



T2-00055
698025
Maths S

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I:

1) a) X est $U(0, 1]$. X admet des moments de tous ordres si $E(X^k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

d'après le théorème de transfert, $E(X^k)$ existe si et seulement si : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$

converge absolument car f_X est une densité de X .
 X est $U(0, 1]$ donc :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx = \int_0^1 x^k dx$$

$$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k+1}$$

Comme : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx = \int_0^1 x^k dx$

converge, elle converge absolument car $x^k \geq 0$

donc X admet des moments de tous ordres et :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

b) de même, $E(X^k)$ existe (avec X est $E(1)$ si et

Seulement si : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_x(x) dx$ converge absolument, par le théorème de transfert.

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_x(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx$

$\lambda x^k e^{-\lambda x} \geq 0$ donc la convergence absolue équivaut à la convergence.

On fait un changement de variable, on pose : $u = \lambda x$
Ce changement de variable est affine,

$$u = \lambda x \Leftrightarrow \frac{u}{\lambda} = x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k = x^k$$

$$du = \lambda dx$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_0^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx &= \lambda \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k e^{-u} \frac{du}{\lambda} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k e^{-u} du \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } u^k &= u^{k+1-1} \\ &= u^{k-1+1} \end{aligned}$$

On reconnaît l'intégrale de la fonction gamma qui converge car $k+1 > 0$

donc $E(x^k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
 x admet des moments de tous ordres si elle

Soit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$
 et : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(X^k) = \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^k \frac{1}{(k+1)}$
 $= \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^k k!$

Partie II :

$$I \mid 1:2 \mid (H_3)_{i,j} = V_{i+j-2} \text{ (avec } (i,j) \in \llbracket 1;3 \rrbracket^2 \mid$$

Pour le coefficient : $(H_3)_{1,1}$ on a :

$$\begin{aligned} (H_3)_{1,1} &= V_{1+1-2} \\ &= V_{2-2} \\ &= V_0 \end{aligned}$$

Pour le coefficient : $(H_3)_{1,2}$ on a :

$$\begin{aligned} (H_3)_{1,2} &= V_{1+2-2} \\ &= V_{3-2} \\ &= V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_3)_{1,3} &= V_{1+3-2} \\ &= V_{4-2} \\ &= V_2 \end{aligned}$$

En raisonnant de même pour tous les coefficients on a :

$$\underline{H_3} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & V_2 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix}$$

On remarque aussi que : $\forall (i,j) \in \llbracket 1;3 \rrbracket^2, (H_3)_{i,j} = (H_3)_{j,i}$
 donc calculer $(H_3)_{i,j}$ suffit.

En procédant de même on a :

$$\underline{G_3} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ V_2 & V_3 & V_4 \\ V_2 & V_4 & V_5 \end{pmatrix}$$

$$3) (H_m W)_{i,j} = \sum_{k=1}^3 (H_m)_{i,k} w_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^3$$

$$(H_m W)_{i,j} = \sum_{j=1}^3 (H_m)_{i,j} w_j$$

$$= \sum_{j=1}^3 v_{i+j-2} d_j$$

$$\Rightarrow \underline{t W H_m W} = \sum_{i=1}^3 (t W)_i (H_m W)_{i,j}$$

$$= \sum_{i=1}^3 d_i \sum_{j=1}^m v_{i+j-2} d_j$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_i d_j v_{i+j-2}$$

(car $v_{i+j-2} d_j = d_j v_{i+j-2}$ par commutativité du produit)

$$(P(x))^2 = \left(\sum_{i=1}^m d_i x^{i-1} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m d_i x^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^m d_j x^{j-1} \right)$$

donc : $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_i d_j x^{i+j-2} \right) f(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_i d_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x) dx$$

on : $\int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x) dx$ est le moment
d'ordre $i+j-2$ de X , $m_{i+j-2}(X) = v_{i+j-2}$

Ainsi on a bien :

$$\underline{t W H_m W} = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_i d_j v_{i+j-2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, (H_m)_{i,j} = (H_m)_{j,i}$
Donc H_m est symétrique.

