



W4-00144
273646
Maths S

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EH LYON Maths Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1.)

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\forall t \in [k, k+1], \quad 0 < k \leq t \leq k+1$$

Donc
$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Donc
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$
 par croissance de l'intégrale

Donc
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

b) Soit $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Donc
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad (\text{par Charles})$$

Donc
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 1 - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

Donc $\forall n \geq 2, \quad S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$

c) $\begin{cases} S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \\ \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} S_n \leq \ln(n) + 1 \\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \end{cases}$

Donc $\forall n \geq 2, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

$\forall n \geq 2, \quad \ln(n) > 0$

Donc

$\forall n \geq 2, \quad 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

Or, $1 + \frac{1}{n \ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et $1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

Donc par encadrement, $\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

Donc $\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$

2.

a) $\text{rang}(50)$ renvoie le plus petit entier k tel que

$S_k \geq 50$

6.)

3.)

a)

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

$t \mapsto \sum_{k=1}^n t^{k-1}$ et $t \mapsto \frac{1-t^n}{1-t}$ sont continues sur $[0, x]$

b) On a alors :

$$\int_0^x \left(\sum_{k=1}^n t^{k-1} \right) dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

Donc
$$\sum_{k=1}^n \int_0^x t^{k-1} dt = - \int_0^x \frac{-1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Donc
$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^x = - [\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Donc
$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) $\forall t \in [0, x], \quad 1-t \geq 1-x > 0$

Donc
$$0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$

Donc
$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt$$

Donc
$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or, $0 < x < 1$, donc $\frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi, par encadrement,

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d) On a ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right) = -\ln(1-x)$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Ce qui montre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Copie anonyme - n°anonymat : 273646

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 235

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1.

$$a) \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = P(Z_n \leq x)$$

$$= 1 - P(Z_n > x)$$

$$= 1 - P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \quad (\text{par indépendance})$$

$$\bullet \text{ Si } x < 0, \forall x \in \mathbb{R}, P(X_i > x) = 1 \quad \text{car } X_i(\Omega) =]0, 1[$$

$$\text{Donc } \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 1$$

$$\text{Donc } 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 0$$

$$\text{Donc } F_n(x) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } x \in [0, 1], F_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x)$$

$$F_n(x) = 1 - (1 - x)^n$$

• Si $x > 1$, $\forall i \in [1, n]$, $P(X_i > x) = 0$ car $X_i(\Omega) =]0, 1[$

Donc
$$\prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 0$$

Donc
$$1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 1$$

Donc
$$F_n(x) = 1$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) • F_n est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$, $\overset{\text{sur}}{]0, 1[}$, et sur $]1, +\infty[$ (1)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} F_n(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - (1-x)^n) = 0 \\ F_n(0) = 0 \end{cases} \quad F_n \text{ est continue en } 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} F_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - (1-x)^n) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x) = 1 \\ F_n(1) = 1 \end{cases} \quad F_n \text{ est continue en } 1$$

Ainsi F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (2)

D'après (1) et (2), Z_n est à densité

c) $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F_n'(x) = 0$

$\forall x \in]0, 1[$, $F_n'(x) = n(1-x)^{n-1}$

En posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

f_n est une densité de Z_n

2. `def Var Z(n):`
`return min(random(n))`

3.) $\forall x \in]0,1[$, $\lim (1-x)^n = 0$ car $1-x \in [0,1[$

Donc $\forall x \in]0,1[$, $\lim (1 - (1-x)^n) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soit X une variable aléatoire suivant la fonction de répartition donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors $Z_n \xrightarrow{L} X$

4. a) On choisit uniformément n variables de lois identiques et on cherche celle où le minimum est atteint. On a ainsi une situation d'équiprobabilité.

Donc $\forall i \in [1, n]$

$$P(Z_n = X_i) = P(Z_n = X_n)$$

Donc $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$

$$b.) P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad P(Z_n - X_n = 0) = \frac{1}{n}$$

$$\text{donc} \quad P(T_n = 0) = \frac{1}{n}$$

$\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $P(T_n = a) \neq 0$ donc T_n n'est pas à densité

c) $\text{def VarT}(n):$
 $\text{return VarZ}(n) - \text{random}()$

5.)

a) La variable T_{500} me semble discrète car il y a vraisemblablement des valeurs prises plusieurs fois. Ceci serait impossible si c'était à densité car sinon $\forall a \in \mathbb{R}, P(T_{500} = a) = 0$

b) D'après la question 4.a), l'aire^{du} rectangle le plus à droite devrait être d'environ $1/500$ de l'aire de l'ensemble des rectangles cumulés.

