

Copie anonyme - n°anonymat : 974448



P6-00034
974448
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ donc d'après la formule du rang:

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Ker}(f)) \quad \text{et comme } \begin{cases} \text{rg}(f) = 1 \\ \dim(\mathbb{R}^n) = n \end{cases} :$$

$$\underline{\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1}$$

▷ $n \geq 2$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$

Ainsi, $0 \in \text{Sp}(f)$

2-2) comme $\text{rg}(M) = 1$, toutes les colonnes de M sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que:

$$M = \begin{pmatrix} c & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

$$\dots = c \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix} \quad \text{et en posant } L = \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

$$M = cL$$

Ainsi, il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = cL$

~~2-1) D'après 92-2) et 92-6):~~

$$\text{Tr}(M)M = CL \cdot CL$$

$$\begin{aligned} 3) M \cdot C &= CL \cdot C \quad (\text{d'après 92-2)}) \\ &= C \cdot \text{Tr}(M) \quad (\text{d'après 92-6)}) \end{aligned}$$

$$M \cdot C = \text{Tr}(M) \cdot C$$

comme C est supposée non nulle, alors on peut conclure:

$\text{Tr}(M)$ est valeur propre de M , et donc de f

4) comme d'après "Q1", $\dim(E_0(f)) = n-1$

où on a noté $E_0(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0

$$\text{Et que } \begin{cases} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n \\ \dim(E_{\text{Tr}(M)}(f)) \geq 1 \end{cases}$$

Alors $\text{Sp}(f) = \{0, \text{Tr}(M)\}$ et comme $\text{Tr}(M) = 0$

$$\text{Sp}(f) = \{0\}$$

▷ Supposons que M est diagonalisable

Alors $M = 0 \cdot I_n$ ce qui absurde car f est non nulle
 $= 0_n$ ($\text{rg}(f) = 1$)

Donc, on peut conclure :

M n'est pas diagonalisable

5- Comme $\text{Tr}(M) \neq 0$ et que d'après 94-, $\text{sp}(f) = \{0, \text{Tr}(M)\}$

$$\text{Alors } n \leq \sum_{\lambda \in \text{sp}(f)} \dim(E_{\lambda}(f))$$

$$\leq \dim(E_0(f)) + \dim(E_{\text{Tr}(M)}(f))$$

$$\leq n$$

$$\text{Donc, } \sum_{\lambda \in \text{sp}(f)} \dim(E_{\lambda}(f)) = n$$

Ainsi, on peut conclure :

f est diagonalisable

$$2-6) \quad LC = CLD_{n,n} \quad (\text{car } C \in \mathbb{R})$$

$$= \sum_{i=1}^n C C D_{n,i} C C D_{i,n}$$

$$= \sum_{i=1}^n C C D_{i,n} C C D_{n,i}$$

$$= \sum_{i=1}^n C C D_{i,i} \quad \text{et par définition de Tr :}$$

$$= \text{Tr}(CL) \quad \text{et donc d'après 92-2) :}$$

$$\underline{LC = \text{Tr}(M)}$$

$$2-c) \quad M^2 = (CL) \cdot (CL)$$

$$= C(CL C) L \quad \text{et d'après 92-6)}$$

$$= \text{Tr}(M) (CL) \quad \text{d'où :}$$

$$M_2 = \text{TRIM} M.$$

Partie II

$$(2) AX = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{6}z = 0 \\ 6x + cy + z = 0 \end{cases} \quad \text{et comme } 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + \frac{2}{6}z = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{6}z = 0 \\ 6x + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + \frac{2}{6}z = 0 \\ \frac{2c-6}{6}z = 0 \\ 6x + cy + \frac{6c}{6}z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 26x + 6y + 2z = 0 \\ \frac{2c-6}{6}z = 0 \\ 26x + 2cy + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 26x + 6y + 2z = 0 \\ \frac{2c-6}{6}z = 0 \\ (2c-6)y + \frac{6c}{6}z = 0 \end{cases}$$

