Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Z7-00280
225267
Maths S

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EMlyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1.a. Soit $t \in [k, k+1]$.

On a $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$

Cette inégalité est vraie $\forall t \in [k, k+1]$.

Donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1-k)}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{k+1-k}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

1.b. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ en faisant un changement d'indice, et par la relation de Chasles

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$$

1.c. Soit $n \geq 2$.

On a $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln(n)$

donc par 1.b., $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$

. $S_n - 1 \leq \ln(n) \Rightarrow S_n \leq \ln(n) + 1$
. $S_n - \frac{1}{n} \geq \ln(n) \Rightarrow S_n \geq \frac{1}{n} + \ln(n)$

. Ainsi, on a $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$, et ce $\forall n \geq 2$.

1.d. Soit $n \geq 2$.

. Par 1.c., $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ car $\ln(n) > 0$

. $\lim\limits_{+\infty} n\ln(n) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = 1$
. $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$

. Par encadrement, $\lim\limits_{+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$, donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2.a. rang(50) retourne le plus petit entier naturel n pour lequel on a $S_n \geq 50$ (on a donc $S_n \geq 50$ et $S_{n-1} < 50$).

. En effet, tant que $s = 1 < 50$, ~~alors~~ la fonction ajoute à s $\frac{1}{k}$, où k est d'abord égal à 2, puis à 3, ... Et quand $s \geq 50$, alors la fonction retourne k, sachant qu'on a alors $s = S_k$.

3.a. $\sum\limits_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t^k$

$= \frac{1 - t^{n-1+1}}{1-t}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\,dt$$ car $t \mapsto -\ln(1-t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$

$$= \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt$$ par 3.a.

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt$$ par linéarité de l'intégrale.

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x$$

$-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$.

$t \in [0, x] \Rightarrow 0 \leq t \leq x$

$\Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 - t$

$\Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 - t$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ car $y \mapsto \frac{1}{y}$ est $\searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$, et ce $\forall t \in [0, x]$

D'où $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\,dt$

Or, $\frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$

$$= \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$x \in]0, 1[$, donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\,dt = 0$.

Par encadrement, on a bien $\lim \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

3.d. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

Or, quand $n \to +\infty$, par 3.c., le membre de droite converge vers $-\ln(1-x)$.

Le membre de droite converge, donc il en va de même pour le membre de gauche : il converge aussi.

Puisqu'il y a égalité entre les deux membres, on a alors ~~que~~ :
$\lim\limits_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + 0$

Cela signifie que $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et qu'on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Problème

Préliminaire

1. $\dim E = n$

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \Rightarrow \dim E^* = \dim E \times \dim \mathbb{R}$

$= n \times 1$

$\dim E^* = n = \dim E$

2.a. $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{rg} \varphi \leq \dim \mathbb{R} = 1$

. ~~En tant que sous-espace vectoriel,~~
. Par la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel, $\operatorname{rg} \varphi \geq 0$ et $\operatorname{rg} \varphi \in \mathbb{N}$.

. Donc on a $\operatorname{rg} \varphi \in [\![0, 1]\!]$.

2.b. Si $\operatorname{rg} \varphi = 0$:
Alors $\operatorname{Im} \varphi = \{0\}$, ce qui signifie donc que φ est nulle

. Si $\operatorname{rg} \varphi = 1$:
Alors $\operatorname{rg} \varphi = \dim \mathbb{R}$, et comme $\varphi : E \to \mathbb{R}$, φ est donc surjective.

. Comme $\operatorname{rg} \varphi \in [\![0, 1]\!]$, φ est donc soit nulle, soit surjective

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 21	Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EMlyon bs

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2.c. φ n'est pas l'application nulle $\Rightarrow rg\,\varphi \neq 0$.
Donc $rg\,\varphi = 1$.

