



T2-00055
698025
Maths 2S

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Questions préliminaires :

1. D'après la définition de la partie entière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(x) \leq x < L(x) + 1$$

et donc on a aussi : $x - 1 < L(x) \leq x$

$$\text{donc : } \frac{x-1}{n} < \frac{L(x)}{n} \leq \frac{x}{n}$$

$$\frac{x-1}{n} < \frac{L(x)}{n} \leq x$$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{n} = 0$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{n}$$

$$= x$$

par théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(x)}{n} = x$$

$$2. \quad L\left(\frac{m}{2}\right) \leq \frac{m}{2} < L\left(\frac{m}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow -L\left(\frac{m}{2}\right) \geq -\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{2} + 1 \geq -L\left(\frac{m}{2}\right) \geq -\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{2} + m + 1 \geq m - L\left(\frac{m}{2}\right) \geq m - \frac{m}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \frac{n}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty \end{aligned}$$

Donc comme :

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq n - \frac{n}{2}$$

Par théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = +\infty$$

Première partie :

3 | a | Montrons que $\forall x \in (-1; 1)$,

$$\cos(\operatorname{arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2(\operatorname{arcsin}(x)) = 1 - x^2$$

Comme : $\cos(2\operatorname{arcsin}(x)) = 2\cos^2(\operatorname{arcsin}(x)) - 1$

$$\cos^2(\operatorname{arcsin}(x)) = \frac{\cos(2\operatorname{arcsin}(x)) + 1}{2}$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2(\operatorname{arcsin}(x)) + 1}{2}$$

$$= \frac{1 - 2(x^2 + 1)}{2}$$

$$\cos^2(\operatorname{arcsin}(x)) = x^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x^2 + 1)}{2}$$

$$= 1 - x^2$$

Par passage à la racine (et comme le cosinus est

positive sur cet intervalle]. $\forall x \in]-1, 1[$:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

b) $\arcsin$ est la bijection réciproque de $\sin$.

Comme $\sin$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, à valeurs dans $[-1, 1]$.
d'après le théorème de la bijection monotone, $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$.

$\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$

* $\sin$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $]-1, 1[$, sa dérivée est: $\cos$, qui ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

de plus, $\sin$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'après le théorème de la bijection réciproque, $\arcsin$, la réciproque de $\sin$ est dérivable sur $]-1, 1[$.

Sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin' \circ \sin^{-1}(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.a) \end{aligned}$$

4) a) $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc continue et $\arcsin$ est

dérivable sur $]0, 1[$, à valeurs dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.
 $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue et dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Par composition : $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ est continue et dérivable sur $]0, 1[$.

$$\text{En } 0: \lim_{x \rightarrow 0} G(x)$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} G(x)$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$= G(0)$$

$$= 0$$

Donc G est continue en 0

$$\text{En } 1: \lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = G(1) = 2 \arcsin(1)$$

Donc G est continue en 1

G est continue sur $[0, 1]$

La dérivée, par composition est:

$$\forall x \in]0, 1[: G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arcsin'(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\text{Donc } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\forall x \in]0, 1[, x > 0 \text{ et } 1-x > 0$$

$$\text{Donc } x(1-x) > 0$$

on a :

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} > 0$$

et g est strictement positive

$$\forall x \in]0, 1[, g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) = \frac{-(1-2x)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\frac{-1+2x}{2\sqrt{x}} \right) \times \frac{1}{x(1-x)}$$

$$= \frac{-(1-x)}{2\sqrt{x}(x(1-x)+1)}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}x} < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur]0; 1[

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$-\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) =$$