Supposons que $2c \neq 6$

Alors d'après la dernière équivalence du système précédent :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Donc, A est inversible, ce qui est absurde

Ainsi, $2c = 6$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Math appro EDHEC		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

6) Notons A_1, A_2 et A_3 les 3 colonnes de A

$\triangleright 2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2c \end{pmatrix}$ et comme d'après 96-2), $2c = 6$:

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= A_1$

$\triangleright 6 A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/c \\ 6 \end{pmatrix}$ et comme $6/c = 2c/c = 2$:

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= A_1$

Ainsi, $\text{rg}(A) = 1$

7-2) $\triangleright$ Comme $\text{rg}(g) = 1$, d'après la formule du rang :

$\dim(\text{Ker}(g)) = 2$

$2, 1$

Donc, $0 \in \text{Sp}(g)$

$\triangleright A \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$ (car $2c = 6$)

Donc, $A \cdot A_1 = 3A_1$ et $A_1 \neq 0_{3,1}$

Ainsi, $3 \in \text{sp}(y)$

D'où, $3 \in \dim(E_0(A)) + \dim(E_3(A)) \leq n$

Donc, $\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} E_\lambda(A) = 3$

Donc, A est diagonalisable et $\text{sp}(A) = \{0, 3\}$

D'où, y est diagonalisable et $\text{sp}(y) = \{0, 3\}$

6) cf page 16

Exercice 2:

Partie 1:

1) $\triangleright \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

$\triangleright f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1

$\triangleright$ on étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$

Soit $A > 1$.

$$\int_1^A f(x) dx = c \int_1^A \frac{1}{x^{c+1}} dx$$

$$= c \int_1^A x^{-c-1} dx \quad \text{et comme } c \neq 0 :$$

$$= c \left[\frac{x^{-c}}{-c} \right]_1^A$$

$$\int_1^A f(x) dx = c \left(-\frac{1}{cA^c} + \frac{1}{c} \right)$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{cA^c} = 0$, alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx = c \times \frac{1}{c} = 1$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Donc, f peut être considérée comme une densité

2) $\triangleright x^2 f(x) \sim \frac{c}{x^{c-1}}$ et comme $c > 2$, alors $c-1 > 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}} dx$ converge (intégrale de Riemann) et

$\forall x \geq 1, \frac{c}{x^{c-1}} \geq 0$ donc par comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$

converge (absolument) donc X admet un moment d'ordre

2 d'après le théorème de transfert:

Ainsi, X possède une espérance et une variance

$\triangleright$ Soit $A > 1$

$$\int_1^A x f(x) dx = \int_1^A \frac{c}{x^c} dx$$

$$= c \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A$$

$$= c \left(-\frac{1}{cA^{c-1}} - \frac{1}{-c+1} \right)$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{cA^{c-1}} = 0$, alors on obtient:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x f(x) dx = \frac{c}{c-1} \text{ d'où:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{c}{c-1} \text{ donc:}$$

$$E(X) = \frac{c}{c-1}$$

▷ Soit $A > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^A x^2 f(x) dx &= c \int_1^A x^{1-c} dx \\ &= c \left[\frac{x^{2-c}}{2-c} \right]_1^A \\ &= c \left(\frac{1}{(2-c)A^{c-2}} - \frac{1}{2-c} \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-c)A^{c-2}} = 0$ alors :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^2 f(x) dx = \frac{c}{c-2} \text{ donc :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{c}{c-2} \text{ d'où :}$$

$$E(X^2) = \frac{c}{c-2}$$

Donc, d'après la formule de Koenig - Hüggen :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

