=n}^{+\infty} P(X_n = i) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n + k) = 1 - 1 = 0$.

$$\boxed{P(X_n = 0) = 0.}$$

3) a. Soit n un élément de \mathbb{N}^* et soit k un élément de \mathbb{N} .

$$(n+k) \binom{n+k-1}{n-1} = (n+k) \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!k!} = n \frac{(n+k)!}{n!k!} = n \binom{n+k}{n}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, (n+k) \binom{n+k-1}{n-1} = n \binom{n+k}{n}}.$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n + 1 + k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+1+k-1}{n+1-1} p^{n+1} (1-p)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1} (1-p)^k.$$

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n+k}{n} \binom{n+k-1}{n-1} p^{n+1} (1-p)^k = \frac{p}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k.$$

$$1 = \frac{p}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) P(X_n = n+k). \text{ Alors } \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) P(X_n = n+k) = \frac{n}{p} \text{ ou encore : } \sum_{i=0}^{+\infty} (i) P(X_n = i) = \frac{n}{p}.$$

La série de terme général $i P(X_n = i)$ est convergente et mme absolument convergente car elle à termes positifs. Donc $E(X_n)$ existe et vaut $\frac{n}{p}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément de } \mathbb{N}^*, X_n \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{n}{p}.$$

4) a. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ et k un élément de \mathbb{N} .

$$\frac{n-1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{n-1}{n+k-1} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-2)!}{(n-2)!k!} = \binom{n+k-2}{n-2}.$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{n-1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-2}.$$

b. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

D'après le théorème de transfert, $\frac{n-1}{X_n-1}$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général

$\frac{n-1}{i-1} P(X_n = i)$ est absolument convergente ou si et seulement si la série de terme général $\frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k)$ est absolument convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k) \geq 0$. Donc $\frac{n-1}{X_n-1}$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $\frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k)$ est convergente.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k) = \frac{n-1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k = \binom{n+k-2}{n-2} p^n (1-p)^k.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k) = p \binom{n+k-2}{n-2} p^{n-1} (1-p)^k = p P(X_{n-1} = n-1+k).$$

La série de terme général $P(X_{n-1} = n-1+k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n-1} = n-1+k) = 1$ donc la série de terme général

$\frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n+k-1} P(X_n = n+k) = p$. Finalement :

$$\frac{n-1}{X_n-1} \text{ possède une espérance qui vaut } p$$

5) a. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $\forall k \in \llbracket n, +\infty \llbracket, 0 \leq \frac{n}{k} P(X_n = k) \leq P(X_n = k)$.

La convergence de la série de terme général $P(X_n = k)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{n}{k} P(X_n = k)$ converge. Cette série étant à termes positifs elle est absolument convergente. le théorème de transfert permet alors dire que :

$$\frac{n}{X_n} \text{ possède une espérance, et ceci pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

b. Soit k un élément de $\llbracket n+1, +\infty \llbracket$. $\frac{n}{k} > \frac{n-1}{k-1}$ car $\frac{n}{k} - \frac{n-1}{k-1} = \frac{k-n}{k(k-1)} > 0$, et $P(X_n = k) > 0$.

Alors $\frac{n}{k} P(X_n = k) > \frac{n-1}{k-1} P(X_n = k)$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k} P(X_n = k) > \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n-1}{k-1} P(X_n = k)$ (ces deux séries convergent).

Donc $E\left(\frac{n}{X_n}\right) - \frac{n}{n} P(X_n = n) > E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) - \frac{n-1}{n-1} P(X_n = n)$. Par conséquent $E\left(\frac{n}{X_n}\right) > E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right)$. Ainsi :

$$E\left(\frac{n}{X_n}\right) > p$$

6) Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. $E(Y_n)$ existe et vaut p et $E(Z_n)$ existe et est strictement supérieure à p . Par conséquent :

pour tout élément n de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, Y_n est un estimateur sans biais de p alors que Z_n n'est pas un estimateur sans biais de p .
