

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

MA-00086
812639
Maths B



Code épreuve : 296

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées / Em. Lagan

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :

Partie I —

1.
a) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $C_1 \quad C_2 \quad C_3$

On remarque que $C_1 = C_2 = C_3$, donc $\text{rg}(A - 2I) = \dim(\text{Vect}(C_1))$. On $C_1 \neq 0$, donc $\text{rg}(A - 2I) = 1$

b) D'après 1.a) la matrice $A - 2I$ est non inversible car $\text{rg}(A - 2I) = 1 < 3$ donc $2 \in \text{Sp}(A)$

De plus d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(\text{Im}(A - 2I))}_{= \text{rg}(A - 2I)} + \dim(\text{Ker}(A - 2I)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim(\text{Ker}(A - 2I))}_{\dim(E_2)} = 3 - 1 = 2$$

On en déduit que E_2 le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est de dimension 2.

$$c) E_2 = \{ X \in \Pi_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X \}$$

$$0_1 \quad AX = 2X \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -x - y, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } E_2 = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=v}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=w} \right)$$

Comme $x \neq 0$ $w \neq 0$ et v et w sont non proportionnels alors (v, w) est libre et par conséquent (v, w) forme une base de E_2 .

$$d) \quad A \in \Pi_3(\mathbb{C})$$

$A \in \Pi_3(\mathbb{C})$ donc A admet au plus 3 valeurs propres distinctes (car $\mathbb{C}$), comme le sous-espace propre E_λ est de dimension 2, A admet au plus une autre valeur propre.

2.

des coefficients

a) Ils représentent la somme $\sum$ des lignes de la matrice Π

b) On remarque que $AU = SU$ donc comme $U \neq 0$, S est valeur propre de A et U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre S .

3. (U, V, W) forme une base de $\mathbb{R}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A car :

$$(i) \begin{cases} U \neq 0 \text{ et } U \in E_S \text{ avec } E_S = \{X \in \mathbb{R}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = SX\} \\ V \neq 0 \text{ et } V \in E_L \\ W \neq 0 \text{ et } W \in E_L \end{cases}$$

(ii) Supposons qu'il existe des réels a, b et c tels que $aU + bV + cW = 0$

Montrons que $a = b = c = 0$

Par hypothèse : $aU + bV + cW = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ 3a = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a = 0 \\ c = -a = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ainsi (U, V, W) est libre et comme $\text{card}(U, V, W) = 3 = \dim \mathbb{R}_{3,1}(\mathbb{R})$ alors (U, V, W) forme une base

de $\Pi_3(\mathbb{R})$

On en déduit que A est diagonalisable et que par conséquent il existe :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \Pi_3(\mathbb{R}) \text{ diagonale et}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible tels que}$$

$$\underline{D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}}$$

Partie II $\longrightarrow$

4. On remarque que (S) $\Leftrightarrow AX = X'$ avec A la matrice de la partie I et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On a montré que A est diagonalisable donc d'après le cours l'ensemble des solutions de (S) sont les fonctions de la forme :

$$\underline{Y: t \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}, \text{ avec } (\alpha, \beta, \mu) \in \mathbb{R}^3}$$

5.

a) le problème de Cauchy permet d'assurer l'unicité de cette solution.

~~b) On sait que A est inversible car $0 \notin \text{Sp}(A)$ par conséquent l'unique solution possible est : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.~~

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Code épreuve : 236

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées / Em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'après S. a), en résolvant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \beta + \mu = -1 \\ -\lambda - \beta + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \beta = -1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique solution cherchée à la S. a)

Partie III —

$$\begin{aligned} 6. \lambda \in Sp(B) &\Leftrightarrow B - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(B - \lambda I) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-1 - \lambda)(3 - \lambda) - (-4) \times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$\text{Donc } \lambda_0 = -\frac{(-2)}{2} = 1$$

Ainsi 1 est l'unique valeur propre de B.

7. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde on va montrer que B n'est pas diagonalisable.