$$= \frac{c(c-1)^2 - (c-2)c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c(c^2 - 2c + 1) - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$V(X) = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
3 - $X(0) = 1, +\infty$ donc : ▷ $\forall x < 1, F(x) = 0$ ▷ $\forall x \geq 1, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ $= \int_1^x f(t) dt$ $= c \int_1^x t^{-c-1} dt \quad \text{et d'après q1.}$ $= c \left(-\frac{1}{cx^c} + \frac{1}{c} \right)$ $= -\frac{1}{x^c} + 1$ <u>$\forall x \geq 1, F(x) = 1 - \frac{1}{x^c}$</u>			
4-2) $X(0) = 1, +\infty$ donc : $Y(0) = c, +\infty$ ▷ $\forall x < 0, G(x) = 0 = F(x)$ ▷ $\forall x \geq 0, G(x) = P(1/X \leq x)$ et comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $= P(X \leq e^x)$			

$$\forall x \geq 0, G(x) = F(e^x)$$

6) D'après l'expression de F trouvée en 93-, on obtient:

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, G(x) &= 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^c \\ &= 1 - e^{-cx} \end{aligned}$$

Donc, $\forall c > 0, E(c)$ (ce qui est licite car $c > 0$)

c) def simulX(c):

```

y = rd.exponential(1/c)
x = np.exp(y)
return x

```

Partie 2:

5- def simulZ(c):

```

a = simulX(c)
b = simulX(c)
z = a * b
return z

```

6- $\triangleright$ Comme $E(X_1)$ et $E(X_2)$ existent et que X_1 et X_2 sont indépendantes, $E(Z)$ existe et d'après 92-:

$$E(Z) = E(X_1) E(X_2)$$

$$= \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

▷ comme x_1 et x_2 sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, x_1^2 et x_2^2 sont indépendantes et comme $\in(x_1^2)$ et $\in(x_2^2)$ existent, alors $\in(z^2)$ existe :

$$\in(z^2) = \in((x_1 x_2)(x_1 x_2))$$

$$= \in(x_1^2 x_2^2)$$

$$= \in(x_1^2) \in(x_2^2) \text{ et d'après q2-:}$$

$$\underline{\in(z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}}$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Hüggers:

$$V(z) = \in(z^2) - \in(z)^2$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2((c^2-2c+1)(c^2-2c+1) - c^2(c^2-4c+4))}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^4 - 2c^3 + c^2 - 2c^3 + 4c^2 - 2c + c^2 - 2c + 1 - c^4 + 4c^3 - 4c^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$\underline{V(z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}}$$

7-2) $Y_1 \subset \mathcal{E}(c)$ (94-61) donc:

$$cY_1 \subset \mathcal{E}(1)$$

De même, $cY_2 \subset \mathcal{E}(1)$

6) comme $\delta(1) = \mathcal{E}(1)$ et que d'après le lemme des conditions, cY_1 et cY_2 sont indépendantes, par stabilité de la loi gamma:

$$\underline{cY_1 + cY_2 \subset \delta(2)}$$

8-2) $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x)$ et comme $c > 0$:

$$= \mathbb{P}(cY_1 + cY_2 \leq cx)$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = K(cx)}$$

▷ comme $cY_1 + cY_2 \subset \delta(2)$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, K'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^{2-1} e^{-x}}{\Gamma(2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit:}$$

$$K'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{car } \Gamma(2) = 1! = 1$$

Donc, une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = K'(cx)$$

$$= \begin{cases} c \cdot c x e^{-cx} & \text{si } cx \geq 0 \\ 0 & \text{si } cx < 0 \end{cases} \quad \text{et comme } c > 0:$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths 2020 EDEEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1, F_2(x) &= \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) \text{ et comme } h \text{ est} \\ &\text{strictement croissante} \\ &\text{sur } \mathbb{R}_+^* : \\ &= \mathbb{P}(h(X_1) + h(X_2) \leq h(x)) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq h(x)) \end{aligned}$$

$$\forall x \geq 1, F_2(x) = H(h(x))$$

$$\begin{aligned} \forall x < 1, F_2(x) &= \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) \text{ et comme } (X_1 X_2)(\Omega) \\ &= [1, +\infty[: \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après 98-22, une densité f_2 de Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} h(h(x)) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} \text{ soit :}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} c^2 h(x) e^{-ch(x)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} \text{ soit :}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} c^2 h(x) x^{-c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} \text{ donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \begin{cases} c^2 h(x) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