. Par le théorème du rang, $\dim E = rg\,\varphi + \dim \ker \varphi$

$\Leftrightarrow n = 1 + \dim \ker \varphi$
$\Leftrightarrow \dim \ker \varphi = n - 1$

. Donc $\ker \varphi$ est un hyperplan de E car $\dim \ker \varphi = \dim E - 1$

Partie 1

3.a. $g : E \to \mathbb{R}$

. $\forall (P_1, P_2) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$g(P_1 + \lambda P_2) = \int_0^1 (P_1 + \lambda P_2)(t)dt$
$= \int_0^1 (P_1(t) + \lambda P_2(t))dt$
$= \int_0^1 P_1(t)dt + \lambda \int_0^1 P_2(t)dt$

. $g(P_1 + \lambda P_2) = g(P_1) + \lambda g(P_2)$ donc g est linéaire.

. En conclusion, $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ i.e. $g \in E^*$.

3.b. Soit $P(X) = 1$, $P \in \mathbb{R}_p[X]$.
$g(P) = \int_0^1 1dt$
$= 1$
Donc $1 \in \operatorname{Im} g \Rightarrow \operatorname{Im} g \neq \{0\}$, g n'est pas nulle.

. Par le préliminaire, $\dim \ker g = \dim \ker E - 1$

$= p + 1 - 1$

$\dim \ker g = p$

3.c. $\operatorname{card}(Q_1, \dots, Q_p) = p = \dim \ker g$.

. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$g(Q_k) = \int_0^1 (x^k - \frac{1}{k+1})\,dx$

$= [\frac{x^{k+1}}{k+1}]_0^1 - \frac{1}{k+1}$

$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}$

$g(Q_k) = 0$

Donc $Q_k \in \ker g$, et ce $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

Ainsi, on a $\operatorname{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \ker g$.

~~Avec 1., on a donc $\operatorname{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) = \ker g$.~~

~~. $(Q_1, \dots, Q_p)$ est génératrice de $\ker g$.~~

~~De plus $\operatorname{card}(Q_1, \dots, Q_p) = \dim \ker g = p$.~~

. $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\deg Q_k = k$

$(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre par degrés échelonnés, et est génératrice de $\operatorname{Vect}(Q_1, \dots, Q_p)$.

Donc c'en est une base.

Ainsi, $\dim \operatorname{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) = p = \dim \ker g$.

Comme $\operatorname{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) \subset \ker g$, on a alors :

$\operatorname{Vect}(Q_1, \dots, Q_p) = \ker g$.

. Ainsi, $(Q_1, \dots, Q_p)$ est génératrice de $\ker g$, et est libre par degrés échelonnés.

Donc $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\ker g$.

4.a. $f : E \to \mathbb{R}$

$\forall (P_1, P_2) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:
$f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(0)$
$= \lambda P_1(0) + P_2(0)$
$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$ donc f est linéaire

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ donc $f \in E^*$

4.b. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$.
$f(P) = P(0) = 0$ donc 0 est racine de P.

. $P \in \operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_p[X] \Rightarrow \exists (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $P = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$

Puis, comme $P(0) = 0$, on a $P = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X^k$ car $\alpha_0 = 0$.
Donc $P \in \operatorname{Vect}(X, \dots, X^p)$.
D'où $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Vect}(X, \dots, X^p)$.

. Réciproquement, $\forall P \in \operatorname{Vect}(X, \dots, X^p)$, $f(P) = 0$. $\operatorname{Vect}(X, \dots, X^p) \subset \operatorname{Ker} f$.

. Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, \dots, X^p)$

5.a. f et g sont non nuls, donc par le préliminaire, $\dim \operatorname{Ker} g = n-1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = n-1$.
Donc $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Ker} f$.
Comme on a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$, on obtient donc :
$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

5.b. f est non nul, donc $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$.
~~Donc $\exists y \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}^*$.~~
Soit $y \in \operatorname{Im} f \setminus \{0\}$. $y \in \mathbb{R}^*$.
Ainsi, $\exists x_0 \in E$, $f(x_0) = y$.

. $x_0 \in E$, et $f(x_0) = y \neq 0$, donc $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$.
Donc $\exists x_0 \in E / x_0 \notin \operatorname{Ker} f$.

5.c. Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$.

