

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

MA-00086
812639
Maths E



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées - EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3:

$$\begin{aligned} 1. a) \lambda \in Sp(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b - \lambda)(b - \lambda) - 1 \times 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (b - \lambda)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b - \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow b = \lambda \end{aligned}$$

Ainsi si $a = b$ alors $Sp(A) = \{b\}$

b) Supposons que A soit diagonalisable, il existe donc des matrices $D = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = bI_2$ et P , inversible, tels que :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \Leftrightarrow bI_2 = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow bP = AP \\ &\Leftrightarrow bI_2 = A \text{ (absurde)} \end{aligned}$$

On en déduit que si $a = b$ alors A n'est pas diagonalisable

2.

~~$$\begin{aligned} a) \lambda \in Sp(A) &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - \lambda)(b - \lambda) - 1 \times 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow ab - a\lambda - b\lambda + \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(-a-b) + ab = 0 \end{aligned}$$~~

$$\Delta = \cancel{(-a-b)^2 - 4 \times 1 \times (ab)}$$

A est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux (cans)

$$\underline{\text{Sp}(A) = \{a; b\}}$$

$$b) \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et que a est valeur propre de A alors

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre a .

$$\cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-a \\ b(b-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \neq 0$ et que b est valeur propre de A alors

$\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre b .

c) B est une base de $\Pi_{2,1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_u, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}}_v \right)$ est libre
car $\text{card}(u, v) = 2 = \dim \Pi_{2,1}(\mathbb{R})$

Supposons qu'il existe λ et μ des réels tels que
 $\lambda u + \mu v = 0$

Montrons que $\lambda = \mu = 0$

Par hypothèse : $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu(b-a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Ainsi la famille (u, v) est libre, B forme donc une base de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$.

On en déduit que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$$

d) Soit $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$$AP = PD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y(b-a) \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients, $x = a$ et $y = b$

Donc $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

D'après 2.c) B forme une base de $\mathbb{R}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A d'après 2.b)

On en déduit que A est diagonalisable, et d'après ce qui précède, il existe donc :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ diagonale et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

tels que $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

3.

$$a) X \hookrightarrow \mathcal{Y}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{Y}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Donc } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$\forall m \geq 1$, $\{X=m\}$, $m \geq 1$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=Y) = \sum_{m \geq 1} P((X=m) \cap (Y=m))$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} P(X=m) \cap (Y=m)$$

$$P(X=Y) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(X=m)P(Y=m) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

$$b) \text{ Donc } P(X=Y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-1} \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \times \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \times \frac{1}{4}$$

Posons $m = n - 1$

$$P(X=Y) = \frac{1}{4} \times \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m$$

On reconnaît une série géométrique d'ordre première

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées - EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
Convergente car $\frac{1}{2} < 1$. 1) on $P(X=Y) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ 4. a) D'après ce qui précède (1.b) et 2.d)) A n'est pas diagonalisable si et seulement si $a = b$ Donc $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable $\Leftrightarrow X=Y$ Et d'après 3.b) la probabilité que $(X=Y)$ vaut $\frac{1}{3}$ Donc <u>$A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable pour $p = \frac{1}{3}$</u> b) Comme i correspond à la fréquence de fois où $X \neq Y$ au cours de m épreuves indépendantes, pour un m très grand i s'approche de $\frac{2}{3}$ qui est la probabilité que A soit diagonalisable $(1 - \frac{1}{3})^3$ <u>Problème</u> <u>Partie I</u> 5/20			

1. (i) la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ car :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x < 1 : f(x) = 0 \geq 0 \\ \text{et} \end{array} \right.$$

$$\forall x \geq 1 : f(x) = \frac{c}{x^{1+c}} \geq 0 \text{ car } c > 0 \text{ et } x \geq 1$$

(ii) la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 car :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x < 1 : f \text{ est la fonction nulle et donc continue sur }]-\infty; 1[\\ \text{et} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x > 1 : f \text{ est continue sur }]1; +\infty[\text{ par composée} \\ \text{et quotient de fonctions continues avec } x^{1+c} \neq 0 \end{array} \right.$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ car } \forall x < 1, f(x) = 0$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{1}{tc} \right]_1^t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t^c} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^c} \right) = 0 \text{ par quotient car } c > 0$$