9-2) Soit $\alpha > 1$

~~$x \mapsto \frac{\ln x}{x^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{C}, +\infty$~~

~~$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)$$~~

~~En effet, par croissances comparées:~~

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha+1} \ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$~~

Soit $A > 1$

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$$

$$f'(x) = x^{-\alpha} \quad f(x) = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

$$g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}, A$, par croissance de l'intégration:

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha} dx &= \left[\ln x \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha+1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \int_1^A x^{-\alpha} dx \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^A \right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

et comme $\alpha - 1 > 0$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} = 0$

et par croissances comparées,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1/A}{A^{\alpha-1}} = 0$$

Donc, en faisant tendre A vers $+\infty$, on peut conclure que:

$\forall \alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$

6) on a déjà montré en 96- que $E(2)$ et $V(2)$ existent

$\triangleright E(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_2(x) dx$ et donc d'après 92-6):

$= \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln x}{x^c} dx$ et d'après 99-2), pour $\alpha = c > 2$:

$= c^2 \frac{1}{(c-2)^2}$ soit:

$E(2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$

Δ , $E(2^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_2(x) dx$ (d'après le théorème de transfert).

$= \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln x}{x^{c-1}} dx$ et d'après 99-2), pour $\alpha = c-1 > 1$:

$E(2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Hüggel et le calcul effectué en 96-, on obtient:

$$V(2) = \frac{c^2(2c^2 - 9c + 7)}{(c-2)^2(c-1)^2}$$

Retour exercice 1:

7-6) Posons, $\forall n \geq 1$, $A(n)$: " $A^n \in \text{Vect}(A)$ "

▷ $A \in \text{Vect}(A)$ donc $A(1)$ est vraie

▷ Soit $n \geq 1$. Supposons que $A(n)$ est vraie

$A^{n+1} = A \cdot A^n$ et comme $A^n \in \text{Vect}(A)$ d'après $A(n)$

$A^{n+1} \in \text{Vect}(A^2)$

$$\text{or, } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/6 \\ 2 & 1 & 1/c \\ 6 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/6 \\ 2 & 1 & 1/c \\ 6 & c & 1 \end{pmatrix}$$

et donc en utilisant la relation établie en 9-6-2), $2c=6$, on obtient:

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 3/6 \\ 32 & 3 & 3/c \\ 36 & 3c & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 3 \cdot A$$

Donc, $A^{n+1} \in \text{Vect}(3A)$
 $\subset \text{Vect}(A)$

Ainsi, $A(n+1)$ est vraie

▷ $\forall n \geq 1$, $A(n)$ est vraie

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths 2^{ème} année EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3 :

$$1-2) X(\omega) = 1N$$

$$\text{Soit } h \in 1N$$

$$(P(X=h)) = (P(F_1 \cap \dots \cap F_h \cap P_{h+1}))$$

et comme $F_1, \dots, F_h, P_{h+1}$ sont indépendants

$$= \left(\prod_{i=1}^h (P(F_i)) \right) (P(P_{h+1}))$$

$$= (1-p)^h p$$

$$\underline{(P(X=h)) = p q^h}$$

$$6) \text{ Soit } N \geq 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^N h (P(X=h)) &= \sum_{h=1}^N h p q^h \\ &= p q \sum_{h=1}^N h q^{h-1} \end{aligned}$$

Comme $|q| < 1$, la série "dérivée" première $\sum_{h \geq 1} h q^{h-1}$

converge, donc la série $\sum_{h \geq 0} h (P(X=h))$ converge (absolument)