Donc $f(x) = 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda x_0$

Ainsi, $f(x) = 0 \Rightarrow \lambda f(x_0) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ car $f(x_0) \neq 0$

Donc $x = \lambda x_0 = 0$.

On a $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0\}$.

. On a $\dim \ker f = n-1$.

. (x_0) est génératrice de $\mathrm{Vect}(x_0)$, et de plus, $x_0 \neq 0$, car sinon on aurait $f(x_0) = 0$ et donc $x_0 \in \ker f$, ce qui serait absurde.

Donc (x_0) est libre.

C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(x_0)$.

D'où $\dim \mathrm{Vect}(x_0) = 1$.

On a alors $\dim(\mathrm{Vect}(x_0)) + \dim(\ker f) = n = \dim E$.

. En conclusion, on a donc $E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$.

5.d. Soit $x \in E$.

$\exists! (x_1, x_2) \in \ker(f) \times \mathrm{Vect}(x_0) \,/\, x = x_1 + x_2$, par 5.c.

$x_2 \in \mathrm{Vect}(x_0) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x_2 = \lambda x_0$

$x_1 \in \ker f \Rightarrow x_2 \in \ker g$ par 5.a.

. $h(x) = g(x_0) f(x) + f(x_0) g(x)$

$= g(x_0) f(x_1) + \lambda g(x_0) f(x_0) - \lambda f(x_0) g(x_0) - f(x_0) g(x_1)$ car $(f,g) \in (E^*)^2$

$= g(x_0) f(x_1) - f(x_0) g(x_1) + 0$

$h(x) = 0$ car $x_1 \in \ker f \cap \ker g$

Ceci est vrai $\forall x \in E$, donc h est nulle.

5.e. E^* étant un sous-espace vectoriel, et comme $(f,g) \in (E^*)^2$, $h \in E^*$.

Donc $h = 0_{E^*} \Leftrightarrow f(x_0) g = g(x_0) f$.

. $x_0 \notin \ker f \Rightarrow f(x_0) \neq 0$.

De même, $x_0 \notin \ker g$ car $\ker f = \ker g$, donc $g(x_0) \neq 0$.

Ainsi, on a $g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f$ et $f = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g$. Posons $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, $\lambda \neq 0$

. Donc les formes linéaires f et g sont colinéaires : $f = \lambda g$, avec $\lambda \neq 0$.

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 21	**Session :** 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EMLyon bs

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6.a. $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H, donc cette famille est libre.
$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i \in E$.
Donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre de E.

. Par le théorème de la base incomplète, cette famille peut être complétée en une base de E.
Comme $\dim E = n$, cette base sera de cardinal n.
Or, $\mathrm{card}((e_1, \dots, e_{n-1})) = n-1$.
Donc $\exists e_n \in E$, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace vectoriel E par le théorème de la base incomplète.

6.b. Soit $x \in E$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i)$ car φ est linéaire

$= \lambda_n \varphi(e_n)$

$\varphi(x) = \lambda_n \in \mathbb{R}$, donc $\varphi : E \to \mathbb{R}$
Ainsi, on a bien $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, la définition de φ est correcte.

. Soit $x \in \ker \varphi$
$\ker \varphi \subset E$, donc $x \in E$, donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$
Ainsi, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_n \varphi(e_n) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda_n = 0.$
Donc $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$, donc $x \in H$.
Ainsi, $\ker \varphi \subset H$.

De plus, la réciproque est vraie : $H \subset \operatorname{Ker} \varphi$, car $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$.
Donc $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

7. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$.

$f(x) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], f_i(x) = 0$
$\Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], x \in \operatorname{Ker} f_i$
$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$

Donc $\operatorname{Ker} f \subset \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$

. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$, on a bien $f(x) = 0$.
Donc $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f$.

. Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$

8.a. f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^p, \exists x \in E, f(x) = y$, car $f : E \to \mathbb{R}^p$.

En particulier, on a pour ε_1, comme $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$:
$\exists x \in E$, $f(\varepsilon_1) = x$.
Donc ε_1 admet un antécédent x par f.

