



P6-00034
974448
Maths S

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro. EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

1-2) $\forall t \in \mathbb{C}, t+1, \quad h \leq t \leq h+1$ donc :

$\frac{1}{h+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{h}$ et comme ces fonctions
sont continues sur
 $\mathbb{C}, t+1$, par
croissance de
l'intégration :

$$\int_h^{h+1} \frac{1}{h+1} dt \leq \int_h^{h+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_h^{h+1} \frac{1}{h} dt \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{h+1} \leq \int_h^{h+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{h}$$

6) En sommant l'inégalité précédente pour h allant de
1 à $n-1$.

$$\sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h+1} \leq \sum_{h=1}^{n-1} \int_h^{h+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h}$$

et donc d'après la relation de chasles :

$$\sum_{h=2}^n \frac{1}{h} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h} \text{ soit :}$$

$$\underline{\sum_{h=2}^n \frac{1}{h} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h}}$$

c) D'après 91-6),

$$\forall n \geq 2, \quad \int_1^n \frac{1}{h} dh + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{1}{h} dh + 1 \quad \text{soit :}$$

$$C \ln(n) \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq S_n \leq C \ln(n) \frac{1}{n} + 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$

d) $\forall n \geq 2, \ln(n) > 0$ donc d'après 91-c) :

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\text{or, } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \end{cases}$$

Donc, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$

Ainsi, on peut conclure :

$$\underline{S_n \sim \ln(n)}$$

2-2) Le programme, le premier h tel que $s_h \geq 50$
renvoie

6)

$$3-2) \sum_{h=1}^n h^{h-1} = \sum_{h=0}^{n-1} h^h \quad \text{et comme } 1 \leq x \leq 1 : \\ = \frac{1 - h^n}{1-h}$$

6) Soit $1 \leq 1$

Par linéarité de l'intégration:

$$\sum_{h=1}^n \frac{x^h}{h} + \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh$$

$$\int_0^x \sum_{h=1}^n h^{h-1} dh = \int_0^x \frac{1-h^n}{1-h} dh \quad \text{soit:}$$

$$\sum_{h=1}^n \int_0^x h^{h-1} dh = \int_0^x \frac{1}{1-h} dh - \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh \quad \text{d'où:}$$

$$\sum_{h=1}^n \left[\frac{h^h}{h} \right]_0^x = (-\ln(1-x))_0^x - \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh \quad \text{soit:}$$

$$\sum_{h=1}^n \frac{x^h}{h} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh$$

c) $\forall h \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}, 0 \leq 1-h \leq 1$ d'où:

$$0 \leq \frac{h^n}{1-h} \leq h^n$$

et comme ces fonctions sont continues sur $\mathbb{C}, x \in \mathbb{C}$, par croissance de l'intégration:

$$0 \leq \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh \leq \int_0^x h^n dh \quad \text{d'où :}$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh \leq C \frac{h^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \quad \text{d'où :}$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$

Donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{h^n}{1-h} dh = 0$

d) En intégrant le résultat de 93-c) dans l'égalité établie en 93-b), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Ainsi, on peut conclure :

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Exercice 2 :

1-2) $Z_n(\omega) = [0, 1]$

Soit $x \in \mathbb{R}$

▷ Si $x < 0$

$$F_n(x) = 0 \quad \dots$$

▷ Si $x > 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro. EMC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$F_n(x) = 1$$

D Si $x \in \mathbb{C} 0, n \mathbb{D}$

$$F_n(x) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\mathbb{C} X_1 \geq x \mathbb{D} \cap \dots \cap \mathbb{C} X_n \geq x \mathbb{D})$$

et comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$$= 1 - \prod_{h=1}^n \mathbb{P}(X_h \geq x)$$
$$= 1 - \prod_{h=1}^n (1 - F_{X_h}(x))$$

et comme $\forall h \in \mathbb{C} 1, n \mathbb{D}, X_h \hookrightarrow \mathcal{U}(0, 1 \mathbb{C})$ et que $x \in 0, 1 \mathbb{C}$

$$= 1 - \prod_{h=1}^n (1 - x)$$
$$F_n(x) = 1 - (1 - x)^n$$

Ainsi, la fonction F_n de $\mathbb{R}_n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$6) \Delta \forall x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1), F_n'(x) = 0$$

$$\forall x \in (0, 1), F_n'(x) = n(1-x)^{n-1} \geq 0$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, F_n'(x) \geq 0$$