Ainsi, $E(X)$ existe et $E(X) = \frac{pq}{(1-q)^2}$

$$E(X) = \frac{pq}{p^2}$$

$$\underline{E(X) = \frac{q}{p}}$$

$$\begin{aligned} \Delta \sum_{h=0}^{\infty} h^2 P(X=h) &= p \sum_{h=1}^{\infty} h^2 q^h \\ &= p \sum_{h=1}^{\infty} (h(h-1) + h) q^h \\ &= pq^2 \sum_{h=2}^{\infty} h(h-1) q^{h-2} + pq \sum_{h=1}^{\infty} h q^{h-1} \end{aligned}$$

comme $|q| < 1$, la série "dérivée" première $\sum_{h \geq 1} h q^{h-1}$

et la série "dérivée" seconde $\sum_{h \geq 2} h(h-1) q^{h-2}$ convergent

donc la série $\sum_{h \geq 0} h^2 P(X=h)$ converge (absolument)

Ainsi, d'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe

$$\text{et } E(X^2) = pq^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} + pq \cdot \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{pq^2}{p^3} + \frac{q}{p}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{qp}{p^2}$$

$$= \frac{q(q+p)}{p^2} \quad \text{et comme } q+p=1$$

$$\underline{E(X^2) = \frac{q}{p^2}}$$

Ainsi, d'après la formule de Koentig-Hüsgers:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{q}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q(1-q)}{p^2}$$

$$= \frac{qp}{p^2}$$

$$\underline{V(X) = \frac{q}{p}}$$

$$2-2) \quad q(\mathcal{U}) = \mathbb{N}$$

$$\forall h \in \mathbb{N}, \quad C_0 = h\omega = C_{3q} = 3h\omega \quad \text{et comme } \mathcal{U}(\mathcal{U}) = \{0, 1, 2, 3\}:$$

$$= \bigcup_{i=0}^3 C_i \subset X = 3h + i\omega$$

6) D'après q2-2), $\forall h \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(q=h) &= P\left(\bigcup_{i=0}^3 C_i \subset X = 3h + i\omega\right) \quad \text{et par incompatibilité} \\ &= \sum_{i=0}^3 P(X = 3h + i\omega) \quad \text{des événements entre} \\ &\quad \text{eux:} \end{aligned}$$

et d'après q1-2):

$$= \sum_{i=0}^3 p q^{3h+i}$$

$$\begin{aligned} &= p q^{3h} + p q^{3h+1} + p q^{3h+2} \\ &= q^{3h} (p + p q + p q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P/Q=h) &= q^{3h} (1-q + (1-q)q + (1-q)q^2) \\
 &= q^{3h} (1-q + q - q^2 + q^2 - q^3) \\
 &= q^{3h} (1-q^3) \\
 &= (1-q^3)(q^3)^h
 \end{aligned}$$

$$(P/Q=h) = (1-q^3)(1-(1-q^3))^h$$

Donc, on peut conclure d'après q1, pour $p = 1-q^3$:

q suit la loi $QN(1-q^3)$

~~3) $(P/R=0) = (P/X=3q)$~~

~~4) Soit $h \in \mathbb{N}$. D'après q3- et q2-6) :~~

~~$$\begin{aligned}
 (P/R=0)(P/Q=h) &= \frac{1}{1+q+q^2} (1-q^3)(1-(1-q^3))^h \\
 &= \frac{(1-q^3)q^{3h}}{1+q+q^2}
 \end{aligned}$$~~

~~$\in \mathbb{L}, (P \subset R=0) \cap (Q=h) =$~~

5-2) $X(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

donc :

$$\forall h \in \mathbb{N}, (P/X=h) = p(1-p)^h$$

$$(X+1)(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned}
 \forall h \in \mathbb{N}^*, (P/X+1=h) &= (P/X=h-1) \\
 &= p(1-p)^{h-1}
 \end{aligned}$$

Donc, $X+1 \subset G(p)$

Ainsi la fonction suivante est une simulation de

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

la variable $(X+1)-1 = X$ et donc renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice

6) def div(p):
 $x = \text{simul}(X|p)$
 $q = \text{simul}(X|1-(1-p)**3)$
 $r = x - 3*q$
 return (x, q, r)

Problème

1- soit $h \in \mathbb{Z}$

$$h(h+1) = \cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2h\pi}{n} + 2\pi\right) \quad \text{et comme } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique :}$$
$$= \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right)$$
$$h(h+1) = h(h)$$