$$g'(x) = \frac{-1+2x}{2\sqrt{x}(x(1-x)+1)}$$

comme : $\frac{-1+2x}{2\sqrt{x}} \geq 0$ sur]0; 1[,

le signe de g' dépend de : $-1+2x$

$$-1+2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 1$$

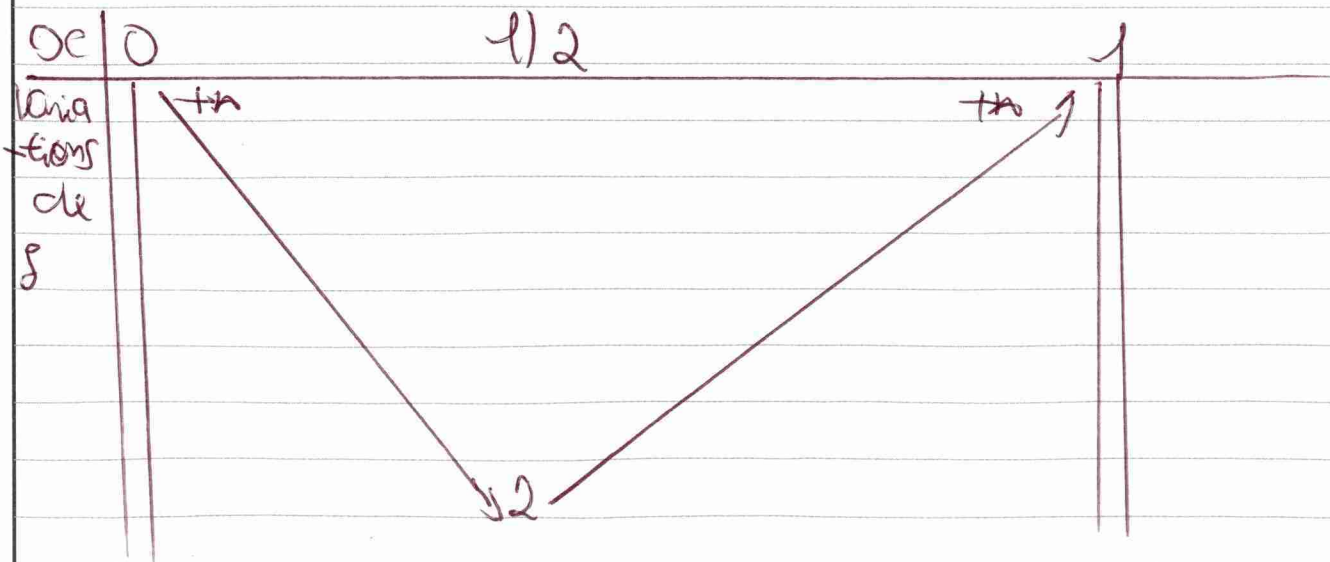
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

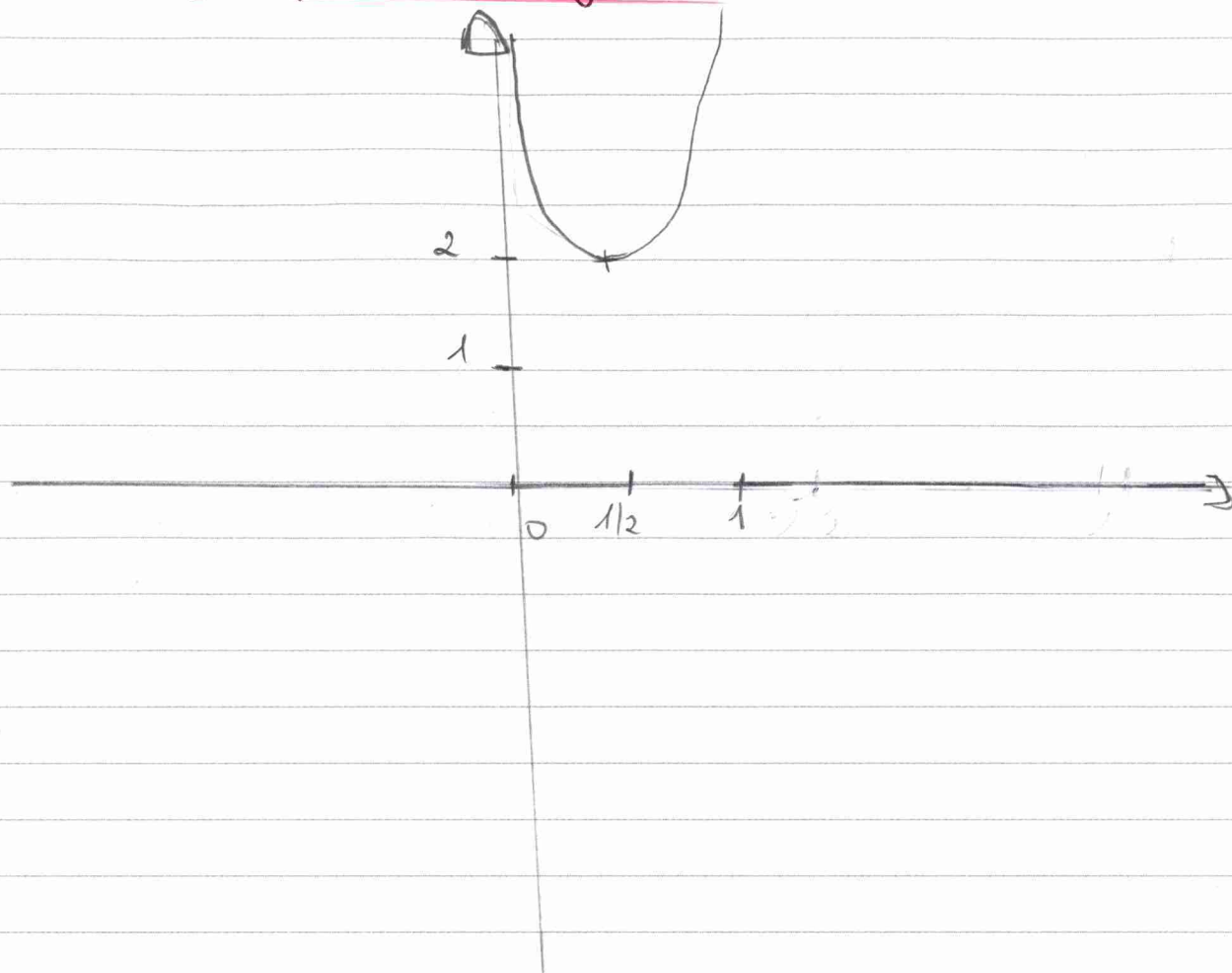
$$\begin{aligned} - g(1/2) &= \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc le tableau de variation de g est :