Donc, F_n est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\Delta \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0$$

ΔF_n est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

$$* \forall x \in (0, 1), F_n(x) = 1 - \exp(-n \ln(1-x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0^- \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0^+} n \ln(1-x) = 0$$

Et comme $\exp$ est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(-n \ln(1-x)) = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) &= 1-1 \\ &= 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} F_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi, F_n est continue en 0

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} 1/(1-x) = -\infty \text{ d'où:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} n/(1-x) = -\infty \text{ d'oc par composition:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \exp(n/(1-x)) = 0 \text{ donc:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} F_n(x) &= 1-0 \\ &= 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi, F_n est continue en 1

Donc, F_n est continue sur $\mathbb{R}$

▷ F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Ainsi, la variable aléatoire Z_n est à densité

c) En dérivant la relation obtenue en 97-27, une densité f_n de Z_n est donnée, pour x réel, par:

$$f_n(x) = \begin{cases} n/(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2- def var Z(n):

```
from numpy import min
from numpy.random import random
return np.min(random(101))
```

3- ~~$\forall x \in (0, 1), |1-x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n = 0$ d'où:~~

~~$\forall x \in (0, 1), \lim$~~

$$\begin{aligned} 4-2) \quad \mathbb{P}(Z_n = x_n) &= \mathbb{P}(\min(x_1, \dots, x_n) = x_n) \\ &= \mathbb{P}(\min(x_1, \dots, x_{n-1}) \geq x_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n-1} \geq x_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n-1} - x_n \geq 0) \end{aligned}$$

et comme $x_n \in \mathcal{U}(0, 1)$, est indépendante de $x_1, \dots, x_{n-1}$
alors d'après le résultat admis:

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_{-\infty}^0 g_{n-1}(x) dx \\ &= 1 - \int_{-1}^0 g_{n-1}(x) dx \\ &= 1 - \int_{-1}^0 1 - (-x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

et par linéarité de l'intégration:

$$= 1 - 1 + \left[\frac{(-x)^n}{n} \right]_{-1}^0$$

$$\underline{\mathbb{P}(Z_n = x_n) = \frac{1}{n}}$$

6) D'après le résultat précédent:

$$\mathbb{P}(Z_n - x_n = 0) = \frac{1}{n} \quad \text{soit:}$$

$$\mathbb{P}(T_n = 0) = \frac{1}{n}$$

$\neq 0$

Donc, η n'est pas à densité

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro - EML		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

```
07 import numpy random as rd
import numpy as np
```

def VarT(n):

z = VarZ(n)

x = rd.random()

return z - x

5-2) l'ensemble des valeurs prises par T_{500} est infini et ne semble pas être une suite indexée par n donc T_{500} ne semble pas être discrète.

6) D'après 94-2), $P(T_{500} = 0) = \frac{1}{500}$
Or, 2000/500 est le nombre de fois où T_{500} prend la valeur 0
Or, $\frac{2000}{500} \approx 50$ et comme le rectangle le plus à droite semble être de hauteur 50, alors le résultat est cohérent avec le résultat de 94-2)

Problème

Preliminaire

1- D'après le résultat admis:

$$\dim(E^*) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) \quad \text{et comme } \dim(\mathbb{R}) = 1 \\ = \dim(E)$$

2-a) $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ (car $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$) donc :

$$\text{rg}(\varphi) \leq \dim(\mathbb{R}) \\ \leq 1$$

Ainsi $\text{rg}(\varphi) \in \{0, 1\}$

6) $\triangleright$ Si $\text{rg}(\varphi) = 0$

$$\text{Alors } \text{Im}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}}\}$$

$$\text{Donc, } \varphi = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$$

$\triangleright$ Si $\text{rg}(\varphi) = 1$

Alors $\text{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R})$ et $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ donc :

$$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$$

Ainsi, φ est surjective

c) $\text{Ker}(\varphi) \subset E$ et d'après la formule du rang, et
comme $\text{rg}(\varphi) = 1$ d'après 9.2-b) :

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi) \\ = n - 1$$

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E .