Cela semble cohérent.

Copie anonyme - n°anonymat : 273646

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème

$$\begin{aligned} 1.) \quad \dim E^* &= \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ &= \dim E \times \dim \mathbb{R} \\ &= \dim E \times 1 \end{aligned}$$

$$\dim E^* = \dim E$$

2.)

$$a) \quad \text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \dim \text{Im } \varphi \leq \dim \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \dim \text{Im } \varphi \leq 1$$

$$\dim \text{Im } \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \dim \text{Im } \varphi = 1$$

$$b) \quad \text{Si } \dim \text{Im } \varphi = 0, \text{ alors } \text{Im } \varphi = \{0_E\}$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \varphi(x) = 0_E$$

$$\text{Donc } \varphi = 0_{E^*}$$

- Si $\dim \text{Im } \varphi = 1$

On a :

$$\begin{cases} \text{Im } \varphi \in \mathbb{R} \\ \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}$

Donc φ est surjective

Donc φ est soit nulle soit surjective

- c) Si φ n'est pas nulle, alors $\dim \text{Im } \varphi = 1$
D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim E$$

Donc $\dim \text{Ker } \varphi = \dim E - \dim \text{Im } \varphi$

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - 1 \quad \text{et} \quad \text{Ker } \varphi \subset E$$

Donc $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E .

3.)

- a) Montrons que g est linéaire

Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\lambda P + Q) &= \int_0^1 (\lambda P + Q)(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 P(t) dt + \int_0^1 Q(t) dt \end{aligned}$$

$$g(\lambda P + Q) = \lambda g(P) + g(Q)$$

Donc g est linéaire

De plus, $\forall P \in E$, P est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 P(t) dt$ existe. $g(P) \in \mathbb{R}$

Ainsi, g est une application de E à valeurs dans $\mathbb{R}$ (2)

D'après (1) et (2), $g \in E^*$

b) g est une forme linéaire non-nulle ^{de E} donc $\text{Ker } g$ est un hyperplan de E .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \dim \text{Ker } g &= \dim E - 1 \\ &= p+1 - 1 \\ \underline{\dim \text{Ker } g} &= p \end{aligned}$$

c). Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\begin{aligned} g(Q_k) &= \int_0^1 Q_k(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{k+1} + t^k \right) dt \\ &= \int_0^1 t^k dt - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$g(Q_k) = 0$$

$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $Q_k \in \text{Ker } g$, donc $\text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \text{Ker } g$

~~Soit $P \in \text{Ker } g$. $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que~~

De plus, $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\deg(Q_k) = k$

Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow \deg Q_i \neq \deg Q_j$

Ainsi $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$

donc $\dim \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) = p$

$$\begin{cases} \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \text{Ker} f \\ \dim \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) = \dim \text{Ker} f \end{cases}$$

Ainsi, $\text{Ker} f = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p)$

$(Q_1, \dots, Q_p)$ est une famille libre et génératrice de $\text{Ker} f$, donc une base de $\text{Ker} f$.

4.) a)

$$\forall (P, Q, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}, \quad f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0) \\ = \lambda P(0) + Q(0)$$

$$f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + Q(P)$$

f est linéaire et est une application de E dans $\mathbb{R}$
donc $f \in E^*$

6) Posons $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad Q_k(x) = x^k$

• Montrons que $\text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \text{Ker} f$

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad Q_k(0) = 0^k = 0 \quad \text{car } k \neq 0$$

$$\text{Donc } \underline{f(Q_k) = 0}$$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad Q_k \in \text{Ker} f$, donc $\text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \text{Ker} f$

• $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \Rightarrow \deg(Q_i) \neq \deg(Q_j)$

Donc $(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre dans E

$$\text{Donc } \dim \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) = p$$

Copie anonyme - n°anonymat : 273646

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De plus, f est une forme linéaire non-nulle donc
 $\dim \ker f = \dim E - 1 = p$

On a donc :

$$\begin{cases} \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \ker f \\ \dim \ker f = \dim \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \end{cases}$$

Ainsi

$$\ker f = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p)$$

5.)

a) f et g sont deux formes linéaires non nulles de E donc $\dim \ker f = \dim \ker g = \dim E - 1$