D'après (i) (ii) et (iii) la fonction f est une densité de probabilité

$$2. \forall n \in \mathbb{R}, F(n) = \int_{-\infty}^n f(t) dt$$

• 1^{er} cas : si $x < 1$ alors $F(n) = \int_{-\infty}^n 0 dt = 0$

• 2^{ème} cas : si $x \geq 1$ alors

$$F(n) = \int_{-\infty}^n f(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^n \frac{c}{t^{1+c}} dt = \left[-\frac{1}{t^c} \right]_1^n$$

$$= 1 - \frac{1}{n^c}$$

Ainsi pour tout réel x ,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

3.

a) $\forall t > 1$

1^{er} cas : $x < 1$

$P_{X>t}(X \leq tn) = 0$ car l'événement $(X \leq tn)$ est impossible si $(X > t)$ est réalisé sachant que $x < 1$.

2^{ème} cas : $x \geq 1$

$$P_{X>t}(X \leq tn) = \frac{P([X > t] \cap [X \leq tn])}{P(X > t)}$$

$$= \frac{P(t < X \leq tn)}{1 - P(X \leq t)}$$

$$= \frac{F(tn) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$P_{(X>t)}(X \leq tk) = \frac{1 - \frac{1}{(tk)^c} - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{t^c k^c}}{\frac{1}{t^c}}$$

$$P_{(X>t)}(X \leq tk) = 1 - \frac{1}{k^c}, \quad \forall t > 0, \forall k \geq 1$$

Pour tout réel t :

$$P_{(X>t)}(X \leq tk) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 1 \\ 1 - \frac{1}{k^c} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

b) D'après 3 a) et 2. b) On remarque qu'en posant $Z = \frac{X}{t}$, avec Z la fonction de répartition, on a: $\forall n \in \mathbb{R}, Z(n) = P(Z \leq n) = P$

On pose $Z = \frac{X}{t}$ la loi de $\frac{X}{t}$ conditionnellement à l'événement $t (X > t)$

Soit $Z(n)$, une fonction de répartition de Z

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{R}, Z(n) &= P(Z \leq n) \\ &= P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq n\right) \\ &= P_{(X>t)}(X \leq tn) \quad \text{car } t > 0 \end{aligned}$$

et d'après 3. a), on a:

$$\forall n \in \mathbb{R}, Z(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ 1 - \frac{1}{n^c} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = F(n)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Probabilités appliquées - EDNEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Ainsi la loi de X conditionnellement à l'événement $(X > t)$ est la loi t de X .

Partie II

$$4. G(1) = \int_{-\infty}^1 g(t) dt$$

On $\forall t \leq 1 : g(t) = 0$ (évidence)

$$\text{Donc } G(1) = \int_{-\infty}^1 0 dt = 0$$

5.

a) Comme X conditionnellement à l'événement $(X > t)$ est de même loi t que X alors :

$$\begin{aligned} \forall t > 1, \forall n \geq 1, G(n) &= P(X \leq n) \\ &= P_{(X > t)} \left(\frac{X}{t} \leq n \right) \\ &= P_{(X > t)} (X \leq tn) \text{ car } t > 1 \\ &= \frac{P([X > t] \cap [X \leq tn])}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(t < X \leq tn)}{1 - P(X \leq t)} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \geq 1$, et $t > 1$,

$$G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

b) G est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ comme somme, composée et quotient de fonctions de classe C^1 (car G est une fonction de répartition) avec $1 - G(t) \neq 0$, $\forall t > 1$, $\forall x > 1$

$\forall x > 1, \forall t > 1$,

$$G'(x) = \frac{(G'(tx) - G'(t))(1 - G(t)) + G'(t)(G(tx) - G(t))}{(1 - G(t))^2}$$

$$= \frac{(t G'(tx) - G'(t))(1 - G(t)) + G'(t)G(tx) - G'(t)G(t)}{(1 - G(t))^2}$$

$$= \frac{t G'(tx) - G'(t) - t G'(tx)G(t) + G'(t)}{(1 - G(t))^2}$$

$$= \frac{t G'(tx) (1 - G(t))}{(1 - G(t))^2}$$

$$G'(t) = \frac{t G'(tx)}{1 - G(t)}$$

Veuillez former sup

↪

c) $\forall t > 1$,

$$G(t) + \frac{k}{c} G'(t) = \frac{G(t^2) - G(t)}{1 - G(t)} + \frac{k}{c} \left(\frac{t G'(t^2)}{1 - G(t)} \right) \text{ d'après Sa/b)}$$