Partie D:

3-210g: $E \rightarrow \mathbb{R}$

▷ Soit $(\lambda, P_0, P_1) \in \mathbb{R} \times E \times E$.

$$g(\lambda P_0 + P_1) = \int_0^1 (\lambda P_0 + P_1)(t) dt$$

et par linéarité de l'intégration:

$$= \lambda \int_0^1 P_0(t) dt + \int_0^1 P_1(t) dt$$

$$g(\lambda P_0 + P_1) = \lambda g(P_0) + g(P_1)$$

Donc, $g \in (E, \mathbb{R})$

Ainsi, $g \in E^*$

6) Soit $P \in \text{Ker}(g)$

$$\text{Alors } \int_0^1 P(t) dt = 0$$

$$g(\lambda P) = \int_0^1 \lambda P dt$$

$$= \frac{\lambda P+1}{P+1} \int_0^1$$

$$g(\lambda P) = \frac{1}{P+1}$$

$$\neq 0$$

Ainsi, g est un élément de E^* non nul

Donc, d'après q2, $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}_p[X]) - 1$

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(g)) &= p+1 - 1 \\ &= p \end{aligned}$$

c) Soit $h \in \mathbb{E}, p \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} g(q_h) &= \int_0^1 h h - \frac{1}{h+1} dh \\ &= \left[\frac{h^{h+1}}{h+1} \right]_0^1 - (1-0) \frac{1}{h+1} \\ &= \frac{1}{h+1} - \frac{1}{h+1} \end{aligned}$$

$$g(q_h) = 0$$

Ainsi, $q_h \in \text{Ker}(g)$ (et ceci pour tout $h \in \mathbb{E}, p \in \mathbb{D}$)

• $\forall h \in \mathbb{E}, p \in \mathbb{D}, \deg(q_h) = h$

$$\text{et } \deg(q_1) = 1 > 0$$

Donc, $0 < \deg(q_1) < \deg(q_2) < \dots < \deg(q_p)$

Ainsi, $(q_1, \dots, q_p)$ est une famille de polynômes de $\text{Ker}(g)$ à degrés échelonnés

Donc, $(q_1, \dots, q_p)$ est une famille libre de $\text{Ker}(g)$ contenant $p = \dim(\text{Ker}(g))$ éléments (q3-b) donc $(q_1, \dots, q_p)$ est une base de $\text{Ker}(g)$.

4-2) $\Delta f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

• Soit $(\lambda, p_0, p_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda p_0 + p_1) &= (\lambda p_0 + p_1)(0) \\ &= \lambda p_0(0) + p_1(0) \\ &= \lambda f(p_0) + f(p_1) \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$

Ainsi, $f \in \mathbb{E}^*$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro. EMC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

6) Soit $P_2 = x^p + 1$

Alors, $f(P_2) = 0 + 1$
 $= 1$
 $\neq 0$

Donc, f est non nulle

Ainsi, d'après q2-c), $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_p[x]) - 1$
 $= p + 1 - 1$
 $\dim(\ker(f)) = p$

▷ $\forall h \in \mathbb{C}_{1,p}[x], f(x^h) = 0^h$
 $= 0$

Donc, $(x, x^2, \dots, x^p)$ est une famille 1 de $\ker(f)$
comme elle est à degrés échelonnés cette famille est libre

De plus, elle contient p éléments et d'après ce qui précède, $\dim(\ker(f)) = p$

Donc, $(x, \dots, x^p)$ est une base de $\ker(f)$

D'où, $\ker(f) = \text{Vect}(x, \dots, x^p)$

13/

$$5-2) \text{ D'après } 92-1), \begin{cases} \dim(\ker(f)) = n-1 \\ \dim(\ker(g)) = n-1 \end{cases}$$

Ainsi, $\ker(f) \subset \ker(g)$ et $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g))$

Donc, $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g))$

6) Comme f est non nul, $\exists x_0 \in E \mid f(x_0) \neq 0$

Donc, $\exists x_0 \in E \mid x_0 \notin \ker(f)$

$$c) \triangleright \begin{cases} \ker(f) \subset E \\ \text{Vect}(x_0) \subset E \end{cases} \quad \text{donc } \ker(f) + \text{Vect}(x_0) \subset E$$

$\triangleright$ Soit $x \in \ker(f) \cap \text{Vect}(x_0)$

Alors, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid x = \lambda x_0$ et $f(x) = 0$

Comme f est linéaire, $f(\lambda x_0) = 0$ d'où :

$$\lambda f(x_0) = 0 \quad \text{et comme d'après } 95-6), f(x_0) \neq 0$$

$$\lambda = 0$$

Donc, $x = 0_E$

Ainsi, $\ker(f) \cap \text{Vect}(x_0) = \{0_E\}$

Donc, $\ker(f)$ et $\text{Vect}(x_0)$ sont en somme directe.