8.b. En itérant le processus $p-1$ fois, à partir de 8.a., on a :
$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists x_i \in E, f(x_i) = \varepsilon_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème coordonnée}}}{1}, 0, \dots, 0)$

. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1} / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j = 0$.

. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
$f(x_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, donc $\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}, f_j(x_i) = 0$ et $f(x_i) = 1$
$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j(x_i) = 0$

$\Rightarrow \lambda_i f_i(x_i) = 0$
$\Rightarrow \lambda_i = 0$.

Tourner svp

Tourner svp
(suite en page 13)

Tourner svp

Tourner svp

Tournez svp (suite en page 13)

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 21 | Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EMLyon bs

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\lambda_i = 0$, or ceci est vrai $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.
Ainsi, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, et c'est une famille d'éléments de E^*, donc $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^*.

9.a. f n'est pas surjective $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \neq \dim E$, avec $\dim E = n$.
Or, $\ker f \subset E \Rightarrow rg\, f \leq n$.
Donc $rg\, f < n$ i.e. $m < n$.

9.b. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $\operatorname{Im} f$. C'est une famille libre de E, et $m<n$, d'où:
Par le théorème de la base incomplète, $\exists (e_{m+1}, \dots, e_n) \in E^{n-m}$, telle que $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ est une base de E.

. Posons $H = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$.
Or, $m < n \Rightarrow m \leq n-1$, donc comme $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i \in H$, on a $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $e_i \in H$.

. $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $e_i \in H$ et $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset H$ où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$.

10.a. On admet.

10.b. f est surjective $\Rightarrow rg\, f = \dim \mathbb{R}^p = p$.
Ainsi, par le théorème du rang, $n = \dim \ker f + p$.
Donc $\dim \ker f = n - p$.
Or, $\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \Rightarrow \dim \ker f = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right)$.

Donc $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)\right) = n - p$

Partie 3

11.a. On a bien $f_a : E \to \mathbb{R}$, car $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$

. $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$f_a(x + \lambda y) = \langle a, x + \lambda y \rangle$

$= \langle a, x \rangle + \lambda \langle a, y \rangle$ par bilinéarité de $\langle , \rangle$

$f_a(x + \lambda y) = f_a(x) + \lambda f_a(y)$ donc f_a est linéaire.

Donc $f_a \in E^*$.

11.c. Supposons que f_a est l'application nulle.

Alors $\forall x \in E$, $f_a(x) = 0$.

En particulier, $f_a(a) = 0 \Leftrightarrow \langle a, a \rangle = 0$

$\Leftrightarrow a = 0_E$ car $\langle , \rangle$ est défini.

Ainsi, (f_a est l'application nulle) $\Rightarrow$ ($a = 0_E$).

12.a. Soient $(a, b) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\forall x \in E$:

$\phi(a + \lambda b)(x) = f_{a+\lambda b}(x)$

$= \langle a + \lambda b, x \rangle$

$= \langle a, x \rangle + \lambda \langle b, x \rangle$

$= f_a(x) + \lambda f_b(x)$

$\phi(a + \lambda b)(x) = \phi(a)(x) + \lambda \phi(b)(x)$

Or, ceci étant vrai $\forall x \in E$, on a donc $\phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda \phi(b)$.

Et ceci est vrai $\forall (a, b) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall (a, b) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda \phi(b) \Rightarrow \phi$ est linéaire.

12.b. ϕ est linéaire donc, comme $\phi : E \to E^*$, on a :
$\phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

. Soit $a \in \ker \phi$.
$\phi(a) = 0_{E^*} \Leftrightarrow f_a = 0_{E^*}$

$\Rightarrow a = 0_E$ par 11.c.
Donc $\ker \phi \subset \{0\}$, et la réciproque étant vraie, $\ker \phi = \{0\}$.
Ainsi, ϕ est injectif.

. $\dim E = \dim E^*$ par le préliminaire.
Donc, comme $\phi : E \to E^*$, ϕ injectif $\Rightarrow$ ϕ bijectif.

. En conclusion, ϕ est ainsi un isomorphisme de E sur E^*.