Supposons que B soit diagonalisable, il existe donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ diagonale et P inversible tels que

$$D = P^{-1}BP \Leftrightarrow I = P^{-1}BP \\ \Leftrightarrow I = B$$

Or $B \neq I$, donc B ne peut pas être diagonalisable

1. Card $(v_1, v_2) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow (v_1, v_2)$ est libre.

Or $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ et v_1 et v_2 sont non proportionnels donc (v_1, v_2) est libre.

Par conséquent $\overset{B}{(v_1, v_2)}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Notons donc $T = \text{mat}_B f$

$$T = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{Avec } \begin{cases} f(v_1) = f(2, -1) = (1, -1) = v_1 \\ f(v_2) = f(-1, 0) = (1, -1) = v_1 + v_2 \end{cases}$$

c) Comme T et B sont deux matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, il existe Q inversible

tel que $B = Q T Q^{-1}$

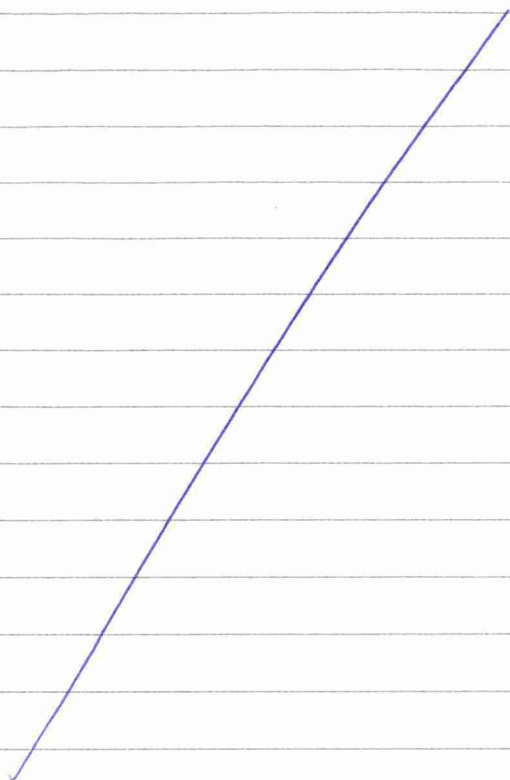
Q est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à B

On admet 8c.

9. On remarque que $(\Sigma) \Leftrightarrow Bx = x'$ avec B la matrice de la partie III est $x = \begin{pmatrix} k \\ y \end{pmatrix}$

On admet 9.

→ suite



Exercice 3:

Partie I —

1.

a) la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$

On, continuité en 0:

$$\lim_{0^+} h = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ par croissances comparées}$$

$$\text{Donc } \lim_{0^+} h = 0 = h(0)$$

On en déduit que h est continue en 0, par conséquent étant donné que h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors h est continue sur $\mathbb{R}_+$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Né(e) le

16/03/2003

Prénom :

ESH

Code épreuve :

236

Nombre de pages :

Session :

2023

Épreuve de :

Mathématiques appliquées / Emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$b) \forall x > 0, \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x \ln(x) - 0}{x} = \ln(x)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Pour h n'est pas dérivable en 0 car la limite du taux d'accroissement n'est pas une constante.

c) Par produit de fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}_+$ (1.a) donc d'après le théorème de la limite monotone h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $h(\mathbb{R}_+) = [h(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)] = [0; +\infty[$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} h = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \text{ par produit}$$

Comme $0 \in [0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}_+$

Or $h(0) = 0$ donc 0 est l'unique antécédent de 0 par h .

$$? \forall x \in [0; 1], g(x) = x \ln(1-x) - x \ln(x) - \ln(1-x)$$

~~g est dérivable sur $]0, 1[$ comme somme, produit et composé de fonctions dérivables~~

~~On sait que~~

g est dérivable sur $]0, 1[$ comme somme, produit et composé de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) &= -\ln x - \frac{x}{x} + \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) + \\ &\quad x \times \frac{(-1)}{1-x} \\ &= \ln(1-x) - \ln(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$\text{On } \forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > e^0 = 1$$

par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} > 2$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

par décroissance stricte la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$		+	-
g		$\nearrow g(\frac{1}{2}) \searrow$	