$\triangleright$ D'autre part, comme $x_0 \neq 0_E$, $\dim(\text{Vect}(x_0)) = 1$ d'où :

$$\begin{aligned}
 \dim(\ker(f) \oplus \text{Vect}(x_0)) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Vect}(x_0)) \\
 &= n-1 + 1 \\
 &= n \\
 &= \dim(E)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(f) \oplus \text{Vect}(x_0) = E$.

d) soit $x \in E$

D'après 95-c): $\exists (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R} \times \ker(f) \mid x = \alpha + \lambda x_0$.

Comme f et g sont linéaires, on a :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= g(x_0) f(\lambda x_0 + \alpha) - f(x_0) g(\lambda x_0 + \alpha) \\
 &= \lambda (g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(x_0)) + g(x_0) f(\alpha) - f(x_0) g(\alpha)
 \end{aligned}$$

et comme $g(\alpha) = f(\alpha) = 0$ car $\alpha \in \ker(f)$

$$h(x) = 0$$

Ainsi, h est nulle

e) comme $f(x_0) \neq 0$, d'après 95-d):

$$g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} \cdot f \quad \text{et en posant } \mu = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} :$$

$$g = \mu \cdot f$$

D soit $y \in \text{Im}(g)$

Alors $\exists x \in E \mid y = g(x)$ soit :

$$y = \mu f(x) \quad \text{et comme } f \text{ est linéaire:}$$

$$y = f(\mu x) \quad \text{d'où:}$$

$$y \in \text{Im}(f)$$

Donc, $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$ et d'après la formule du rang :

$$\begin{aligned} \text{rg}(g) &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(g)) \quad \text{d'out d'après 95-2)} \\ &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) \\ &= \text{rg}(f) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \text{Im}(f) = \text{Im}(g)$$

~~Donc, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists (x_1, x_2) \in E \mid y = g(x_1)$
 $y = f(x_2)$~~

Ainsi, $g \in \text{Vect}(F)$

Partie - II

6-2) Comme $H \subset E$

$(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille liée de E

D'après le théorème de la base incomplète,

$\exists e_n \in E$ tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

6) $\text{Im}(p) \subset \mathbb{R}$ et $p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ donc cette définition est correcte

$\forall i \in [1, n-1], e_i \in \text{Ker}(p)$ donc :

$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \text{Ker}(p)$ soit d'après 96-2) :

$H \subset \text{Ker}(p)$ donc :

$\dim(H) \leq \dim(\text{Ker}(p))$ soit :

$$n-1 \leq \dim(\text{Ker}(p))$$

supposons que $\dim(\text{Ker}(p)) = n$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appo. EMC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Alors $\text{Ker}(\varphi) = E$ or $\varphi(e_n) = 1$ ce qui est absurde
 $\neq 0$

$$\text{Donc, } \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n-1 \\ = \dim(H)$$

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = H$

7- $\triangleright$ Soit $x \in \text{Ker}(f)$

Alors $f(x) = 0_{n,p}$ soit :

$$(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0_{n,p} \text{ donc :}$$

$$x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \quad \text{d'où :}$$

$$\text{Ker}(f) \subset \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i)$$

$$\triangleright \text{Soit } x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i)$$

Alors $\forall i \in \{1, p\}, f_i(x) = 0$ d'où :

$$(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0_{n,p} \text{ donc :}$$

$$f(x) = 0_{n,p} \quad \text{d'où :}$$

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f)$$

Ainsi, on a démontré que :

$$\text{Ker}(f) = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i)$$

$$8-2) \quad \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$$

Comme f est surjective, $\exists x \in E \mid f(x) = \varepsilon_1$

6) D'après le raisonnement de 8-2),

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists x_i \in E \mid f(x_i) = \varepsilon_i$$

Procédons par récurrence forte.

Posons, $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A(j) : "$ la famille $(f_1, \dots, f_j)$ est libre dans E^* ".

▷ f_1 est non nulle donc (f_1) est libre dans E^* .

▷ Soit $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Supposons que $A(1), \dots, A(j-1)$ sont vraies.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_j) \in \mathbb{R}^j$.