$$= \frac{(G(t^2) - G(t))c + t^2 G'(t^2)}{c(1 - G(t))}$$

$$= \frac{P(t^2 < X < t) + t^2 G'(t^2)}{1 - G(t) \quad c(1 - G(t))}$$

$$= \frac{c(P(t < \frac{t}{t^2} < 1) + t^2 G'(t^2))}{c(1 - G(t))}$$

$$= \frac{c(G(1) - G(t)) + t^2 G'(t^2)}{c(1 - G(t))}$$

$$= \frac{-c G(t) + t^2 G'(t^2)}{c(1 - G(t))}$$

admettre

6)

a) y est solution de $(E_1) \Leftrightarrow y + \frac{k}{c} y' = 0$

On $\forall t > 1$, $z(t) = t^c y(t) \Leftrightarrow y(t) = \frac{z(t)}{t^c}$

Donc y solution de $(E_1) \Leftrightarrow \frac{z(t)}{t^c} + \frac{k}{c} \times \left(\frac{z(t)}{t^c} \right)' = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{z(t)}{t^c} + \frac{k}{c} \times \frac{z'(t) - \frac{c z(t)}{t}}{t^c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(t)}{t^c} + \frac{z'(t)}{c t^{c-1}} - \frac{z(t)}{t^c} = 0$$

On cette expression est nulle si et seulement si $z(t) = h$ avec h une constante pour tout $t > 1$

$$b) \forall t > 0, y(t) = \frac{K}{t^c}$$

D'après ce qui précède l'ensemble des solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme :

$$y: t \mapsto \frac{K}{t^c}, \quad \forall K \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \forall c > 0$$

c) 1 est une solution constante de l'équation différentielle (E_2) car 1 est dérivable et :

$$1 + \frac{K}{c} \times (1)' = 1 + \frac{K}{c} \times 0 = 1$$

Donc 1 vérifie $y + \frac{K}{c} y' = 1$

Ainsi on pose $u = 1$

$$d) h \text{ solution de } (E_2) \Leftrightarrow h + \frac{K}{c} h' = 1$$

$$\Leftrightarrow h - 1 + \frac{K}{c} h' = 0$$

$$\Leftrightarrow h - 1 + \frac{K}{c} h' - \frac{K}{c} \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (h - u) + \frac{K}{c} (h' - u') = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{h - u \text{ est solution de } (E_1)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 238

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées - EDMEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

e) D'après 6 b) et 6 d) comme l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont des fonctions $\forall t > 1$, $y(t) = \frac{K}{t^c} = \frac{K}{t^c} + 1 - 1$

Alors d'après 6 d) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_c) sont les fonctions de la forme

$$h: t \mapsto \frac{K}{t^c} + 1, \quad \forall t > 1, \quad \forall K \in \mathbb{R}, \quad \forall c > 0$$

7.

a) On sait d'après 5-c) que $G(t)$ est solution de (E_c) donc $G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}, \quad \forall t \geq 1$

On d'après 4. $G(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{K}{1^c} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + K = 0$$

$$\Leftrightarrow K = -1$$

Donc pour tout $t > 1$, $G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$

Veuillez signer svp $\hookrightarrow$

Comme $\forall t < 1, G(t) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{K}{1^c} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + K = 0$$

$$\Leftrightarrow K = -1$$

On a par tout $t > 1, G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$

b) Pour $t = 1$ on a: $G(1) = 0$ d'après 4.

$$\Leftrightarrow G(1) = 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow G(1) = 1 - \frac{1}{1^c}$$

La relation est donc toujours vraie pour $t = 1$.

Ainsi $G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}, \forall t \geq 1$.

$$\text{Et } \forall t \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Car la densité de X qui est g est nulle $\forall t \in]-\infty; 1[$ donc $G(x) = 0, \forall x \in]-\infty; 1[$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi de Pareto de paramètre $c > 0$. (Partie I)

X suit donc une loi de Pareto de paramètre c .