${}^t W H_m W$ où $W = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$ est la forme quadratique associée à H_m .

$${}^t W H_m W = \int_0^{+\infty} (p(x))^2 f(x) dx$$

Comme une densité est toujours positive:

$$\forall x \geq 0, (p(x))^2 f(x) \geq 0$$

De plus: $x \mapsto (p(x))^2 f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Par positivité de l'intégrale, ${}^t W H_m W \geq 0$
Donc toutes les valeurs propres de H_m sont positives.

Si on calcule: ${}^t W G_m W$ (où G_m est symétrique)

$$\text{On trouve: } {}^t W G_m W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_i d_j U_{i+j-1}$$

ensuite comme: U_{i+j-1} est le moment d'ordre:

$i+j-1$ de x on a:

$$U_{i+j-1} = \int_0^{+\infty} x^{i+j-1} f(x) dx$$

$$\text{et } {}^t W G_m W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_i d_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-1} f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \right) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x^{j-1} \right) f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i P(x) f(x) dx$$

$$\text{Or, } \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^{i-1+1}$$

$$= P(x) \times x$$

$$\text{Donc: } {}^t W G_m W = \int_0^{+\infty} P(x) x P(x) f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (P(x))^2 x f(x) dx$$

$$\text{comme: } \forall x \geq 0, P(x)^2 x f(x) \geq 0$$

et que la fonction à intégrer est ~~positive~~ continue

ona: ${}^t W G_m W > 0$; toutes les valeurs propres de G_m

sont positives puisque la forme quadratique ${}^t W G_m W$ est positive.

$$6 \mid V_3 = E(X^3) = E(X_x^2 \cdot X)$$

$$A \mid \text{on pose: } g: t \mapsto t^m \exp(-t/a) - \left(\frac{m}{a}\right)^{m/a} \exp\left(\frac{-m}{a}\right)$$

la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ par théorèmes d'opérations de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(t) = m t^{m-1} \exp(-t/a) + t^m \exp(-t/a) \left(-\frac{1}{a}\right)$$

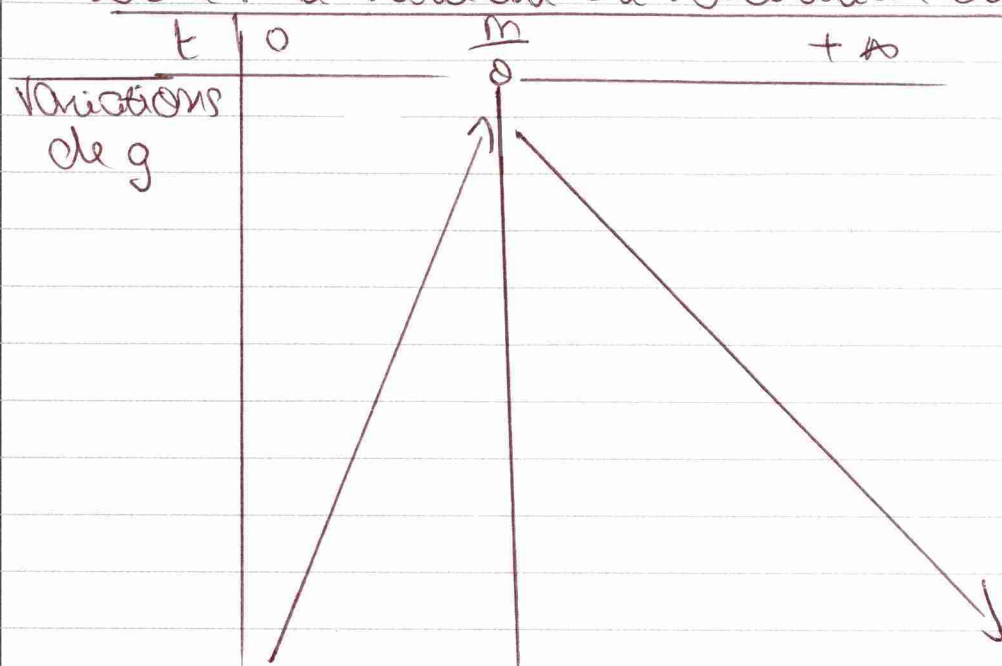
$$= \exp(-t\alpha) (mt^{m-1} - \alpha t^m)$$

$$= \exp(-t\alpha) t^{m-1} (m - \alpha t)$$

$$\exp(-t\alpha) t^{m-1} \geq 0 \text{ et } : m - \alpha t \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \alpha t$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\alpha} \geq t \text{ (avec } \alpha > 0 \text{)}$$

donc : le tableau de variation de g est :



$$g(m/\alpha) = \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m \exp\left(-\frac{m}{\alpha} \times \alpha\right) - \frac{m}{\alpha} \exp\left(-\frac{m}{\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m \exp(-m) - \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{m/\alpha} \exp\left(-\frac{m}{\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m \exp(-m) - \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m \times \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left(-m/\exp(1/\alpha)\right)$$

$$= \exp(-m) \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m \left(1 - \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$

$$\exp(-m) \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m \geq 0 \text{ et comme } : 1 - \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq 0$$

Car :

En a priori, il faut à montrer que $1 - \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq 0$
 on a : $g(m/\alpha) \leq 0$ (ce qui n'a pas été établi).

et donc g qui admet un maximum global en $\frac{m}{\alpha}$ est négative.

on veut dire: $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$,
 $t^m \exp(-t) \leq \left(\frac{m}{e}\right)^{m/e} \exp\left(-\frac{m}{e}\right)$

3) on admet le 2/a).

$$\begin{aligned} (V_m)^{-0/m} &= (V_m) \\ &= (m_m(x))^{-0/m} \\ &= \int_0^{t_0} (x^m)^{-0/m} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } (x^m)^{-0/m} &= x^{-0} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^0 \end{aligned}$$

$$(V_m)^{-0/m} = \int_0^{t_0} \left(\frac{1}{x}\right)^0 f(x) dx$$

8)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test - Stieltjes (v):
    N = len(v) - 1
    m = 1 + N // 2
    H = np.zeros((m, m))
    for m in range(1, m+1):
        for i in range(1, m+1):
            H[i, m-1] = v[i+m-1]
            H[m-1, i] = v[i+m-1]
        valp = al.eigvalsh(H)

        for k in range(0, m+1):
            if (valp[k] == 0):
                return 1
    return 0
```

II 12) Les intégrales existent si et seulement si elles convergent donc si : $t \mapsto t^m e^{-t} \sin(t)$ et : $t \mapsto t^m e^{-t} \cos(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$

8/18

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

II) 2/9) $\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} |\sin(t)| dt$ est impropre en $+\infty$,
 $t \mapsto t^m e^{-t} |\sin(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$|\sin(t)| \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^m e^{-t} |\sin(t)| \leq t^m e^{-t}$$

et comme : $\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt$ est une intégrale qui converge (fonction gamma convergente sur $\mathbb{R}_+$), par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives :

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} |\sin(t)| dt \text{ converge}$$

donc : $\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} |\sin(t)| dt$ converge absolument donc converge, elle est bien définie

elle même :

$$0 \leq t^m e^{-t} |\cos(t)| \leq t^m e^{-t}$$

et comme : $\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt$ converge, par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} \cos(t) dt$ converge absolument donc converge, elle est bien définie.

$$10/ \quad S_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} \sin(t) dt \\ = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$$

Par intégration par parties, on pose:

$$u(t) = e^{-t} \quad u'(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = \sin(t) \quad v(t) = -\cos(t) \\ \underline{u \text{ et } v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

$$S_0 = \cancel{\int_0^A [e^{-t} - \cos(t)]}^A$$

on a: $A \geq 0$.

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t) dt = [e^{-t} - \cos(t)]_0^A + \int_0^A \cos(t) e^{-t} dt \\ = -e^{-A} \cos(A) + 1 - \int_0^A \cos(t) e^{-t} dt$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} \cos(A) \\ 0 \leq |\cos(A)| \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq -e^{-A} |\cos(A)| \leq -e^{-A} \\ \text{or } \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^A} = 0$$

donc par théorème des gendarmes,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\cos(A) e^{-A} = 0$$

$$\underline{S_0 = T_0}$$

On a donc: $S_0 = 1 - T_0$

$$\Leftrightarrow S_0 = 1 - S_0 \\ \Leftrightarrow 2S_0 = 1$$

donc $S_0 = \frac{1}{2}$

11) $S_{m+1} + T_{m+1} =$

$(m+1) T_m = (m+1) \int_0^{+\infty} t^m e^{-t} \cos(t) dt$

On fait une intégration par parties, on pose:

$$v'(t) = t^m \quad u(t) = e^{-t} \cos(t)$$

$$v(t) = \frac{t^{m+1}}{m+1} \quad u'(t) = -e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t)$$

$$= e^{-t} (-\cos(t) - \sin(t))$$

v et u sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc par intégration par parties avec $A \geq 0$, on a:

$(m+1) \int_0^A t^m e^{-t} \cos(t) dt =$

$(m+1) \left[\frac{t^{m+1} e^{-t} \cos(t)}{m+1} \right]_0^A - \int_0^A t^{m+1} e^{-t} (-\cos(t) - \sin(t)) dt$

en faisant tendre A vers $+\infty$ on a:

$$(m+1) T_m = \int_0^{+\infty} t^{m+1} e^{-t} \cos(t) dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} t^{m+1} e^{-t} \sin(t) dt$$

* $(m+1) T_m = S_{m+1} + T_{m+1}$

On raisonne de même sur $(m+1) S_{m+1}$ avec une intégration par parties en posant:

$$v'(t) = t^m \quad u(t) = e^{-t} \sin(t)$$

$$v(t) = \frac{t^{m+1}}{m+1} \quad u'(t) = -e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t)$$

$$= e^{-t} (-\sin(t) + \cos(t))$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

en raisonnant de même on trouve:

$S_{m+1} - T_{m+1} = (m+1) S_m$

$$\underline{R/V_{m+1}} = \begin{pmatrix} S_{m+1} \\ T_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } \underline{(m+1) M U_m} = (m+1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_m \\ T_m \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{m+1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_m \\ T_m \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{m+1}{2} \right) \begin{pmatrix} S_m + T_m \\ -S_m + T_m \end{pmatrix}$$

et comme :

$$\cancel{S_{m+1}} = \cancel{(m+1) T_m - T_{m+1}}$$

$$S_{m+1} = \frac{(m+1) T_m + (m+1) S_m}{2} \quad \text{(avec la question précédente)}$$

on a :

$$\underline{S_{m+1} = \frac{(m+1)}{2} (T_m + S_m)}$$

et T_{m+1} s'obtient aussi en sommant cette fois, mais en faisant la différence des deux équations, on a :

$$\frac{2}{2} T_{m+1} = (m+1) T_m - (m+1) S_m$$

$$= (m+1) (T_m - S_m)$$

$$\Rightarrow \underline{T_{m+1} = \frac{(m+1)}{2} (T_m - S_m)}$$

$$\text{On a bien : } \underline{V_{m+1} = \begin{pmatrix} S_{m+1} \\ T_{m+1} \end{pmatrix} = \left(\frac{m+1}{2} \right) \begin{pmatrix} S_m + T_m \\ -S_m + T_m \end{pmatrix}}$$

13 | On pose : $P_m^U : V_m = m! H^m v_0^U$ et montrons que P_m est vraie pour tout m dans $\mathbb{N}$
 - Pour $m=0$, on a $v_0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et comme : $0! M^0 U_0 = U_0$
 P_0 est vraie.

— Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose P_m vraie. Montrons que P_{m+1} est vraie.

$V_m = m! M^m U_0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$(m+1)M V_m = (m+1)M m! M^m U_0$$

$$(m+1)M V_m = (m+1)! M^{m+1} U_0$$

or, à la 12) on a : $V_{m+1} = (m+1)M V_m$

Donc : $V_{m+1} = (m+1)! M^{m+1} U_0$

P_{m+1} est vraie

Par principe de récurrence, P_m est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

— Pour tout m dans $\mathbb{N}$: $V_m = m! M^m U_0$

$$\begin{aligned} 14) M^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M^4} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{16} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-\frac{1}{4} I_2}$$

$$\cancel{M^{m+3}} S_{4m+3} =$$

$$\underline{V_4 = 4! M^4 V_0}$$

$$\begin{aligned} V_{4m+3} &= (4m+3)! M^{4m+3} V_0 \\ &= (4m+3)! \left(-\frac{1}{4} I_2\right)^{m+3} V_0 \end{aligned}$$

$$= \underline{-\frac{(4m+3)!}{4} V_0}$$

$$\text{donc comme : } V_{4m+3} = \begin{pmatrix} S_{4m+3} \\ T_{4m+3} \end{pmatrix}$$

$$S_{4m+3} = \underline{-\frac{(4m+3)!}{4} (S_0)} =$$

15 / On pose $x = t^4$, le changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction : $t \mapsto t^4$ est croissante (strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée est strictement positive et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (d'après le théorème de la bijection monotone).

$$dx = 4t^3 dt$$

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^+, \int_0^{+\infty} x^m g(x) dx &= \int_0^{+\infty} (t^4)^m g(t^4) 4t^3 dt \\ &= 4 \int_0^{+\infty} t^{4m+3} g(t^4) dt \end{aligned}$$

$$\text{On, } \underline{g(t^4) = \exp(-t^{4/4}) \sim \exp(-t) \text{ quand } t \rightarrow +\infty}$$

$$\text{On retrouve: } \int_0^{+\infty} x^m g(x) dx = 4 S_{4m+3}$$

On à la question 14 / admise, on a:
 $S_{4m+3} = 0$ donc:

$$\underline{\int_0^{+\infty} x^m g(x) dx = 0}$$

16 / On pose $g_1 : x \mapsto \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 > 0$ et $g_2 : x \mapsto \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ celle d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2, \lambda_2 > 0$.

Avec: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

- Si m est impair: alors les deux intégrales existent et sont égales elles valent 0.

Si m est pair:

17) On en conclut que le problème admet au moins deux solutions car les deux fonctions g_1 et g_2 sont deux des dérivées de variables x_1 et x_2 solutions du problème (x_1 et x_2 étant distinctes).

Il y a non unicité de la solution.
(en admettant la question précédente)

Partie III :

$$18) \forall m \in \mathbb{N}, \underline{U_m = \int_{-1}^{+1} x^m f(x) dx}$$

$$= \int_0^1 x^m f(x) dx$$

~~$x^m f(x) \geq 0$ sur~~
 $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, x^m f(x_0) < 0$ (sinon x ne serait pas solution)

Comme: $x \mapsto x^m f(x)$ est continue sur J .
Par théorème de stricte positivité, $U_m > 0$

$$19) \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} U_{i+k}$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} \int_0^1 x^{i+k} f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^i f(x) \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} x^k \right) dx$$

Avec la formule du Binôme de Newton, on a:

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} U_{i+k} = \int_0^1 x^i f(x) [(-x+1)^j] dx$$

$$= \int_0^1 x^i (-x+1)^j f(x) dx$$

Par théorème de stricte positivité de l'intégrale, on a: $\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} U_{i+k} > 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 25

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$20) \quad V_3 = \int_0^1 x^3 f(x) dx \quad (\text{théorème de transfert}) \\ = \int_0^1 x^2 x f(x) dx$$

Par intégration par parties on a, en posant :

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 & b'(x) &= f(x) \\ a'(x) &= 3x^2 & b(x) &= F(x) \end{aligned}$$

a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} V_3 &= [x^3 F(x)]_0^1 - 3 \int_0^1 x^2 F(x) dx \\ &= F(1) - F(0) - 3 \int_0^1 x^2 F(x) dx \end{aligned}$$

On refait une intégration par parties
on a :

$$\begin{aligned} V_3 &= F(1) - F(0) - 3 \left[\frac{x^3}{3} F(x) \right]_0^1 + 3 \int_0^1 \frac{f(x) x^3}{3} dx \\ V_3 &= F(1) - F(0) - F(1) + F(0) + \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21) \quad \sum_{m \geq 1} \frac{V_m}{m^2} &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \int_0^1 x^m f(x) dx \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m^2} \end{aligned}$$

II) 2)

$$22) \underline{\Delta_{m,0}} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} U_{m+0-0}$$

$$\underline{\Delta_{m,0}} = U_m$$

23) $\forall m \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, m\},$

$$\Delta_{m+1, j+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} U_{m+1+k-j-1}$$

$$\Delta_{m,j} - \Delta_{m+1,j}$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} U_{m+k-j} - \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} U_{m+1+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} (U_{m+k-j} - U_{m+1+k-j})$$

On pose $l = K + 1$

$$\Rightarrow k = l - 1$$

avec le changement d'indices plus par télescopage,
on a :

$$\Delta_{m,j} - \Delta_{m+1,j} = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} U_{m+k-j} - \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^{l-1} \binom{j}{l-1} U_{m+l-j}$$

Par télescopage: $\Delta_{m,j} - \Delta_{m+1,j} =$

$$V_m - (-1)^j V_{m+1}$$

Et en utilisant la formule de Pascal:

$$\binom{j}{k} + \binom{j}{k+1} = \binom{j+1}{k+1}$$

ona:

```

24) import numpy as np
def test_kruskal_ff(V):
    N = len(V) - 1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range(0, N+1):
        Delta[k, 0] = V[k]
        if ((Delta[k, 0] <= 0) and (info == -1)):
            info = k
    for j in range(0, N+1):
        Delta[k, j] = np.sum([np.arange(0, j+1) *
            (-1)**(k-1) * mp.cumprod(j) / [mp.cumprod(k) *
            mp.cumprod(j-k)] + V])
        if ((Delta[k, j] > 0) and (Delta[k, 0] <= 0)):
            info = -1
    return (info, Delta)

```

$$25) \underline{V[0]} = (-1, \Delta) , \underline{W[0]} = (-1, \Delta)$$

Th. 3. - h est de classe C^1 sur $(0, 1)$ par somme.

$$- \forall x \in (0, 1), h'(x) = f_2'(x) - f_1'(x)$$

Comme f_2' et f_1' sont continues sur $(0, 1)$ elles sont bornées et donc:

h' est bornée d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis:

$$\forall (x, y) \in (0, 1)^2, |h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

où k est la constante positive telle que:

$$|h'(x)| \leq k$$

27 | $E(h(Z_n))$ avec le théorème de transfert
vaut : $\sum_{k=0}^{\infty} h(k) P(Z_n = k)$

$E(h(Z_n))$ existe car le support est fini

$$\underline{Z_n(u) = \frac{Y_n(u)}{n} = \mathcal{O}(0; 1)}$$

$$E(h(Z_n)) = E$$

$$\begin{aligned} 27b | E(|Z_n - x|^2) \\ = E(|Z_n - x|^2) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \underline{VE(|Z_n - x|^2)} \\ = \underline{E(|Z_n - x|)}$$

$$\underline{\text{donc : } |h(x) - E(h(Z_n))| \leq k VE(|Z_n - x|)}$$

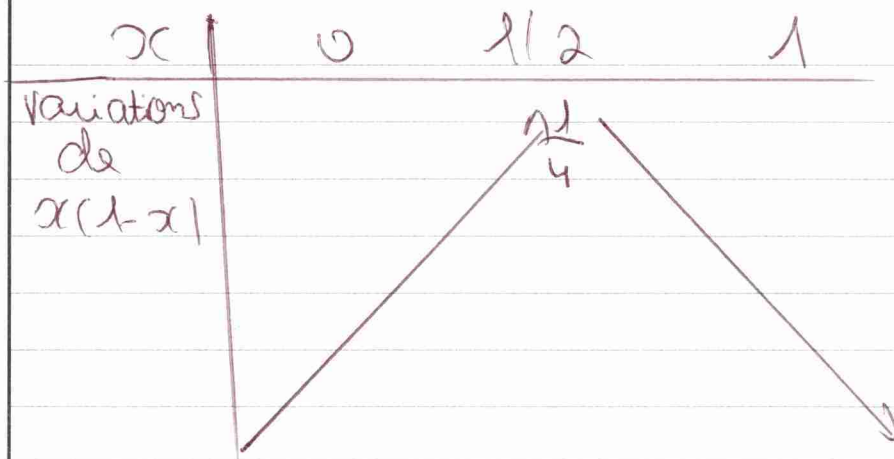
28 | comme la fonction : $x \mapsto x(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut étudier son tableau de variations, on a :

x	0	1/2	1
signe de $x/(x+1)$	+	0	-
variations de $x/(x+1)$			

donc :

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 55	Session : 2013
	Épreuve de : Mathématiques		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			



car $x(1-x)$ est majorée par $1/4$

Donc : $\sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2}$$

On a bien : $k \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{m}} \leq \frac{k}{2\sqrt{m}}$

$29 \mid \int_0^1 h(x) dx$

On admet la 29.

$30 \mid \forall m \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 h(x) dx$

On reprend la 28/ en multipliant les membres par : $\int_0^1 h(x) dx$

on a :

$$3.1 | - \int_0^1 h^2(x) dx \geq 0 \text{ par positivité de l'intégrale}$$

$$- \text{Si on arrive à montrer que : } \frac{k}{2\sqrt{m}} \int_0^1 |h(x)| dx = 0$$

$$\text{on aura : } \int_0^1 h^2(x) dx = 0$$

et comme : h est continue et positive sur $(0; 1]$,
par théorème de stricte positivité de l'intégrale, en utilisant la contraposée, on a :

$$\begin{aligned} & \forall x \in (0; 1], h^2(x) = 0 \\ \Rightarrow & \forall x \in (0; 1], h(x) = 0 \\ \Rightarrow & \underline{h = 0} \end{aligned}$$

$$\text{donc comme } h = f_2 - f_1 \\ \text{on a : } \underline{f_2 = f_1}$$

Si la densité de la variable X solution du problème est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{I} = (0; 1]$, cette solution est unique.

III.4. 3.2 | $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1; 1]$ et convexe.