Donc, $h \in F_n$

2- $\triangleright$ soit θ l'application nulle de E

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \theta(h+1) = 0 = \theta(h)$$

Donc, $0 \in F_n$

▷ Soit $(\lambda, h_1, h_2) \in \mathbb{R} \times F_n \times F_n$

$$\forall h \in \mathbb{Z}, (\lambda h_1 + h_2)(h+1) = \lambda h_1(h+1) + h_2(h+1)$$

et comme $(h_1, h_2) \in F_n^2$

$$= \lambda h_1(h) + h_2(h)$$

$$= (\lambda h_1 + h_2)(h)$$

Donc, $\lambda h_1 + h_2 \in F_n$

Ainsi, F_n est un sous-espace vectoriel de E

3- Soit $f \in F_n$

$$\begin{aligned} f(h) &= f(h+1) \text{ et comme } q \in \mathbb{Z} \text{ et que } f \text{ est } n\text{-périodique :} \\ &= f(h+1) \end{aligned}$$

Posons, $\forall m \in \mathbb{N}$, $A(m)$: " $f(h+m) = f(h)$ "

▷ $f(h) = f(h+0)$ donc $A(0)$ est vraie

▷ Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $A(m)$ est vraie

$$\begin{aligned} f(h+(m+1)) &= f(h+1+m) \text{ et d'après } A(m) : \\ &= f(h+1) \text{ et comme } f \text{ est } n\text{-périodique :} \\ &= f(h) \end{aligned}$$

Donc, $A(m+1)$ est vraie

$\Delta \forall m \in \mathbb{N}, A(m)$ est vraie

on montre également que $\forall m \in \mathbb{Z}, f(h+m\eta) = f(h)$

Donc, comme $q \in \mathbb{Z}$, $f(h) = f(r+nq)$
 $= f(r)$

4-2) soit $f \in F_n$. En utilisant la décomposition donnée par 93-

$$\text{Soit } h \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(h) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(nq+r)$$

et comme $\forall i \in \{0, n-1\}, e_i \in F_1$,
d'après 93-

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(r)$$

et comme $r \in F_n$, par définition
des e_i

$$= f(r) e_r(r)$$

$$= f(r)$$

et donc d'après 93- :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(h) = f(h)$$

6) comme $\forall i \in F_n, e_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\forall f \in F_n, f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

on a d'après 94-2) :

$$\forall f \in F_n, \quad f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i$$

Donc B_n est génératrice de F_n

▷ Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

Supposons que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$

En évaluant cette égalité pour $h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$\lambda_h e_h(h) = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\lambda_h = 0 \quad \text{et ceci } \forall h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Donc, B_n est libre

Ainsi, on peut conclure:

La famille B_n est une base de F_n

$$c) \forall f \in F_n, f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i$$

Donc, $(f(0), \dots, f(n-1))$ sont les coordonnées d'un

élément quelconque f de F_n dans la base B_n

$$5-2) \text{ Soit } (\lambda, f_0, f_1, g_0) \in \mathbb{R} \times F_n^3$$

$$\begin{aligned} \triangleright \langle f, g \rangle &= \sum_{h=0}^{n-1} f(h) g(h) \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} g(h) f(h) \\ &= \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} \Delta \langle \lambda f_0 + f_1, g_0 \rangle &= \sum_{h=0}^{n-1} (\lambda f_0 + f_1)(h) g_0(h) \\ &= \lambda \sum_{h=0}^{n-1} f_0(h) g_0(h) + \sum_{h=0}^{n-1} f_1(h) g_0(h) \\ &= \lambda \langle f_0, g_0 \rangle + \langle f_1, g_0 \rangle \end{aligned}$$

Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

$$\begin{aligned} \Delta \langle f_0, f_0 \rangle &= \sum_{h=0}^{n-1} (f_0(h))^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Δ Supposons que $\langle f_0, f_0 \rangle = 0$