Partie III

8.

$$\begin{aligned} a) \forall x \in \mathbb{R}, H(x) &= P(Z \leq x) \\ &= P(\ln(X) \leq x) \\ &= P(X \leq e^x) \end{aligned}$$

$$\underline{H(x) = F(e^x)}$$

b) Comme x suit une loi de Pareto de paramètre $c > 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(e^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x < 1 \\ 1 - \frac{1}{e^{xc}} & \text{si } e^x \geq 1 \end{cases}$$

On $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0$ par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

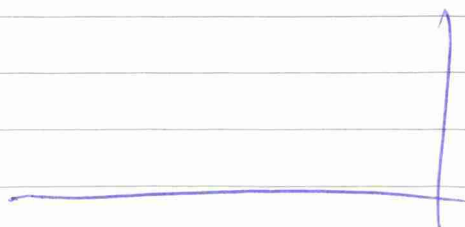
Pour tout réel x ,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $c > 0$.

$$\underline{Z \stackrel{L}{\longleftrightarrow} E(c)}$$

c)
def simul X(c):
 if



Exercice 1:

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de boucles sur les sommets donc les coefficients diagonaux sont nuls.

Le graphe est non orienté et il n'y a pas d'arêtes doubles donc il n'y a que des 0 ou des 1.

On regarde ensuite les sommets adjacents par mettre les coefficients

Si une arête relie i à j alors $a_{ij} = 1$
et comme le graphe compte 5 sommets $A \in \Pi_5(\mathbb{R})$

2.

$$a) (2-1-0-3) \text{ ou } (3-0-1-2) \\ \underline{(2-3-4-3) \text{ ou } (3-4-3-2)}$$

Il n'y a que 4 chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3.

b)

$$B = f(A, 3)$$

$$n = |B[2; 3]|$$

print(n)

3.

$$a) D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 238	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mécanismes appliqués - EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

b) $L = D - A$ (énoncé)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) la matrice L est symétrique car ${}^tL = L$ donc d'après le cours L est diagonalisable.

4.

a) $X \in \Pi_{5,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \Pi_5(\mathbb{R})$

Donc par produit de matrice $LX \in \Pi_{5,1}(\mathbb{R})$

De plus, ${}^tX \in \Pi_{1,5}(\mathbb{R})$ donc par produit de matrice

${}^tX L X \in \Pi_1(\mathbb{R})$

b)

$${}^tX L X = (a \ b \ c \ d \ e) L \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

Dens

$${}^tX L X = (a \ b \ c \ d \ e) \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$$

$$= a(2a - b - d) + b(-a + 2b - c) + c(-b + 2c - d) + d(-a - c + 3d - e) + e(-d + e)$$

$$= 2a^2 - ab - ad - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - cd - ad - ed + 3d^2 - cd - ed + e^2$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ad + d^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + (e^2 -$$

$$\underline{{}^tX L X = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2}$$

c) Comme X est un vecteur propre de L associé à une valeur propre λ , on a :

$$LX = \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}$$

$$\text{Dens } {}^tX L X = {}^tX \lambda X$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 + \lambda d^2 + \lambda e^2 = \lambda (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

On comme un carré est toujours positif ou nul, alors les valeurs propres de L sont forcément positives ou

null d'après l'égalité précédente car d'après 4.b)
 $XLX \geq 0$ (somme de carré)

$$d) \quad LU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot U$$

Comme $U \neq 0$, alors 0 est valeur propre de L

$$\lambda_1 = 0$$

5.

$$a) \quad LX = 0 \Leftrightarrow (D - A)X = 0$$

$$\Leftrightarrow DX - AX = 0$$

$$\Leftrightarrow DX = AX$$

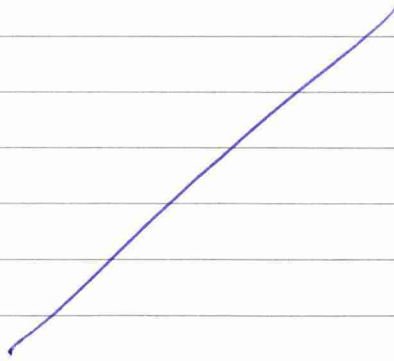
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \\ 3d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d \\ a+c \\ b+d \\ a+c+e \\ d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2c = b+d \\ 2b = a+c \\ 3d = a+c+e \\ e = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2c = b+d \\ 2b = a+c \\ 2d = a+c \\ e = d \end{cases}$$

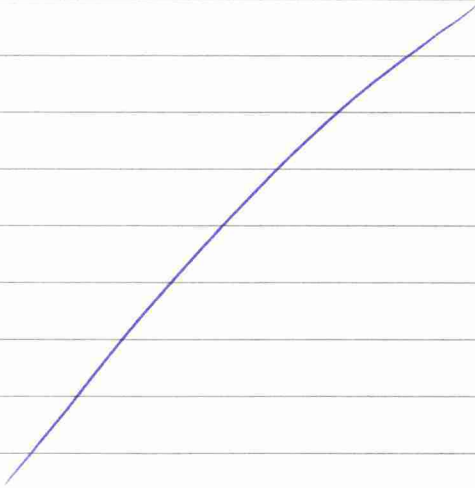
Donc $b = d = e = a = c$, ainsi $X \in \text{Vect}(U)$

c)



Exercice 2:

1.