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

Partie II —

3. $U \hookrightarrow \mathcal{U}([1, m])$ donc $\forall h \in [1, m], P(U=h) = \frac{1}{m}$

~~Sans risque d'existence:~~

$$H(U) = - \sum_{h \in \mathcal{U}(U)} h(P(U=h))$$

$$= - \sum_{i=1}^m h\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$= - h\left(\frac{1}{m}\right) \times \sum_{i=1}^m 1$$

$$= - \frac{1}{m} \ln\left(\frac{1}{m}\right) \times m \quad \text{car } h(x) = x \ln x, \forall x > 0$$

$$\underline{H(U) = - \ln\left(\frac{1}{m}\right) = -(-\ln(m)) = \ln(m)}$$

4. $X \hookrightarrow B(p), p \in]0, 1[$

Donc $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$

$$\text{Ainsi } H(X) = - \sum_{h \in \mathcal{X}(X)} h(P(X=h))$$

$$= -h(P(X=0)) - h(P(X=1))$$

$$= -h(1-p) - h(p)$$

$$= -h(p) - h(1-p)$$

$$H(X) = g(p) \quad (\text{partie I})$$

$$\text{On } H(X) \leq \ln 2 \Leftrightarrow g(p) \leq \ln 2$$

On d'après 2. I pour tout $p \in]0, 1[, g(p) \leq \frac{1}{2}$
et $g(p) = \ln 2$ pour $p = \frac{1}{2}$

Donc $H(X) \leq \ln(2) \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

5.

$X_1 \hookrightarrow B(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow B(p_2)$

a) Comme $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ et $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$

Alors $X_1 + X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\} = \llbracket 0; 2 \rrbracket$

b) $(Z = 1) = "X_1 + X_2 \text{ est impair}" = "X_1 + X_2 = 1"$

Donc $(Z = 1) = (X_1 + X_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$

Donc $P(Z = 1) = P(X_1 + X_2 = 1)$

par incompatibilités des événements :

$\Leftrightarrow p = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$

par indépendances de X_1 et X_2 :

$\Leftrightarrow p = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$

$\Leftrightarrow p = (1 - p_1)p_2 + p_1(1 - p_2)$

D'où $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$

c) $1 - 2p = 1 - 2(p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1))$ d'après 5.b)

$= 1 - 2p_1(1 - p_2) - 2p_2(1 - p_1)$

$= 1 - 2p_1 + 2p_1p_2 - 2p_2 + 2p_1p_2$

$= 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2$

Donc $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$

6.

a) $\forall n \geq 1, S_n = X_1 + \dots + X_n$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Probabilités appliquées / Emlyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Comme pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ alors on a :

$$S_n(\Omega) = [0; n]$$

$$P(S_n = k) = P\left(\sum_{h=1}^n X_h = k\right), \quad \forall k \in [1; n]$$

On admet b. a)

b) On cherche à montrer par récurrence que la propriété " $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$ " est vraie pour tout $n \geq 1$.

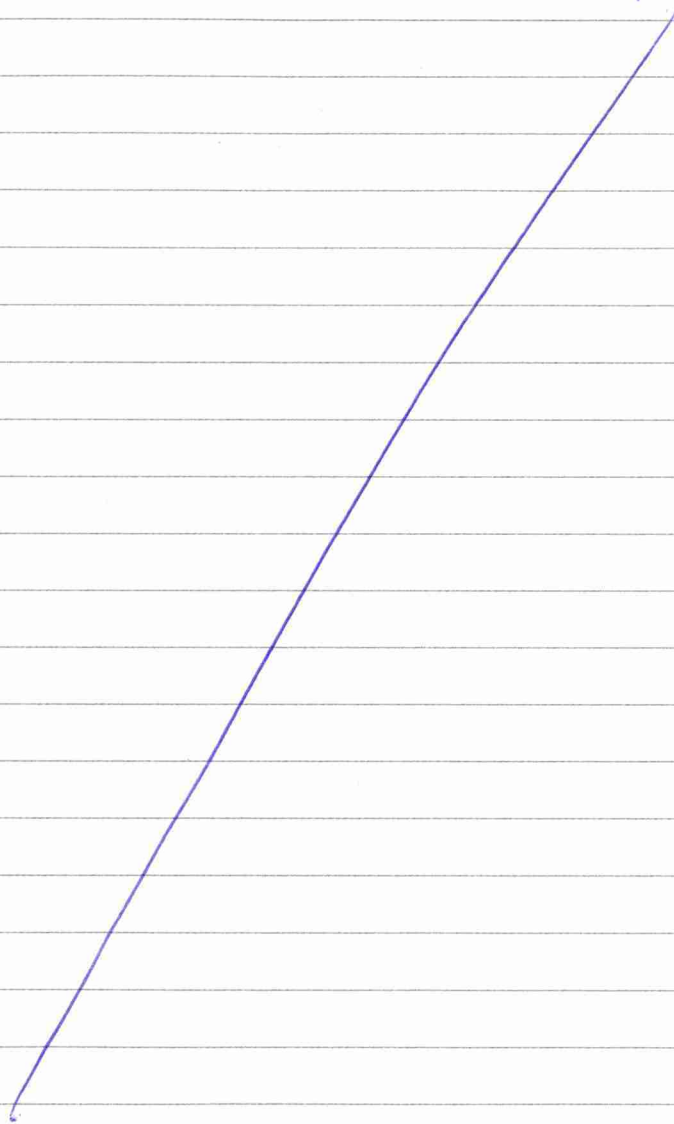
$$\begin{aligned} * \quad 1 - 2P(Z_1 = 1) &= 1 - 2P(X_1 = 1) \\ &= 1 - 2p \\ &= (1 - 2p)^1 \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour $n = 1$

* Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n \geq 1$

montrons alors que : " $1 - 2P(Z_{n+1} = 1) = (1 - 2p)^{n+1}$ "

Par hypothèse : $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$



On admet b. b)

$$c) H(Z_n) = - \sum_{h \in Z_n(\Omega)} h(P(Z_n = h))$$

$$= -h(P(Z_n = 0)) - h(P(Z_n = 1))$$

$$H(Z_n) = -h(1-p) - h(p) \\ = g(p)$$

Avec $p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^n$ car d'après 6.b)

$$\text{On a } 1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2p_1 = (1-2p)^n$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^n$$

On peut tout $p \in]0; 1[$ $g(p) \leq \ln 2$

$$\text{et } g(p) = \ln 2 \text{ si } p = \frac{1}{2}$$

Autrement dit $H(Z_n) \leq \ln 2$ est vérifié

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^n = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1-2p)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2p)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-2p = 0 \text{ car } x \mapsto x^n \text{ est nulle si } x = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \underline{H(Z_n) \leq \ln 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}}$$

Partie III —

7.

a) $U \subset U([a; b])$, $a < b$

On est certain que U admet une entropie car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt = \int_a^b h \circ f(t) dt$ ^{converge} car une densité f de U

est : $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b)

$$\text{Denc } H(u) = - \int_a^b h \circ f(t) dt$$

$$= - \int_a^b h\left(\frac{1}{b+a}\right) dt$$

$$= - h\left(\frac{1}{b+a}\right) \int_a^b 1 dt$$

$$= - \frac{1}{b+a} \ln\left(\frac{1}{b+a}\right) [t]_a^b$$

$$= - \frac{(b-a)}{b+a} \ln\left(\frac{1}{b+a}\right)$$

$$H(u) = \frac{a-b}{b+a} \ln(b+a)$$

P. $X \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$

$$a) \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Denc $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument et $\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$

b) X admet une entropie $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ converge absolument.

$$\begin{aligned} \text{On } \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt &= \int_0^{+\infty} h \circ f(t) dt \quad \text{car } f(t) = 0, \forall t < 0 \\ &= \int_0^{+\infty} h(\lambda e^{-\lambda t}) dt \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 236	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées / Em Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} (\ln(\lambda e^{-\lambda t})) dt \\&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} (\ln(\lambda) + \ln(e^{-\lambda t})) dt \\&= \int_0^{+\infty} (\lambda \ln \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t}) dt \\&= \ln \lambda \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt - \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt \\&= \ln \lambda \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t) dt}_{=1} - \lambda \underbrace{\int_0^{+\infty} t f(t) dt}_{=\frac{1}{\lambda}}\end{aligned}$$

On constate que $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ converge absolument et par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}H(x) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt = - \left(\ln \lambda \times 1 - \lambda \times \frac{1}{\lambda} \right) \\&= -\ln \lambda + 1\end{aligned}$$

$$\text{On a } \underline{H(X) = 1 - \ln \lambda}$$

9. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

a) D'après le cours $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

On reconnaît que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt = E(X^2)$

On d'après König-Huygens :

$$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + m^2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt = \sigma^2 + m^2$

b) X admet une entropie $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ \phi(t) dt$ converge absolument.

$$\text{On } \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-m}{\sigma} \right)^2} \right) dt$$

$$\begin{aligned} \text{On } h \circ \phi(t) &= \phi(t) \left(\ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) + \ln \left(e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-m}{\sigma} \right)^2} \right) \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) \phi(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 - 2mt + m^2}{\sigma^2} \right) \phi(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ \phi(t) dt &= \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt}_{=1} - \frac{1}{2\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt}_{=\sigma^2 + m^2} \\ &\quad + \frac{m}{\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t \phi(t) dt}_{=m} - \frac{m^2}{2\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt}_{=1} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h_0 \phi(t) dt$ converge absolument et donc :

X admet une entropie :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h_0 \phi(t) dt$$

$$= - \left(-\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \times 1 - \frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^2 + m^2) + \frac{m^2}{\sigma^2} - \right.$$

$$\left. \frac{m^2}{2\sigma^2} \times 1 \right)$$

$$= \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2} + \frac{m^2}{\sigma^2} + \frac{m^2}{2\sigma^2}$$

$$= \ln((\sigma^2 2\pi)^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} + \frac{m^2}{\sigma^2}$$

$$\text{D'où } H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2} + \frac{m^2}{\sigma^2} \text{ (incohérence)}$$

Exercice 1:

1.

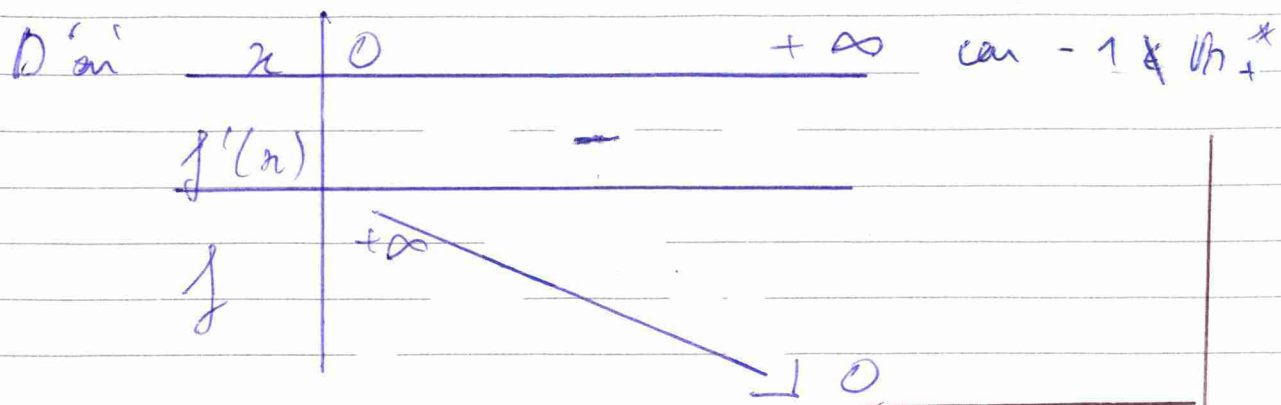
a) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée et quotient de fonctions dérivables avec $x \neq 0$, $\forall x > 0$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f'(x) &= \frac{-e^{-x} \times x - 1 \times e^{-x}}{x^2} \\ &= \frac{-(1+x)e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, f'(x) > 0 \Leftrightarrow -(1+x) > 0$$