Comme $\forall h \in \{0, n-1\}, (f_0(h))^2 \geq 0$

$$\forall h \in \{0, n-1\}, f_0(h) = 0$$

Or, $\{h + nq \mid h \in \{0, n-1\} \text{ et } q \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

Dac, comme f_0 est n -périodique,

$$\forall h \in \mathbb{Z}, f_0(h) = 0$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_n

6) Soit $(i, j) \in \{0, 1, \dots, n-1\}^2$ $i \neq j$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{h=0}^{n-1} e_i(h) e_j(h)$$

$$= e_j(i) \quad \text{et comme } i \neq j$$

$$= 0$$

$$\langle e_i, e_i \rangle = \sum_{h=0}^{n-1} (e_i(h))^2$$

$$= (e_i(i))^2$$

$$= 1$$

Donc, B_n est orthonormale pour ce produit scalaire

c) ~~D'après les formules trigonométriques rappelés :~~

~~$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos(a+hb) = \sum_{h=0}^{n-1} \cos$$~~

D'après le résultat admis, comme $\sin(\frac{b}{2}) \neq 0$ (car $\frac{b}{2} \in]0, \pi[$)

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos(a+hb) = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \sum_{h=0}^{n-1} 2 \sin(\frac{b}{2}) \cos(a+hb)$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \sum_{h=0}^{n-1} (\sin(a + \frac{(2h+1)b}{2}) - \sin(a + \frac{(2h-1)b}{2}))$$

et par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k\theta) = \frac{\sin\left(2 + \frac{(2n-1)\theta}{2}\right) - \sin\left(2 - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

d) En appliquant l'égalité précédente pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{4\pi}{n}$, on obtient

~~$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)4\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)}$$~~

e) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2$ et d'après les formules trigonométriques rappelés:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + \frac{n}{2}$$

et comme $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$ (q.s.d.)

$$\|h\|^2 = \frac{n}{2}$$

donc :

$$\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

6-2) Soit $f \in F_n$

$$\forall h \in \mathbb{Z}, D_f(h+1) = f(h+1+n) - f(h+n)$$

et comme $f \in F_n$
 $= f(h+1) - f(h)$

$$\forall h \in \mathbb{Z}, Df(h+1) = Df(h)$$

$$\text{Dnc, } \forall f \in F_n, Df \in F_n$$

$$b) \text{ Soit } (\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n \times F_n \quad \forall h \in \mathbb{Z},$$

$$D(\lambda f + g)^{(h)} = (\lambda f + g)(h+1) - (\lambda f + g)(h)$$

et comme F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(\mathbb{Z})$

$$= \lambda (f(h+1) - f(h)) + g(h+1) - g(h)$$

$$= \lambda D(f)(h) + D(g)(h)$$

Dnc, D est linéaire

D de plus, d'après 9(2), $\forall f \in F_n, Df \in F_n$

Dnc, on peut conclure:

$$\underline{D \in \mathcal{L}(F_n)}$$

$$c) \text{ Soit } h \in \mathbb{Z},$$

$$Dh(h) = h(h+1) - h(h)$$

$$= \cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right)$$

$\in \mathbb{C}$,

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2(h+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right)\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 974448

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths apéro EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Dac,~~

$$\text{---} -L \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

7-27

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$8-2) \quad \forall h \in \mathbb{Z}, \quad \Delta(\varepsilon_0)(h) = \varepsilon_0(h+1) - 2\varepsilon_0(h) + \varepsilon_0(h-1)$$

$$= 2 - 2$$

$$\Delta(\varepsilon_0)(h) = 0$$

Donc, $\varepsilon_0 \in \text{Ker}(\Delta)$

$$6) \quad \triangleright \text{Vect}(\varepsilon_0) \subset \text{Ker}(\Delta)$$

$$\triangleright \text{Soit } f \in \text{Ker}(\Delta)$$

$$\text{Alors, } \forall h \in \mathbb{Z}, \quad f(h+1) - f(h) = f(h) - f(h-1)$$

Donc,