De plus,

$$\underline{\ker f \subset \ker g}$$

Donc d'après ce qui est souligné, $\ker f = \ker g$

b) Supposons qu'il n'existe aucun élément x_0 de E qui n'appartienne pas à $\ker f$

$$\text{Alors } \ker f = E$$

Alors $f = 0_{E^*}$ ce qui est absurde

Donc $\exists x_0 \in E$ tel $x_0 \notin \ker f$

c) Tout d'abord $x_0 \neq 0_E$ car $f(x_0) \neq 0_E$

Ainsi $\dim \text{Vect}(x_0) = 1$

On a donc $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Vect}(x_0) = (\dim E - 1) + 1 = \dim E$

De plus, $x_0 \notin \text{Ker } f$, donc $\text{Ker } f \cap \text{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

D'après ce qui est souligné,

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0)$$

d) Soit $x \in E$. $\exists (y, z) \in \text{Ker } f \times \text{Vect}(x_0)$ tel que
 $x = y + z$ car $E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0)$ avec $z = \alpha x_0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Ainsi, } h(x) = g(x_0)f(x) - f(x_0)g(x)$$

$$= g(x_0)f(y+z) - f(x_0)g(y+z)$$

$$h(x) = g(x_0)f(\alpha x_0) + g(x_0)f(y) - f(x_0)g(\alpha x_0) - f(x_0)g(y)$$

$y \in \text{Ker } f$ donc $y \in \text{Ker } g$ car $\text{Ker } f = \text{Ker } g$

$$\text{Donc } f(y) = g(y) = 0$$

On a alors :

$$h(x) = g(x_0)f(\alpha x_0) - f(x_0)g(\alpha x_0)$$

$$= \alpha(g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0))$$

$$h(x) = 0$$

$$\forall x \in E, h(x) = 0$$

Donc $h = 0_{E^*}$

e) $h = 0_{E^*}$

Donc $g(x_0)f - f(x_0)g = 0_E$

Donc $g(x_0)f = f(x_0)g$

donc $g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f \quad (f(x_0) \neq 0)$

Ainsi g et f sont colinéaires

Partie II

6.a) $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H donc en particulier c'est une famille libre.

Le théorème de la base incomplète affirme alors que cette famille peut être complétée en une base de E .

$\dim H = n-1$ et $\dim E = n$ donc il manque un vecteur afin de compléter $(e_1, \dots, e_{n-1})$ en une base de E .

Donc $\exists e_n \in E$ tel que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .

6.) φ est bien une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$
donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

De plus, $\forall i \in [1, n-1], \varphi(e_i) = 0$

Donc $\forall i \in [1, n-1], e_i \in \ker \varphi$ et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H

Donc $H \subset \ker \varphi$

De plus, φ est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E donc $\dim \ker \varphi = \dim E - 1 = n-1$
et $\dim H = n-1$

Ainsi
$$\begin{cases} H \subset \ker \varphi \\ \dim H = \dim \ker \varphi \end{cases}$$

Donc $\ker \varphi = H$

Copie anonyme - n°anonymat : 273646

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7.) • Soit $x \in \text{Ker } f$

$$f(x) = (0, \dots, 0)$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) = 0$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x \in \text{Ker } f_i$

Donc $x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$

Ainsi, $\text{Ker } f \subset \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$

• Soit $x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) = 0$$

Donc $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0)$

Donc $f(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$

Donc $x \in \text{Ker } f$

Ainsi, $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \subset \text{Ker } f$

Par double inclusion, on en déduit que $\text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$

8.

a) f est surjective. Tout élément de $\mathbb{R}^p$ admet alors un antécédent par f .

En particulier, ε_1 admet un antécédant x par f .

b) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$.

Supposons que $\sum_{i=1}^p \alpha_i f_i = 0_{\mathbb{R}^p}$

Notons $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, x_j un antécédant de ε_j par f
de sorte que $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i(x_j) = \begin{cases} \varepsilon_j & \text{si } i=j \\ 0_{\mathbb{R}^p} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On a ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x_j) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \alpha_j f_j(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \alpha_i f_i(x_j) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \alpha_j \varepsilon_j = 0_{\mathbb{R}^p}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \alpha_j = 0 \quad \text{car } \varepsilon_j \neq 0_{\mathbb{R}^p}$$

Ainsi, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^*

3. a) $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^p$

Donc $\dim \text{Im } f \leq \dim \mathbb{R}^p$

Donc $m \leq p$

f n'étant pas surjective, on est sûr que $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^p$

Donc en fait, $m < p$

6) Notons $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$

Posons, φ élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall i \in [1, p], \quad \varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in [1, p-1] \\ 1 & \text{si } i = p. \end{cases}$$

D'après la question 6.) $H' = (e_1, \dots, e_{p-1})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ et $m \leq p-1$

Donc $\forall i \in [1, m], \quad e_i \in H'$

Donc $\text{Im } f \subset H'$ car $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de H' .