$$\text{Car } e^{-x} > 0, \forall x > 0 \text{ et } x^2 > 0, \forall x > 0$$

$$\text{Ainsi } -(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1$$



$$\circ \lim_{0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times e^{-x} = +\infty \times e^0 = \underline{+\infty} \text{ par produit}$$

$$\circ \lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = \underline{0} \text{ par croissances comparées}$$

b) On cherche à montrer par récurrence la propriété: " u_n est définie et $u_n > 0$ " pour tout $n \geq 0$.

* $u_0 = 1$ donc u_0 est défini et $u_0 > 0$

la propriété est vraie pour $n = 0$

* Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n \geq 0$
montrons que " u_{n+1} est défini et $u_{n+1} > 0$ "

Par hypothèse u_n existe et $u_n > 0$

donc $f(u_n) = \frac{e}{u_n}$ existe donc u_{n+1} est bien défini

Et $f(u_n) = u_{n+1} > 0$ car $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

* Ainsi pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et $u_n > 0$

2.

a)

def fonct. $\gamma(a)$:

20/21

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 236	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématique appliquées / Em Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

```
from numpy import exp
```

```
u = 1
```

```
n = 0
```

```
while u <= a :
```

```
    u = exp(-u) / u
```

```
    n = n + 1
```

```
return n
```

b)

```
def fenc_2(a):
```

On en déduit que $u_6 > 10^{-6}$

Et que $u_5 \geq 10^{-6}$

c)

```
def u(n):
```

```
    for m in range(1, n+1):
```

```
        u = 1
```

```
        u = exp(-u) / u
```

```
    return u
```

3.

a) la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme

somme et composée de fonctions dérivables et:

$$\forall n \geq 0, g'(n) = -e^{-n} - 2n$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall n > 0, g'(n) > 0 &\Leftrightarrow -e^{-n} - 2n > 0 \\ &\Leftrightarrow -e^{-n} > 2n \\ &\Leftrightarrow -\frac{e^{-n}}{n} > 2 \\ &\Leftrightarrow -f(n) > 2 \end{aligned}$$

Or $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+^*$ donc $-f(n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}_+^*$

donc	x	0	$+\infty$
	$g'(x)$		-
	g	1	$-\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - x^2 = 0 - \infty = -\infty \text{ par somme}$$

$$\bullet g(0) = e^0 - 0 = 1$$

Comme g est dérivable (donc continue) et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $g(\mathbb{R}_+) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} g; g(0)] =]-\infty; 1]$

Donc g réalise bien une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 1]$.

b) Comme $0 \in]-\infty; 1]$ l'équation $g(n) = 0$

$$(\Leftarrow) e^{-n} - n^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-n} = n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-n}}{n} = n$$

$$\Leftrightarrow f(n) = n$$

admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$
car f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

c) On a pas de valeur de x mais on sait que
 $g(\alpha) = 0$

$$\text{On } g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^2 \approx e^{-\frac{1}{2,7}} - \frac{1}{(2,7)^2}$$

$$\approx \frac{1}{(2,7)^{2,7}} - \frac{1}{(2,7)^2} > 0$$

$$\text{et } g(1) = e^{-1} - 1^2 = \frac{1}{e} - 1 \approx \frac{1}{2,7} - 1 < 0$$

$$\text{d'où } g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$$

et par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\underline{1 > \alpha > \frac{1}{e}}$$

4.

$$a) f(u_0) = f(1) = e^{-1} = u_1 < 1$$

On a donc $u_1 < u_0$

$$\text{Ainsi } f(u_1) = \frac{e^{e^{-1}}}{e^{-1}} = e^e > 1 = u_0$$

$$\text{D'où } \underline{u_2 > u_0}$$

b) On cherche à montrer par récurrence que la propriété " $u_{2m+2} \geq u_{2m}$ " est vraie pour tout $m \geq 0$

* $u_2 > u_0$ donc la propriété est vraie pour $m=0$
d'après 4.a)

* Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $m \geq 0$,
montrons alors que : " $u_{2m+4} \geq u_{2m+2}$ "

Par hypothèse : $u_{2m+2} \geq u_{2m}$

donc $f \circ f(u_{2m+2}) \geq f \circ f(u_{2m})$ par stricte croissance
de la composée $f \circ f$ sur $\mathbb{R}^+$

donc $u_{2m+4} \geq u_{2m+2}$

* $\forall m \geq 0, u_{2m+2} \geq u_{2m}$

Donc la suite $(u_{2m})_{m \geq 0}$ est croissante.

$$c) \underbrace{f(u_2)}_{=u_3} = f(e^e) = \frac{e^{-e}}{e^e} = e^{-2e} < e^{-1} = u_1$$

Donc on a $u_1 \geq u_3$

On cherche à montrer par récurrence que la propriété " $u_{2m+3} \leq u_{2m+1}$ " est vraie pour tout $m \geq 0$.

* $u_3 \leq u_1$ donc la propriété est vraie pour $m=0$

* Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $m \geq 0$

Par hypothèse : $u_{2m+3} \leq u_{2m+1}$

Donc $f \circ f(u_{2m+3}) \leq f \circ f(u_{2m+1})$
Donc $u_{2m+5} \leq u_{2m+3}$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\forall n \geq 0, u_{n+3} \leq u_{2n+1}$$

Ainsi la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante

Comme la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 car $u_n > 0$ d'après 1.6, d'après le théorème de la limite monotone la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ converge vers un réel $l \geq 0$

$$l \in [0; 1]$$

5.

$$a) \forall n > 0,$$

$$h(n) = f\left(\frac{e^{-n}}{n}\right) = \frac{\frac{e^{-n}}{n}}{\frac{e^{-n}}{n}} = \frac{-\frac{e^{-n}}{n}}{-\frac{e^{-n}}{n} + 1} \times e^n = \frac{-e^{-n} + 1}{n} \times e^n$$

b) L'équation la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composée, quotient, somme et produit de fonctions continues ($x \neq 0$)

$$\text{Continuité en } 0: \lim_{n \rightarrow 0^+} h = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-n} + 1}{n} \times e^n$$

$$0, \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-n} + 1}{n} = 0 \text{ par développements complétés}$$

par conséquent $\lim_{0^+} h = 0 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$
 par produit

$$\text{Dere } \lim_{0^+} h = 0 = h(0)$$

h est continue en 0

Dere h est continue sur $\mathbb{R}_+$

c) Etant donné que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ par composition.

Ainsi h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ (S.b) donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $h(\mathbb{R}_+) = [h(0); \lim_{+\infty} h]$

On $\lim_{+\infty} h = +\infty$ par règles opératoires et croissances comparées

$$\text{Dere } h(\mathbb{R}_+) = [0; +\infty[$$

lemme

On admet S.c)

S.d) On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n+1}) = l \in [0; 1]$

On h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc h est continue en $l \in \mathbb{R}_+$.

De ce fait l est un point fixe de h , c'est-à-dire que l vérifie : $h(l) = l$

On d'après 5c) l'équation admet deux solutions α et 0

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = \alpha \quad \text{car } \alpha \in [0; 1] \text{ et } \alpha > 0$$

6. Supposons que $(u_n)_{n \geq 0}$ soit majorée (raisonnement par l'absurde)

Alors d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers un réel $l_2 \leq 1$ avec 1 le majorant de (u_n) et $l_2 \geq 1$ car (u_n) est minorée par u_0

Comme $l_2 \in \mathbb{R}^+$ alors h est continue en l_2
donc l_2 est un point fixe de $h \Leftrightarrow$
 $h(l_2) = l_2$

Or si $l_2 \geq 1$ alors l'équation n'admet pas de résultat donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'admet pas de limite

$(u_n)_{n \geq 0}$ diverge et comme $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$$