$$\text{Donc : } \forall x \in [-1; 1], \exp(x) \geq e^0(x-0) + e^0$$

$$\Rightarrow e^x \geq 1+x$$

$$\Rightarrow \underline{e^x - 1 - x \geq 0}$$

On pose: $h: x \mapsto e^x - 1 - x - cx^2$
 h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$,

$$\forall x \in [-1, 1], h'(x) = e^x - 1 - 2cx = e^x - 1 - 2cx$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2cx + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{2c} \geq x \text{ avec } c \neq 0$$

$\Leftrightarrow$

Le développement limité de $\exp$ en 0 à l'ordre 2 est:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\underline{e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2} \text{ au voisinage de } 0}$$

$$33) R_k(x_1, x_2) = \int_0^1 t^k \exp(x_1 t + x_2 t^2) dt$$

~~x_1 to $\int_0^1 t^k \exp(x_1 t + x_2 t^2) dt$ admet une première dérivée partielle par rapport à la première variable car en posant~~

$$2) R_k(x_1, x_2) = \dots \text{ on fixe } x_2 \text{ et on fait}$$

Par intégration par parties, on a:

$$R_k(x_1, x_2) = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \exp(x_1 t + x_2 t^2) \right]_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \exp(x_1 t + x_2 t^2) (x_1 + 2x_2 t) dt$$

$$= \frac{1}{k+1} \exp(x_1 + x_2) - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \exp(x_1 t + x_2 t^2) (x_1 + 2x_2 t) dt$$

$$b) \operatorname{div}_k = \frac{d_i R_k(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)}$$

$$= \frac{R_{k+i}(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)}$$

$$c) f_{k+i} - f_k f_i$$

$$= \frac{R_{k+i}(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)} - \frac{R_k(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)} \frac{R_i(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)}$$

$$= R_{k+1}$$

$$34) a) 2, G(d_1, d_2) = \frac{2 R_0(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)} = U_1 - U_2$$

Donc:

$$\nabla^2 G(d_1, d_2) = 2_0 R$$

34) c) $\nabla^2 G(d_1, d_2)$ est symétrique.
 + $\nabla^2 G(d_1, d_2)$ est la forme quadratique associée
 donc ... Comme elle est strictement positive
 (en admettant la 34) b), on a les
valeurs propres de $\nabla^2 G(d_1, d_2)$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

d)

33) c) on admet la 33) b), on a:

$$d_i f_k(d_1, d_2) = f_{k+i}(d_1, d_2) - f_k f_i(d_1, d_2)$$

$$= f_{k+i}(d_1, d_2) - f_k(d_1, d_2) f_i(d_1, d_2)$$

$$= \frac{R_{k+i}(d_1, d_2)}{R_0(d_1, d_2)} -$$

Copie anonyme - n°anonymat : 698025

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 25	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

retour à la 27/a) : $4m \cos(\frac{\pi}{2m})$

$E(h/2m) = \sum_{k=0}^1 \frac{k}{m} P(4m=k)$

Avec le théorème de transfert

$$= \sum_{k=0}^1 \frac{k}{m} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^1 k$$

$$= \frac{1}{2m} \times 1$$

retour question n° 21 partie III / 1.

- Si $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{U_m}{m} = U_m$

comme : $\sum_{m=1}^{\infty} U_m = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^m f(x) dx$

25/28

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