Le graphe de g est:



S. a) $\forall t \in]0, 1[, g(t) > 0$ (d'après la 4. a) et on a donc :

$\forall t \in]0, 1[, f(t) > 0$
 et on a $f(0) = 0 \geq 0$

donc : $f \geq 0$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privée d'un nombre fini de points : 0 et 1 car g est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privée d'un nombre fini de points : 0 et 1.

$$\begin{aligned} - \int_A^{+A} f(t) dt &= \int_0^1 \frac{1}{\pi} g(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \end{aligned}$$

~~Soit $A \geq 0$ et $B \leq 1$: $\int_A^B f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_A^B \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$~~

Soit $A \geq 0$ et $B \leq 1$: $\int_A^B f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_A^B \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$

$$= \frac{1}{\pi} \left[G(1) - \int_B^A G(t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} G(A) - \frac{1}{\pi} G(B)$$

$$\text{Or } \lim_{A \rightarrow 1^-} \frac{1}{\pi} G(A) = \frac{1}{\pi} G(1) \quad (G \text{ est continue en } 1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 2 \arcsin(\sqrt{1})$$

$$= \frac{1}{\pi} 2 \arcsin(1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \lim_{B \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} G(B) = \frac{1}{\pi} G(0) \quad (G \text{ est continue en } 0)$$

$$= 0$$

Donc: $\int_{-1}^{+1} f(t) dt$ converge et vaut: $1 - 0 = 1$

f est une densité de probabilité

b) X admet une espérance si et seulement si:
 $\int_{-1}^{+1} t f(t) dt$ converge absolument donc si et seulement si:

$$\int_0^1 \frac{t}{\pi} g(t) dt \text{ converge (absolument)}$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

Changement de variable affine: on pose $u = 1 - x$

$$\Leftrightarrow u - 1 = -x \Leftrightarrow -u + 1 = x$$

$$du = -dx \Leftrightarrow -du = dx \quad (\text{on remplace } x \text{ par } t)$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \text{ est de même nature}$$

et éventuellement de même valeur.

Code épreuve : 293

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^1 \frac{-u+1}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{(1-u)(u)}} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-u) \times \frac{1}{\sqrt{(1-u)(u)}} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u)(u)}} du - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{(1-u)(u)}} du \\
 & \quad (\text{par linéarité de l'intégrale si elle converge})
 \end{aligned}$$

comme : $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u)(u)}} du$ converge et vaut 1
 et que : $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{(1-u)(u)}} du$ vaut eck si elle
 converge, on a (si les intégrales convergent) :

$$\begin{aligned}
 E(x) &= 1 - E(x) \\
 \Rightarrow 2E(x) &= 1 \\
 \Rightarrow E(x) &= 1/2
 \end{aligned}$$

Montrons qu'elles convergent. Montrons pour cela que :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-u)}{\sqrt{(1-u)(u)}} du \text{ converge}$$

On sait déjà que : $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u)(u)}} du$ converge
 en 0 :

$$\frac{u}{\sqrt{(1-u)(u)}} = \frac{u}{\sqrt{u} \sqrt{1-u}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}$$

Les termes sont positifs et comme: $\int_0^1 \sqrt{u} \, du$
converge, $\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u} \sqrt{u}} \, du$ converge

En 1.

$$\frac{u}{\sqrt{1-u} \sqrt{u}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

les termes sont positifs

et comme: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}} \, du$

est une intégrale de Riemann convergente
 (avec $\alpha = 1/2 < 1$)

Par comparaison d'équivalents,

$$\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u} \sqrt{u}} \, du \text{ converge}$$

Et donc: $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{|1-u|}{\sqrt{1-u} \sqrt{u}} \, du$ converge (et
 vaut: $1/2$)

Donc E_{CCL} existe et vaut $1/2$.

$$\begin{aligned} \delta(0) \quad V(U) &= [0, 1] =]0; 1[\\ V(U) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad | \quad (U) =]0; 1[\end{aligned}$$

$$\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times 0 \right) = 0 \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

$$\forall x \leq 0, P(V \leq x) = 0$$

$$\forall x \geq 1, P(V \leq x) = 1$$

$$\forall x \in]0; 1[,$$

$$P(V \leq x) = P\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq x\right)$$

$$= P\left(\arcsin\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U\right)\right) \leq \arcsin(x)\right)$$

$$= \cancel{P\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \dots\right)}$$

$$= P\left(\left(\frac{\pi}{2}U\right)^2 \leq \arcsin(x)\right)$$

$$= P\left(\frac{\pi^2}{4}U^2 \leq \arcsin(x)\right)$$

$$= P\left(U^2 \leq \arcsin(x) \times \frac{4}{\pi^2}\right)$$

$$= P\left(|U| \leq \frac{2}{\pi} \times \arcsin(\sqrt{x})\right)$$

$$= P\left(U \leq \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) \mid \underbrace{0 \leq U}_{\text{presque sûrement}}\right)$$

on, $x \in]0; 1[$ donc:

$$\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) \in]0; 1[$$

$$\text{et donc: } P\left(U \leq \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$$

on résume:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) & \text{si } x \in]0; 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

avec F la fonction de répartition de V

On a F continue sur $]0; 1[$, en 0 et en 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ prise de 0 et de 1.

Donc V est à densité et une densité s'obtient par dérivation et prolongement arbitraire:

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît la densité de X donc
 V et X suivent la même loi même densité /
 $\checkmark$ suit la loi arcsin

6 | 5 |

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def arcsinUS (l):
    V = rd.random (l)
V = mp.gam**
    V = mp.gam ((mp.pi / 2 * V) ** 2)
    return V
```

7 | Soit $x \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$,
 $x \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$,
 $G(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

comme: $x \leq \frac{k+1}{m} \leq k$

et: $\frac{k}{m} \leq x \leq \frac{k+1}{m}$
 ~~$\Rightarrow 1 - x \leq 1 - \frac{k}{m} = \frac{m-k}{m}$~~
 ~~$\Rightarrow 1 - x \leq \frac{m-k}{m}$~~
 et comme:

$\Rightarrow -\frac{k}{m} \leq -x \leq -\frac{k-1}{m}$

$\Rightarrow 1 - \frac{k}{m} \leq 1 - x$

$\Rightarrow \frac{m-k}{m} \leq 1 - x$

$\Rightarrow m-k \leq 1-x$

Donc: $g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{(m-k)}}$

Par l'inégalité des accroissements finis,

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 32	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques Approfondies		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

que l'on peut appliquer car G est dérivable sur $\left] \frac{k}{m}; \frac{k+1}{m} \right[$ et continue sur $\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right]$

on a : $G\left(\frac{k+1}{m}\right) - G\left(\frac{k}{m}\right) \leq \frac{\frac{k+1}{m} - \frac{k}{m}}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}}}$

$\Rightarrow G\left(\frac{k+1}{m}\right) - G\left(\frac{k}{m}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}}}$

on procède de même sur : $\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right]$ en trouvant que : $\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}}}$ est un minorant

de la dérivée de G , avec l'inégalité des accroissements finis, on trouve bien :

$\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}}} \leq G\left(\frac{k}{m}\right) - G\left(\frac{k-1}{m}\right)$

- si on suppose : $\frac{m+1}{2} \leq k \leq m-1$,

c'est comme si on posait de $k \leq \frac{m}{2} - 1$ et que on posait $\bar{a} = m - k$

Il faut donc appliquer les deux inégalités précédentes à $m - k$ au lieu de k et procéder de la même manière,

13/32

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a :

8. On pose $a_m = \sqrt{m}$

on a donc: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{m} = +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m}}{m} = 0$$

On reprend les inégalités de la 7
On somme pour k allant de $\sqrt{m}$ à $[mx]$

$$\sum_{k=\sqrt{m}}^{[mx]} G\left(\frac{k+1}{m}\right) - G\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$= \sum_{k=\sqrt{m}}^{[mx]} G\left(\frac{k+1}{m}\right) - \sum_{k=\sqrt{m}}^{[mx]} G\left(\frac{k}{m}\right) \quad (\text{par télescopage})$$

~~on som~~ on pose: $k+1=j$ (changement d'indice)
 et fait un télescopage

$$\sum_{k=\sqrt{m}+1}^{[mx]+1} G\left(\frac{j}{m}\right) - \sum_{k=\sqrt{m}}^{[mx]} G\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$= G\left(\frac{[mx]+1}{m}\right) - G\left(\frac{\sqrt{m}}{m}\right)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} G\left(\frac{[mx]+1}{m}\right) - G\left(\frac{\sqrt{m}}{m}\right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} G\left(x + \frac{1}{m}\right) - G(0) \quad \text{avec la continuité de } G \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{[mx]+1}{m} = x$$

$$= \underline{G(x)}$$

de l'autre côté:

$$\sum_{k=\sqrt{m}}^{L(m)} G\left(\frac{k}{m}\right) - \sum_{k=\sqrt{m}}^{L(m)} G\left(\frac{k-1}{m}\right)$$

$$= \sum_{k=\sqrt{m}}^{L(m)} G\left(\frac{k}{m}\right) - \sum_{k=\sqrt{m}-1}^{L(m)-1} G\left(\frac{i}{m}\right) \quad (\text{avec } i=k-1)$$

Par télescoping

$$= G\left(\frac{L(m)}{m}\right) - G\left(\frac{\sqrt{m}-1}{m}\right)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} G\left(\frac{L(m)}{m}\right) - G\left(\frac{\sqrt{m}-1}{m}\right) = \underline{G(\infty)}$$

Par théorème des généralisations

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_m}^{L(m)} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}} = G(\infty)$$

Partie 2: $\forall i \in \mathbb{N}^*, Y_i \in \{0, 1\}$

$$- \underline{P(Y_i = 0)} = P\left(\frac{1}{2}(X_i + 1) = 0\right)$$

$$= P(X_i = -1)$$

$$= 1 - 0$$

$$- \underline{P(Y_i = 1)} = P\left(\frac{1}{2}(X_i + 1) = 1\right)$$

$$= P(X_i + 1 = 2)$$

$$= P(X_i = 1)$$

$$= 0$$

$Y_i \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

~~Les variables sont indépendantes.~~

~~Par stabilité de la loi binomiale~~

~~de paramètres p et q ,~~

~~$S_n \in \mathcal{B}(n, q)$~~

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 32	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques Approfondies		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

9 | $S_m(N) = \sum_{i=1}^m x_i(N) = [0; m]$

$(S_{m+m})(N) = [0; 2m]$

$\frac{(S_{m+m})(N)}{2} = [0; m]$

Or, $\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m x_i + m \right)$

$= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} x_i + \frac{1}{2} \right)$

$= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (x_i + 1)$

$= \sum_{i=1}^m y_i$

Or, $y_i \in B(0)$

Par le lemme des coalitions,
les y_i sont indépendants

Par stabilité de la loi Binomiale :

$\sum_{i=1}^m y_i \in B(m, 0)$

Donc : $S_m \in B(m, 0)$

10 | Si on prend $S_1 = x_1$ et $S_2 = x_1 + x_2$

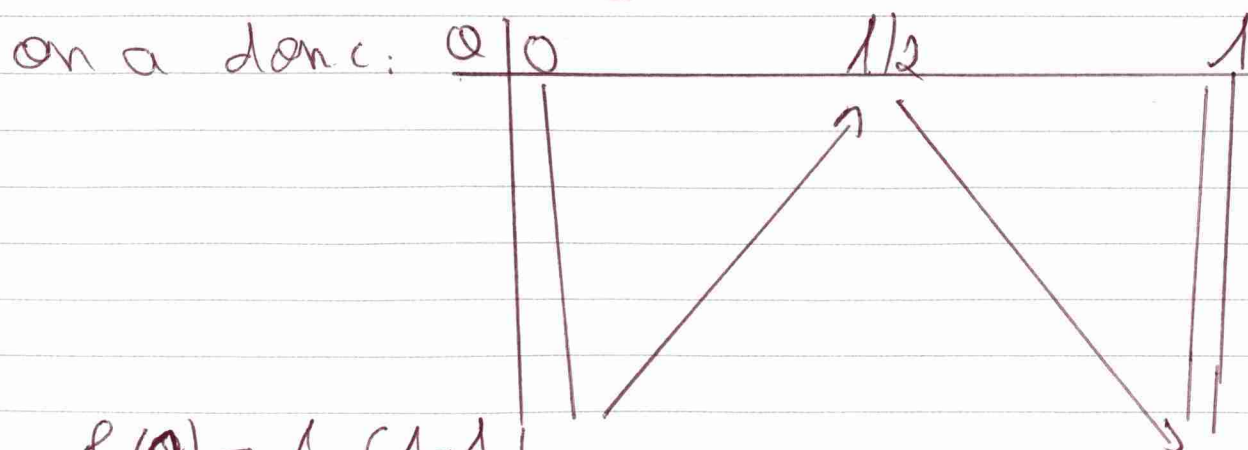
On a : $\{x_1 | x \in S_2\} = \{x_1 | 2\}$

$$\begin{aligned}
 E(|S_1 + X(S_2)|) &= E((X_1 + X_2)X_1) \\
 &= E(X_1^2 + X_2 X_1) \\
 &= E(X_1^2) + E(X_1)E(X_2) \\
 &\quad (X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}) \\
 &= E(X_1^2) + E(X_1)^2 \quad (X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont} \\
 &\quad \text{même loi}) \\
 &= V(X_1) + E(X_1)^2 + E(X_1)^2 \\
 &= V(X_1) + 2E(X_1)^2 \\
 &\neq E(X_1)^2 \text{ car } V(X_1) \neq 0
 \end{aligned}$$

Donc: $E(|S_1|) \neq E(|S_2|)$

(S_m) ne sont pas mutuellement indépendantes

11) on pose: $0 \leq \omega \leq 1 - \omega = f$
 f est dérivable sur $]0, 1[$.
 Pour $\omega \in]0, 1[$, $f'(\omega) = -2\omega + 1$
 $f'(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\omega \geq 0$
 $\Leftrightarrow 1 \geq 2\omega$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \omega$



$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{donc: } f(\omega) \leq \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

et donc: $\sqrt{0 < 1 - \alpha} > \frac{1}{2}$

- on a: $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} + \bar{S}_m \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} + \bar{S}_m \right)$
(Presque sûrement)

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} + \bar{S}_m \right) \text{ et } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} + \bar{S}_m \right)$$

sont des estimateurs de 0 car ce sont des fonctions de m variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, ~~indépendantes~~ de variables indépendantes et identiquement distribuées, ~~indépendantes~~ de $\mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{2} P \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} + \bar{S}_m \right) \leq 0 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} + \bar{S}_m \right) \right)$$

$$= P \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) - 0 \leq -\frac{\bar{S}_m}{2} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) - 0 \right)$$

$$= P \left(\left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) - 0 \leq -\bar{S}_m \leq \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) - 0 \right)$$

$$= P \left(0 - \left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) \leq \bar{S}_m \leq 0 - \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) \right)$$

$$= P \left(m\alpha - m \left(1 - \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) \leq \bar{S}_m \leq m\alpha - m \left(1 + \frac{t_L}{\sqrt{m}} \right) \right)$$

Montrons que cette probabilité est: supérieure ou égale à $1 - \alpha$.

Les X_i sont indépendantes, de même loi, espérance et variance non nulle

Après le théorème central limite:

$$\frac{\bar{S}_m - E(\bar{S}_m)}{\sqrt{V(\bar{S}_m)}} \xrightarrow{d} N(0; 1)$$

$$E(\bar{S}_m) = m E(X_i) \text{ par linéarité} \\ = m(20 - 1)$$

$$V(\bar{S}_m) = \frac{1}{m} V(X_i) = \frac{1 - (20 - 1)^2}{m}$$

On reprend l'expression de la probabilité avec S_m et on se ramène à une loi centrée réduite, ensuite on majore $\sqrt{\text{Var}(S)} \leq \frac{1}{2}$.

$$121a) P(S_{2k+1} = 0) = P\left(\sum_{i=1}^{2k+1} X_i = 0\right)$$

comme les X_i valent soit 1 ou -1.

~~$\& S_{2k+1}$~~ $\& S_m = 0$ (presque sûrement), on a forcément autant de X_i valant 1 que de X_i valant -1, ce qui est impossible car S_m est impaire.

$$\& m = 2k+1$$

Donc: $P(S_{2k+1} = 0) = 0$ (car $S_{2k+1} = 0$ est presque impossible)

$$P(S_{2k+1} = 0) = 0$$

121b) $\& S_{2k} = 0$ presque sûrement, c'est qu'il y a autant de X_i valant 1 que de X_i valant -1.

- Il y a k X_i valant 1 et k valant -1
- On choisit les X_i valant 1: $\binom{2k}{k}$ choix possibles

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

La probabilité que x_i vaille 1 est de α , donc on a, si $\{x_i = 1\}$ est réalisé :

$$\binom{2k}{k} \alpha^k = P\left(\sum_{i=1}^k x_i = k\right)$$

Les $2k - k = k$ autres x_i valant -1 sont donc les autres x_i restants des $2k$ x_i , il vaille -1 avec une probabilité : $1 - \alpha$, comme il y en a k on a :

$$P\left(\bigwedge_{i=k+1}^{2k} x_i = -1\right) = (1 - \alpha)^k$$

ou final :

$$P(S_{2k} = 0) = P\left(\bigwedge_{i=1}^k x_i = 1 \mid \bigwedge_{i=k+1}^{2k} x_i = -1\right) \text{ donc :}$$

$$P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^k$$

$$\# \quad P(L_m = m) = P(\max(S_{2k} = 0) = m)$$

$$= P\left(\bigwedge_{k=0}^m (S_{2k} = 0) \leq m\right)$$

$$= P\left(S_{2m} = 0 \mid \bigwedge_{k=0}^{2m-1} S_k \leq 0\right)$$

$$= P(S_0 = 0) \text{ (par double-inclusion)}$$

$$= \binom{2m}{m} \alpha^m (1 - \alpha)^m$$

14) a) Si $[L_m = k]$, on a:

$[S_{2k} = 0]$ qui est réalisée et comme c'est le plus grand des S_{2i} ($i \in [0; m]$) valant 0, tous les S_{2i} plus grands ne sont pas égaux à 0.

On a donc:

$$[S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2m} \neq 0] \text{ réalisée.}$$

— Réciproquement si

$$[S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2m} \neq 0],$$

S_{2k} est le plus grand S_{2i} au plus grand indice à valeurs 0, donc: $[L_m = k]$ est réalisée

Par double-inclusion on:

$$[L_m = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2m} \neq 0]$$

(14. b) admise

$$15. P(L_m = k) = P([S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2m} \neq 0])$$

$$= P([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2m} \neq 0] \mid [S_{2k} = 0])$$

$$= \frac{P([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2m} \neq 0])}{P([S_{2k} = 0])}$$

$$= p_{m-k} \times P([S_{2k} = 0])$$

$$\text{Or, } P([S_{2k} = 0]) = \binom{2k}{k} 0^k (1-0)^k \quad (12.5)$$

$$\text{On a donc: } P(L_m = k) = p_{m-k} \binom{2k}{k} 0^k (1-0)^k$$

16 | a) Tous les S_k ($k \in \{0; m\}$) prennent des valeurs entières
 $r \in \{0; m\}$,
 donc : $\{S_1(\omega), \dots, S_m(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers

$$16 | b) P(\mathcal{D}_m) = P\left(\bigcap_{k=1}^m [S_k \neq 0]\right) \\ = P\left(\bigcap_{k=1}^m [S_k > 0] \cup \bigcap_{k=1}^m [S_k < 0]\right)$$

Comme les $\{S_1(\omega), \dots, S_m(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers,
les événements sont incompatibles

$$\text{donc : } P(\mathcal{D}_m) = P\left(\bigcap_{k=1}^m [S_k > 0]\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^m [S_k < 0]\right) \\ = P(\mathcal{D}_m^+) + P(\mathcal{D}_m^-)$$

$$17 | \sum_{k=1}^m a_{m,r} = \sum_{k=1}^m P(A_{m,r}) \\ = \sum_{k=1}^m P\left(\bigcap_{k=1}^{2m-1} [S_k > 0] \cap [S_{2m} = 2r]\right)$$

Comme : $2r > 0$

~~$$\text{on a : } P\left(\bigcap_{k=1}^{2m-1} [S_k > 0] \cap [S_{2m} = 2r]\right) \\ = P\left(\bigcap_{k=1}^{2m} [S_k > 0]\right)$$~~

$$P\left(\bigcup_{k=1}^m \left(\bigcap_{k=1}^{2m-1} [S_k > 0] \cap [S_{2m} = 2r]\right)\right) \\ = P\left(\bigcap_{k=1}^{2m} [S_k > 0]\right) \\ = P(\mathcal{D}_m^+)$$

et de même qui a la 16/6/, comme les événements sont deux à deux incompatibles:

$$P\left(\bigcup_{r=1}^m \left(\bigcap_{k=1}^{m-1} [S_k \leq 0] \cap [S_m = 2r]\right)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^m P(A_{m,r})$$

$$= \sum_{r=1}^m a_{m,r}$$

$$\underline{P(\Delta_m^+) = \sum_{r=1}^m a_{m,r}}$$

$$\text{18) a) - si } n > m, P(A_{m,r}) = 0$$

$$\text{- si } r \leq 0, P(A_{m,r}) = 0$$

$$\text{si } q = r, P(A_{m-1,r} \cap A_{m,r})$$

a) admise

b) $[A_{m-1,q}] (m-1, q) \in \mathbb{N}^*$ forment un

système complet d'événements
et après la formule des probabilités totales:

$$\underline{P(A_{m,r}) = a_{m,r} = \sum_{q \geq 1} P(A_{m-1,q} \cap A_{m,r})}$$

$$\text{avec la question 18) a):}$$

$$= \frac{1}{4} a_{m-1,r-1} + \frac{1}{2} a_{m-1,r} + \frac{1}{4} a_{m-1,r+1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

19 / on pose : P_m

$$H_{a,m,r} = \frac{1}{4m} \left(\binom{2m-1}{m+r-1} - \binom{2m-1}{m+n} \right)$$

et Montrons que P_m est vraie pour tout $(m, r) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{2\})$ par récurrence m dans $\mathbb{N}^+$,
 par récurrence

- Pour $m=1$:

$$\frac{1}{4^1} \binom{2m-1}{m+r-1}$$

$$\frac{1}{4} \left(\binom{1}{r} - \binom{1}{1+r} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \binom{2}{1+r} \quad \text{par la formule de Pascal (inversée)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\binom{2}{r+1} - \binom{1}{r+1} - \binom{1}{1+r} \right) =$$

et $a_{1,r} = \frac{1}{4} a_{0,r-1} + \frac{1}{2} a_{0,r} + \frac{1}{4} a_{0,r+1}$

$$= \frac{1}{2} a_{0,r} \quad \text{d'après la 18/a}$$

19 On pose : $P_m = \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} = 1$, Montrons par récurrence que $4^m P_m$ est vraie pour tout m dans $\mathbb{N}$.

- Pour $m=0$, $P_0 = 1$ (par convention) et :
 $\frac{1}{4^0} \binom{0}{0} = 1 \times 1 = 1$

Donc P_0 est vraie

- Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose P_m vraie. Montrons que P_{m+1} est vraie

$$P_m = \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= P \left(\left(\bigcap_{i=1}^{2m} S_i \neq \emptyset \right) \cap \left(S_{2(m+1)} \neq \emptyset \right) \right) \\ &= P \left(\left(\bigcap_{i=1}^{2m} S_i \neq \emptyset \right) \cap S_{2m+1} \neq \emptyset \right) \\ &= P \left(\bigcap_{i=1}^{2m} S_i \neq \emptyset \right) \times P(S_{2m+1} \neq \emptyset) \end{aligned}$$

Par indépendance
lemme des coalitions

$$\begin{aligned} &= P_m \times P(S_{2m+1} \neq \emptyset) \\ &= \frac{1}{4^m} \binom{2m}{m} \times \end{aligned}$$

on utilise la 19 |

21) a)

~~for i in range(1, 2 * m + 1):~~
 ~~$X_i = \text{rd.linnorm}(1, \text{teta})$~~
 ~~$S_i = \text{mp.sum}$~~

for i in range(1, 2 * m + 1):
 $U = \text{rd.linnorm}(m, 0)$
 $2U - m = S_i$
 $L = \text{mp.}(\max(S_{2i} = 0))$

b) $\left(\frac{\ln}{m} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la
loi normale centrée réduite

$$\begin{aligned} 22) a) \quad U_{m+1} - U_m &= \ln(C_{m+1}) - \ln(C_m) \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{m+1}}{4^{m+1}} \left| \frac{2(m+1)}{m+1} \right| \right) \\ &\quad - \ln \left(\frac{\sqrt{m}}{4^m} \left| \frac{2m}{m} \right| \right) \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{m+1}}{4^{m+1}} \left| \frac{2(m+1)}{m} \right| \right) \\ &\quad - \ln \left(\frac{\sqrt{m}}{4^m} \left| \frac{2m}{m} \right| \right) \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{m+1}}{4^{m+1}} \left| \frac{2(m+1)}{m} \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^N U_{m+1} - U_m \\ &= \sum_{m=2}^{N+1} U_m - \sum_{m=1}^N U_m \end{aligned}$$

$$= U_{N+1} - U_1 \quad \text{or, } U_{N+1} = \ln(C_{N+1})$$

$$= \ln \left(\sqrt{N+1} P_{N+1} \right)$$

et comme :

$$\begin{aligned} \sum U_{N+1} &= \sum \ln \left(\sqrt{N+1} P_{N+1} \right) \\ &= \sum \ln \left((N+1)^{1/2} \right) + \sum \ln(P_{N+1}) \\ &= \sum \left(\frac{1}{2} \right) \ln(N+1) + \sum \ln(P_{N+1}) \end{aligned}$$

Si on montre que : U_{N+1} converge

on a bien : $\sum U_{n+1} - U_n$ qui converge

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} U_{N+1} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(C_{N+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\sqrt{N+1}}{4^{N+1}} \left(\frac{2(N+1)}{N+1} \right) \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

on a (U_{N+1}) qui converge et donc :

$\sum U_{n+1} - U_n$ converge

5 | $\sum u_n$ converge donc et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(C_n) = 0$

$e^{U_n} = C_n$ par composition
et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{U_n} = e^0 = 1$

(C_n) converge

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$23 / a / P \left(\frac{L_m}{m} \leq 0.5 \right)$$

$$= P(L_m \leq m \cdot 0.5) \quad (\text{car } m > 0)$$

$$= P(L_m \leq L_{m \cdot 0.5}) \quad (\text{car } L_m \text{ ne prend que des valeurs entières})$$

$$= \sum_{k=0}^{L_{m \cdot 0.5}} P(L_m = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{L_{m \cdot 0.5}} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-k} P_{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{L_{m \cdot 0.5}} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} P_{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{L_{m \cdot 0.5}} \frac{1}{4^{m-k}} \binom{2(m-k)}{m-k} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad (\text{question 20})$$

$$= \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{L_{m \cdot 0.5}} \binom{2(m-k)}{m-k} \binom{2k}{k}$$

28 / b /

On reprend l'encadrement question 7 /

$C = (c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (23.5)
de limite: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

donc: $(|c_k|)_{k \in \mathbb{C}(a_n, b_n)} \mid n \in \mathbb{N}^*$ converge et:

$\min(|c_k|)_{k \in \mathbb{C}(a_n, b_n)} \mid n \in \mathbb{N}^*$ et

$\max(|c_k|)_{k \in \mathbb{C}(a_n, b_n)} \mid n \in \mathbb{N}^*$ convergent (en particulier)

elles ont donc la même limite (car ce sont des suites extraites de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$)

elles ont la même limite: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

alors comme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

et que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{L(n)} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x)$
(question 8)

on a, par théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n} \sum_{k=a_n}^{L(n)} \left(\frac{2k}{n} \right) \left(\frac{2(n-k)}{n} \right) = \frac{G(x)}{\sqrt{\pi}}$$

$$24/ a) (\cancel{a_m}) = \frac{A}{4}$$

$m \in \mathbb{N}$

$$(a_m)_{m \in \mathbb{N}} = m^{1/4} \text{ convient}$$

24/ b) on reprend la 23/ d), avec un changement d'indices: $j = k - a_m$

on a les bornes qui varient alors de 0 à $L_{\max} - a_m$ et $k = j + a_m$

on:

$$1 \leq a_m \leq L_{\max}$$

$$\Rightarrow 0 \leq L_{\max} - a_m \leq L_{\max} - 1 - a_m$$

$$-1 \leq -a_m \leq -L_{\max}$$

$$\Rightarrow L_{\max} - 1 \leq L_{\max} - a_m \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{a_m - 1 \leq L_{\max} - a_m \leq 0}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{a_m-1} \binom{2k}{k} \binom{2(m-k)}{m-k} \\ = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^m \frac{G(x)}{\pi} \\ = 0$$

$$\text{donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{a_m-1} \binom{2k}{k} \binom{2(m-k)}{m-k} = 0$$

25/ $\lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\frac{L_m}{m} \leq x\right) = \frac{G(x)}{\pi}$ (question 23 a et 23 d)
on reconnaît la fonction de répartition

de la loi archimède

donc :

$$\left(\frac{\ln}{n} \right)$$

$n \rightarrow \infty$

converge en loi vers la loi
archimède