Ainsi, $\text{Im } f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.

10.)

a) D'après la question précédente, si f n'est pas surjective, alors $(f_1, \dots, f_p)$ n'est pas libre.

Par contraposition:

Si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, alors f est surjective

Code épreuve : 235

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EH LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III

11.1

a) Montrons que f_a est linéaireSoit $(x, y, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_a(\lambda x + y) &= \langle a, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle \end{aligned}$$

$$f_a(\lambda x + y) = \lambda f_a(x) + f_a(y)$$

f_a est ^{une application} linéaire de E dans $\mathbb{R}$

Donc $f_a \in E^*$ b) Montrons que $\ker f_a \subset (\text{Vect}(a))^\perp$ Soit $x \in \ker f_a$

$$f_a(x) = 0$$

$$\text{donc } \langle a, x \rangle = 0$$

$$\text{donc } a \perp x$$

et (a) est génératrice de $\text{Vect}(a)$

$$\text{Donc } x \in (\text{Vect}(a))^\perp$$

$$\text{Ainsi } \underline{\ker f \subset (\text{Vect}(a))^\perp}$$

• Montrons que $(\text{Vect}(a))^{\perp} \subset \text{Ker } f_a$

$$\begin{aligned} \forall x \in (\text{Vect}(a))^{\perp}, \quad & \langle a, x \rangle = 0 \\ \text{donc} \quad & f_a(x) = 0 \\ \text{donc} \quad & x \in \text{Ker } f_a \end{aligned}$$

Ainsi, $(\text{Vect}(a))^{\perp} \subset \text{Ker } f_a$

Par double inclusion, $\text{Ker } f_a = (\text{Vect}(a))^{\perp}$

c) Si $f_a = 0_{E^*}$

Alors $\text{Ker } f_a = E$

Donc $(\text{Vect}(a))^{\perp} = E$

Donc $\text{Vect}(a) = E^{\perp}$

Donc $\text{Vect}(a) = \{0_E\}$ car $E^{\perp} = \{0_E\}$

Donc $a = 0_E$

12.)

a) Soient $(a, b) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, \quad [\Phi(\lambda a + b)](x) = f_{\lambda a + b}(x)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \lambda a + b, x \rangle \\ &= \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle \\ &= \lambda f_a(x) + f_b(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in E, \quad [\Phi(\lambda a + b)](x) = \lambda [\Phi(a)](x) + [\Phi(b)](x)$$

Donc $\Phi(\lambda a + b) = \lambda \Phi(a) + \Phi(b)$

Ainsi Φ est linéaire.

b) Soit $a \in E$

D'après la question 11-c), $\Phi(a) = 0_{E^*} \Leftrightarrow a = 0_E$

Donc $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$, donc Φ est injective.

De plus, $\dim E = \dim E^*$ d'après la question 1.

Ainsi, Φ est un isomorphisme de E sur E^* .

c) Φ est un isomorphisme, donc: de E sur E^*

$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$ car Φ est bijective
tel que $\varphi_a = \varphi$

$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$

13.

• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (1)

• Soient $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + B, C \rangle &= \text{tr}({}^t(\lambda A + B)C) \\ &= \text{tr}(\lambda {}^tA + {}^tB)C) \\ &= \text{tr}(\lambda {}^tAC + {}^tBC) \\ &= \lambda \text{tr}({}^tAC) + \text{tr}({}^tBC) \end{aligned}$$

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire sur la première variable. (2)

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ avec $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$

Notons (c_{ij}) le coefficient générique de tAB .

$$\forall (i, j), c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ki} b_{kj}$$

$$\text{TR}({}^tAB) = \sum_{i=1}^p c_{ii}$$

$$\text{TR}({}^tAB) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ki} b_{ki}$$

En inversant les rôles de A et B on a aussi :

$$\text{tr}({}^tBA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ki} b_{ki}$$

$$\text{Donc } \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^tBA)$$

$$\text{Donc } \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique (3)

• Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^tAA)$$

$$\langle A, A \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}^2$$

$$\text{Or, } \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}^2 \geq 0 \quad \text{car } \forall (i, j) \in [1, p]^2, a_{ij} \geq 0$$

$$\text{Donc } \langle A, A \rangle \geq 0$$

De plus,

Copie anonyme - n°anonymat : 273646

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\langle A, A \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, a_{ij}^2 = 0 \quad \text{car} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, a_{ij}^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, a_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow A = O_p$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive (4)

D'après (1), (2), (3), et (4).

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