12.c. (ϕ isomorphisme de E sur E^*) $\Leftrightarrow$ ($\forall \varphi \in E^*, \exists! a \in E, \phi(a) = \varphi$)

$\Rightarrow (\forall \varphi \in E^*, \exists! a \in E, \forall x \in E, \langle a, x \rangle = \varphi(x))$
Or, ϕ est bien un isomorphisme de E sur E^*.
Donc $\forall \varphi \in E^*, \exists! a \in E, \forall x \in E, \langle a, x \rangle = \varphi(x)$

13.a. $\langle , \rangle : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ car $tr : M_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

. $\forall (A, B, C) \in (M_p(\mathbb{R}))^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$\langle A, B + \lambda C \rangle = tr({}^tA(B + \lambda C))$
$= tr({}^tAB) + \lambda tr({}^tAC)$ par linéarité de la trace
$\langle A, B + \lambda C \rangle = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, C \rangle$

. $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$:
$\langle A, B \rangle = tr({}^tAB)$
$= \sum_{i=1}^{p} [{}^tAB]_{i,i}$

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} [{}^tA]_{i,k} [B]_{k,i}$

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} b_{k,i}$

$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} b_{k,i} a_{k,i}$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} [{}^tB]_{i,k} [A]_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} [{}^tB]_{i,k} [A]_{k,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} [{}^tBA]_{i,i}$$

$$= tr({}^tBA)$$

$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$

. $\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$:

$\langle A, A\rangle = tr({}^tAA)$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} (a_{k,i})^2$$

Or, $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2, (a_{k,i})^2 \geqslant 0$.

Donc $\langle A, A\rangle \geqslant 0$.

. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) / \langle A, A\rangle = 0$.

$\forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{k=1}^{p} (a_{k,i})^2 \geqslant 0$.

Donc $\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \sum_{k=1}^{p} (a_{k,i})^2 = 0$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \forall k \in [\![1,p]\!]$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], \forall k \in [\![1,p]\!], a_{k,i} = 0$

$\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow A = (0)$

De plus, $A = (0) \Rightarrow \langle A, A\rangle = 0$.

Donc $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow A = (0)$.

. $\langle\, ,\rangle$ est bien un produit scalaire.

13. b. Posons $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On a alors $E^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

. On reprend l'application ϕ de 12. C'est un isomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sur E^*, on a donc par 12.c. :

~~$\forall \varphi \in E^*, \exists ! A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = tr(A = tr({}^tAM)$.~~

$\forall \varphi \in E^*, \exists ! A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = \langle A', M\rangle = tr({}^tA'M)$.

. Soit φ une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

$\exists ! A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall M \in M_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = tr({}^tA'M)$

i.e. $\exists ! A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \forall M \in M_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = tr(AM)$ avec ${}^tA' = A$.

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EMLyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

. Donc si φ est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $\exists A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = tr(AM)$.

Exercice 2

1.a. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow U(]0,1[) \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], X_k(\Omega) \subset]0,1[$

$\Rightarrow Z_n(\Omega) \subset]0,1[$

. Soit $x \in \mathbb{R}$.

. Si $x \leqslant 0$:

Alors $F_n(x) = 0$ car $x \leqslant 0$ et $Z_n(\Omega) \subset]0,1[$

. Si $x \geqslant 1$:

Alors $F_n(x) = 1$.

. Si $x \in]0,1[$.

Alors $F_n(x) = P(\min(X_1,\dots,X_n) \leqslant x)$

$= 1 - P(\min(X_1,\dots,X_n) > x)$

$= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x])$

$= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant x])$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq x)$ par indépendance

$= 1 - (P(X_1 \geq x))^n$ par identité de loi

$= 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n$

$F_n(x) = 1 - (1-x)^n$ car $x \in]0,1[\Rightarrow P(X_1 \leq x) = x$

. En conclusion, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in]0,1[. \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Ce qui s'écrit aussi $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1.b. Par 1.a., F_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
De plus, $\lim_{0^+} F_n(x) = 0 = \lim_{0^-} F_n(x)$, et $\lim_{1^+} F_n(x) = 1 = \lim_{1^-} F_n(x)$.
Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

. F_n est C^1 sur $]-\infty, 0[$, sur $]0,1[$, et sur $]1,+\infty[$, donc F_n est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

. Ainsi, Z_n est à densité.

Soit f_n une densité de Z_n

1.c. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[, f_n(x) = F_n'(x) = 0$.

. $\forall x \in]0,1[, f_n(x) = F_n'(x)$
$= n(1-x)^{n-1}$

. ~~On pose $f_n(0) = 0$ et f_n~~

. Posons $f_n(0) = n$ et $f_n(1) = 0$, de cette manière, f_n est toujours une densité de Z_n.

. On a alors $f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où f_n est une densité de Z_n

2.

```
def varZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return min(random(n))
```

3. Soit $Z = 0$, notons la fonction de répartition de Z F.
F est C^0 sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

. Soit $x \in \mathbb{R}$.

. Si $x < 0$:
$F_n(x) = \underbrace{F(x) = 0}_{\text{et ce } \forall n \in \mathbb{N}/n \geq 2}$ donc $\lim\limits_{+\infty} F_n(x) = 0$

. Si $x > 0$:
. 1^{er} cas : $x > 1$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}/n \geq 2$, $F_n(x) = 1 = F(x)$ donc $\lim F_n(x) = F(x)$
. $2^{ème}$ cas : $x \in]0, 1]$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}/n \geq 2$, $F_n(x) = 1 - (1-x)^n$. Or, $x \in]0,1] \Rightarrow 1 - x \in [0, 1[$
$\Rightarrow \lim (1-x)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} F_n(x) = 1 = F(x)$

. En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F_n(x) \xrightarrow[+\infty]{} F(x)$
Ainsi, on a $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z = 0$.

4.b. $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow P(T_n = 0) = \frac{1}{n}$, en admettant 4.a.

. Si T_n était à densité, on aurait $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(T_n = x) = 0$.
Or, $P(T_n = 0) \neq 0$.
T_n n'est pas à densité.

4.c.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def VarT(n):
    Z = np.min(rd.random(n))
    X = rd.random()
    T = Z - X
    return T
```

5.a. T_{500} semble prendre ses valeurs dans un ensemble au plus dénombrable inclus dans $[0,1]$, comme en témoigne la figure 2, donc T_{500} semble être discrète.

5.b. Par 4.a., $P(T_{500} = 0) = \frac{1}{500}$

. Sur la figure 2, on voit que sur les 20 000 valeurs prises par T_{500}, elle a pris 50 fois la valeur 0.
Ainsi, avec la figure 2, $P(T_{500} = 0) \simeq \frac{50}{20000}$

$$\simeq \frac{5}{2\,000}$$

Or, $\frac{4}{2000} = \frac{1}{500}$, et $\frac{5}{2000}$ est relativement proche de $\frac{1}{500}$

. Donc le rectangle le plus à droite de la figure 2 est cohérent avec le résultat de 4.a.

4.a. $[Z_n = X_n] = [\inf(X_1, \dots, X_n) = X_n]$

$= [Z_{n-1} \geqslant X_n]$

$= [Z_{n-1} - X_n \geqslant 0]$

Par le lemme des coalitions, Z_{n-1} et $-X_n$ sont indépendantes.
Notons f_{X_n} une densité de X_n. $f_{X_n}(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \times 1 = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$

Donc $f_{-X_n}(x) = f_{X_n}(-x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(-x) = \mathbb{1}_{]-1,0[}(x)$

Z_{n-1} et $-X_n$ sont indépendantes, f_{-X_n} est bornée, donc par le théorème

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 21

Session : 2023

Épreuve de : Maths Approfondies EMLyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

de convolution :

$f_{T_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(x-y) f_{-X_n}(y) dy$, avec x

$= \int_{-1}^{0} f_{n-1}(x-y) dy$

$= \int_{-1}^{0} (n-1)(1-x)^{n-2} dx$

$= (n-1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751