2.



↳ Utiliser l'annexe svp

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées - EDMEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
Quilley Karim sup			
21/28			

4.

a) On cherche à montrer par récurrence que la propriété " $|u_{m+1} - u_m| \leq K^m \times |u_1 - u_0|$ " est vraie pour tout $m \geq 0$

$$* |u_1 - u_0| \leq 1 \times |u_1 - u_0| = K^0 |u_1 - u_0|$$

la propriété est vraie pour $m=0$

* Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $m \geq 0$, montrons alors que $|u_{m+2} - u_{m+1}| \leq K^{m+1} \times |u_1 - u_0|$

$$\text{Par hypothèse : } |u_{m+1} - u_m| \leq K^m |u_1 - u_0|$$

$$\text{Donc } K |u_{m+1} - u_m| \leq K^{m+1} |u_1 - u_0|$$

$$\text{On d'après (*) } \underline{|f(u_{m+1}) - f(u_m)| \leq K \times |u_{m+1} - u_m|}$$

$$= |u_{m+2} - u_{m+1}| \text{ car } f(u_m) = u_{m+1}$$

$$\text{Donc } |u_{m+2} - u_{m+1}| \leq K |u_{m+1} - u_m| \leq K^{m+1} |u_1 - u_0|$$

$$\text{Donc } |u_{m+2} - u_{m+1}| \leq K^{m+1} |u_1 - u_0|$$

$$* \underline{\forall m \geq 0, |u_{m+1} - u_m| \leq K^m |u_1 - u_0|}$$

$$b) \forall m \geq 0, 0 \leq |u_{m+1} - u_m| \leq K^m |u_1 - u_0| \text{ d'après 4.a)}$$

$$\text{On } \lim_{m \rightarrow +\infty} K^m = 0 \text{ car } |K| < 1$$

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} (|u_{m+1} - u_m|) = 0 \text{ car } |u_1 - u_0| = \ln 2$$

$$\text{Dens } 0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} K^n |u_1 - u_0|$$

$$\text{On } \sum_{n=0}^{+\infty} K^n |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \times \sum_{n=0}^{+\infty} K^n$$

$$\text{Comme } |K| < 1 \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} K^n = \frac{1}{1-K}$$

$$\text{Dens } 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{1-K}$$

D'après le théorème de l'encadrement la série de terme générale $u_{n+1} - u_n$ converge absolument

$$\text{On } S_n = \sum_{h=0}^n (u_{h+1} - u_h) = u_{n+1} - u_0 \text{ (somme télescopique)}$$

$$\text{On } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1} - u_n|$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_0) = \sum$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = a$$

c) $a \in \mathbb{R}$, or f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après 2. donc a est un point fixe de f c'est-à-dire que a

Vérifie $f(a) = a$

On l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution d'après 3!

Rem a est la seule solution de $f(x) = a$

S.

a) D'après 4. a), on a pour tout $n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|$$

Par passage à la somme les inégalités sont conservées d'où :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$$

b) Ainsi

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| = \underbrace{|u_{n+p-1+1} - u_n|}_{\text{téléscopique}} \leq |u_1 - u_0| \times \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0| \times \left(\sum_{i=0}^{n+p-1} K^i - \sum_{i=0}^{n-1} K^i \right)$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0| \left(\frac{1-K^{n+p}}{1-K} - \frac{1-K^n}{1-K} \right)$$

car $K \neq 1$

$$\Leftrightarrow \underline{|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \frac{1-K^p}{1-K} |u_1 - u_0|}$$

$$c) \text{ On } \lim_{p \rightarrow +\infty} (|u_{n+p} - u_n|) = |a - u_n|$$

Copie anonyme - n°anonymat : 812639

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages : 27	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées - EDHEC		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

$$\text{et } \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(K^m \times \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_n - u_0| \right) = \frac{K^m}{1 - K} |u_n - u_0|$$

$$\text{car } \lim_{p \rightarrow +\infty} K^p = 0$$

$$\text{D'où } |a - u_m| \leq \frac{K^m}{1 - K} \times |u_n - u_0|$$

6.