Supposons que $\sum_{i=1}^j \lambda_i f_i = 0_{E^*}$

En évaluant cette relation en x_j , on a

$$(\lambda_1 f_1(x_j), \dots, \lambda_j f_j(x_j)) = 0_{\mathbb{R}^j}$$

et comme $f(x_j) = e_j$, alors $\forall i \in [1, j-1]$, $f_i(x_j) = 0$

$$\text{et } f_j(x_j) = 1$$

Donc, $\lambda_j \times 1 = 0$ soit :

$$\lambda_j = 0$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i f_i = 0$ donc par hypothèse de récurrence, comme $(f_1, \dots, f_{j-1})$ est libre :

$$\forall i \in [1, j-1], \lambda_i = 0$$

D'où, la famille $(f_1, \dots, f_j)$ est libre

Donc, A_{j+1} est vraie

* $\forall i \in [1, p]$, $(f_1, \dots, f_i)$ est libre.

Ainsi, en particulier, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

9-2) Comme f n'est pas surjective

$$\text{rg}(f) < \dim(\mathbb{R}^p) \quad \text{d'où :}$$

$$\underline{m < p.}$$

6) $(e_1, \dots, e_m)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ donc :

d'après le théorème de la base incomplète : il existe

$(e_{m+1}, \dots, e_p) \in \mathbb{R}^{p-m}$ tel que $(e_1, \dots, e_p)$ est

une base de $\mathbb{R}^p$.

▷ Si $m = p-1$

Alors $\text{Im}(f) = H$ où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$

▷ Si $m \leq p-2$

Alors en posant $H = \text{Im}(f) \oplus \text{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_{p-1})$, H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$

Ainsi, dans tous les cas, $\text{Im}(f)$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$

c) Comme H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$, il existe φ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^p$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$ (d'après 96-)

Ainsi, d'après 99-6) :

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi) \quad \text{où} \quad \dim(\text{Ker}(\varphi)) = p-1$$

▷ Supposons que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans $\mathbb{R}^{p*}$

$$\text{On a, } \forall i \in [1, p], \forall x \in E, \varphi(f_i(x)) = 0$$

$$\text{Donc, } \forall i \in [1, p], \varphi(f_i) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \subset \text{Ker}(\varphi)$$

comme $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, génératrice de $\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ et entiers péléments, alors :

$$\dim(\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)) = p \quad \text{donc :}$$

$$p \leq \dim(\text{Ker}(\varphi))$$

$$\leq p-1 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths apéro - EMC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc, la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* .

10.2)

6) Comme f est surjective, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^p$ (*)

D'après 9.7. :

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \right) &= \dim(\text{Ker}(f)) \quad \text{et comme } f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^p) \\ &\quad \text{d'après la formule du} \\ &\quad \text{rang :} \\ &= \dim(E) - \text{rg}(f) \quad \text{donc d'après (*) :} \\ &= n - \dim(\mathbb{R}^p) \quad \text{soit :} \end{aligned}$$

$$\underline{\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \right) = n - p}$$

Partie-III

11-a) $\triangleright$ Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Soit (λ, x_1, x_2)

Par bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda x_1 + x_2) &= \langle a, \lambda x_1 + x_2 \rangle \\ &= \lambda \langle a, x_1 \rangle + \langle a, x_2 \rangle \\ &= \lambda f_2(x_1) + f_2(x_2) \end{aligned}$$

Donc, $f_2 \in \langle E, \mathbb{R} \rangle$

Donc, $f_2 \in E^*$

6) $\triangleright$ Soit $x \in \text{Ker}(f_2)$

Alors $\langle a, x \rangle = 0$ d'où :

$x \in \text{Vect}(a)^\perp$ donc :

$$\text{Ker}(f_2) \subset \text{Vect}(a)^\perp$$

$\triangleright$ Soit $x \in \text{Vect}(a)^\perp$

Alors, $\langle a, x \rangle = 0$ d'où :

$x \in \text{Ker}(f_2)$ donc :

$$\text{Vect}(a)^\perp \subset \text{Ker}(f_2)$$

Ainsi, $\text{Ker}(f_2) = \text{Vect}(a)^\perp$

c) supposons que $f_2 = 0_{E^*}$

Alors $\forall x \in E, \langle a, x \rangle = 0$

Donc, $a \in E^\perp = \{0_E\}$

Donc, $a = 0_E$

(2-2) soit $(\lambda, a_0, a_1) \in \lambda \times E^2$

$$\Phi(\lambda a_0 + a_1) = f_{\lambda a_0 + a_1}$$

Montrons que $f_{\lambda a_0 + a_1} = \lambda f_{a_0} + f_{a_1}$

$$\forall x \in E, f_{\lambda a_0 + a_1}(x) = \langle \lambda a_0 + a_1, x \rangle$$

$$= \lambda \langle a_0, x \rangle + \langle a_1, x \rangle$$

$$\forall x \in E, f_{\lambda a_0 + a_1}(x) = \lambda f_{a_0}(x) + f_{a_1}(x) \quad \text{donc:}$$

$$f_{\lambda a_0 + a_1} = \lambda f_{a_0} + f_{a_1}$$

Donc:

$$\Phi(\lambda a_0 + a_1) = f_{\lambda a_0 + a_1}$$

$$= \lambda f_{a_0} + f_{a_1} \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$= \lambda \Phi(a_0) + \Phi(a_1)$$

Donc, Φ est linéaire

6) Soit $a \in E$

$$\text{Alors } \Phi(a) = 0 \Rightarrow f_a = 0$$

Donc, d'après 9.11-1,

$$a = 0_E$$

$$\text{Donc, } \text{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$$

Ainsi, Φ est injective

or, d'après 9.1-, $\dim(E) = \dim(E^*)$

Donc, Φ est bijective

Ainsi, Φ est un isomorphisme de E sur E^*

c) Comme Φ est un isomorphisme de E sur E^* ,

$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E \mid \varphi = \Phi(a)$ soit :

$$\varphi = f_a \quad \text{soit :}$$

$$\forall x \in E, \varphi(x) = f_a(x) \text{ d'où :}$$

$$\underline{\forall x \in E, \varphi(x) = (a, x).}$$

$$13-2) \text{ D } \langle \cdot, \cdot \rangle = (M_p(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } (\lambda, A_0, B_0, B_1)$$

$$\begin{aligned} \text{D } \langle A_0, B_0 \rangle &= \text{Tr}(\mathcal{L}(A_0 B_0)) \\ &= \text{Tr}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(A_0) B_0)) \\ &= \text{Tr}(\mathcal{L}(B_0) \mathcal{L}(A_0)) \\ &= \text{Tr}(\mathcal{L}(B_0 A_0)) \\ &= \langle B_0, A_0 \rangle \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EME.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

$$D \quad \langle A_0, \lambda B_0 + B_1 \rangle = \text{Tr}({}^t A_0 (\lambda B_0 + B_1))$$

et comme tr est linéaire :

$$= \lambda \text{Tr}({}^t A_0 B_0) + \text{Tr}({}^t A_0 B_1)$$

$$= \lambda \langle A_0, B_0 \rangle + \langle A_0, B_1 \rangle$$

Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

$$D \quad {}^t A_0 A_0 = \left(\sum_{k=1}^p a_{ijk} a_{ijk} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket^2}$$

$$\langle A_0, A_0 \rangle = \text{Tr}({}^t A_0 A_0)$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ijk}^2$$

$$\geq 0$$

D supposons que $\langle A_0, A_0 \rangle = 0$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ijk}^2 = 0$$

or, $\forall i \in \llbracket 1,p \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1,p \rrbracket, a_{ijk}^2 \geq 0$

Donc, $\forall (i, h) \in \mathbb{C}, \mathbb{P} \mathbb{D}^2$, $\sum_{i, h}^2 = 0$ soit :
 $\sum_{i, h} = 0$

Donc, $A_0 = 0_p$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_p(\mathbb{R})$

6) Ici $E = M_p(\mathbb{R})$

Supposons que $\varphi \in E^*$, c'est-à-dire que φ est une forme linéaire de E .

D'après 9(2-c), comme d'après 9(3-a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E , alors :

$\exists A_0 \in M_p(\mathbb{R}) / \forall M \in E, \varphi(M) = \langle A_0, M \rangle$ soit :

$$\varphi(M) = \text{Tr}(A_0 M)$$

Ainsi, en posant $A = A_0$, on peut conclure :

Il existe une matrice A dans $M_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $M_p(\mathbb{R})$ on a :

$$\underline{\varphi(M) = \text{Tr}(AM)}$$

Exercice 7,

3-. $\forall x \in]0, 1[, F_n(x) = 1 - (1-x)^n$ donc, comme $|1-x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 $= F(x)$

Montrons que $F(x)$ est une fonction de répartition:

F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 0$$

Donc, F est croissante sur $\mathbb{R}$.

dont la fonction de répartition est

Ainsi, on pose la variable aléatoire Z définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\underline{Z_n \xrightarrow{\text{loi}} Z}$$

Exercice 1:

2-6) comme $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n/n)$