a) la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme quotient et somme de fonctions de classe C^2 avec $1 + e^k \neq 0, \forall k \in \mathbb{R}$.

$$\forall k \in \mathbb{R}, f'(k) = -\frac{e^k}{(1 + e^k)^2}$$

$$\text{et } \forall k \in \mathbb{R}, f''(k) = -\frac{e^k(1 + e^k)^2 - e^k(2e^k(1 + e^k))}{(1 + e^k)^4}$$

$$= -\frac{e^k + e^{2k} - 2e^{2k}}{(1 + e^k)^3}$$

$$= -\frac{e^k(1 - e^k)}{(1 + e^k)^3}$$

25/28

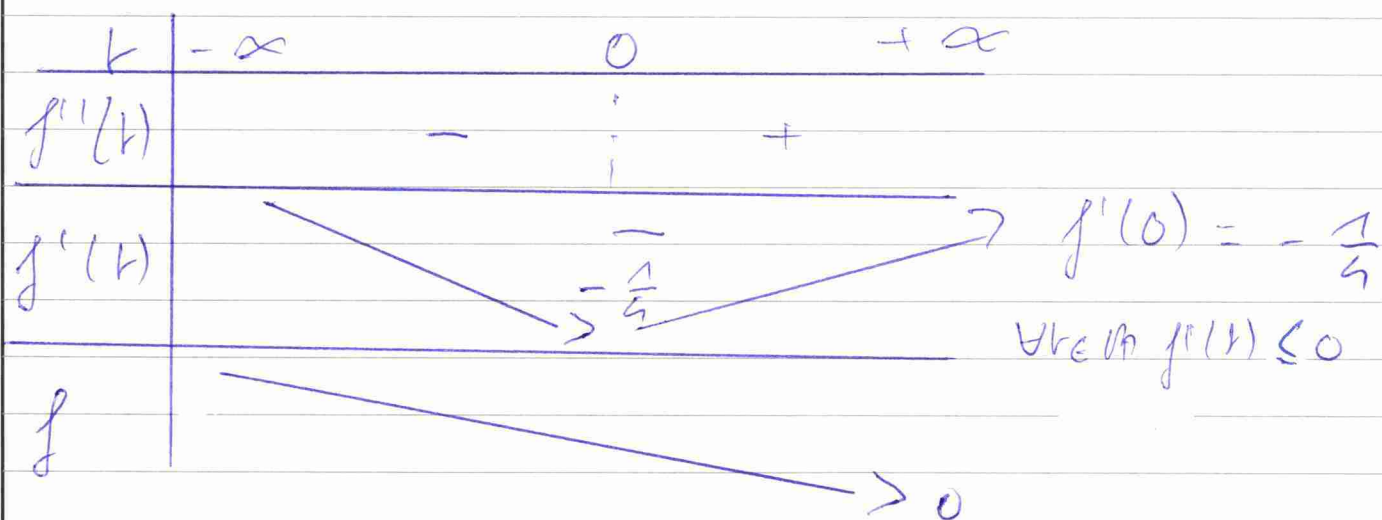
$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = \frac{e^t(e^t - 1)}{(1 + e^t)^3}$$

$$b) \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^t - 1}{(1 + e^t)^3} \geq 0 \text{ car } e^t > 0$$

$$\text{Or } e^t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0$$

$$\text{Et } 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$$



$$\text{Or } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$\forall t \in]-\infty; 0], t \leq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq f'(0) = -\frac{1}{4}$$

par décroissance de f' sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in]0; +\infty[, t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq f'(0) = -\frac{1}{4}$$

$\hookrightarrow$ suite

c) D'après 6.a), f est de classe C^1 sur B donc dérivable sur B , et $\forall x \in B$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ d'après 6.b)

Ainsi en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $x \in B$ et $y \in B$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|$$

Par conséquent f est $\frac{1}{4}$ contractante

d) admette

e)

def suite(m):

u = 0

for k in range(1, m+1):

u = 1 / (1 + mp.exp(u))

return u

f) ✓

g) def approche_a(m):
u = 0

while 4^m < 20003:

