

Copie anonyme - n°anonymat : 225267



Z7-00280
225267
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro Edhec bs

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

Partie 1:

1. $\forall x < 1, f(x) = 0$

$c > 2$ et $\forall x > 1, x^{c+1} > 0 \Rightarrow \forall x > 1, f(x) > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

f est continue sur $] -\infty, 1[$ car constante

f est continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur est non nul

Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Par les critères de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx$ converge car $c+1 > 3$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= c \int_1^{+\infty} x^{-c} dx \\ &= c \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^{+\infty}, \text{ or } \lim_{+\infty} -\frac{1}{x^{c-1}} = 0 \\ &= c \times \frac{1}{c} \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

f est donc une densité de probabilité

2. $E(X^2)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow c \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{c-1}} dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow c \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{c-1}} dx$ converge

Par les critères de Riemann, comme $c-1 > 1$, $c \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{c-1}}$ converge.

Donc $E(X^2)$ existe $\Rightarrow$ X admet une variance et une espérance.

$$E(X) = c \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^c}$$

$$= c \left[\frac{x^{1-c}}{1-c} \right]_1^{+\infty}$$

$$= -\frac{c}{1-c}$$

$$\underline{E(X) = \frac{c}{c-1}}$$

$$E(X^2) = c \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{c-1}}$$

$$= c \left[\frac{x^{2-c}}{2-c} \right]_1^{+\infty}$$

$$\underline{E(X^2) = \frac{c}{c-2}}$$

la formule de
Pan König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

$$= \frac{c(c^2 - 2c + 1) - c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c^3 - 2c^2 + c - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$\underline{V(X) = \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $X(\omega) \in [1, +\infty[$.

Si $x < 1$:

$$F(x) = 0$$

Si $x > 1$:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

$$= c \int_1^x \frac{dt}{t^{c+1}}$$

$$= c \left[\frac{t^{-c}}{-c} \right]_1^x$$

$$F(x) = 1 - x^{-c}$$

En conclusion, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

4.a. $X(\Omega) \subset [1, +\infty[\Rightarrow Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \leq 0$:

$$G(x) = 0$$

Si $x > 0$:

$$G(x) = P(\ln(X) \leq x)$$

$$= P(X \leq e^x) \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante}$$

$$= F(e^x)$$

Donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F(e^x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4.b. Par 4.a., $G(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) F(e^x)$
 $= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) (1 - e^{-cx})$

G est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0, et est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ au moins. Y est à densité, notons-en une g .

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = G'(x)$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) c e^{-cx}$$

On note $g(0) = 0$, de cette manière g est toujours une densité associée à Y .

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) c e^{-cx} \Rightarrow \underline{Y \hookrightarrow E(c)}$

4. c.

```
from math import *  
def simulX(c):  
    Y = rd.exponential(1/c)  
    X = exp(Y)  
    return X
```

Partie 2 :

5.

```
def simulZ(c):  
    a = simulX(c)  
    b = simulX(c)  
    Z = a * b  
    return Z
```

6. X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2 et sont indépendantes, donc Z admet une espérance et un moment d'ordre 2.

$E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ par indépendance

$$\underline{E(Z) = \frac{c^2}{(c-1)^2}}$$

$E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2)$ car X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes par le lemme des coalitions

$$\underline{E(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}}$$

$$\text{Donc } V(Z) = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^2 - 2c + 1)^2 - c^4(c^2 - 4c + 4)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 1) - c^4(c^2 - 4c + 4)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^6 - 4c^5 + 6c^4 - 4c^3 + c^2 - c^6 + 4c^5 - 4c^4}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro Edhec bs		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

$$= \frac{2c^4 - 4c^3 + c^2}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$V(2) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7.a. Notons, comme en 4., g une densité de Y_1 (et donc de Y_2).

$Y_1 \hookrightarrow E(c)$

Notons g_{cY_1} une densité de cY_1

$\forall x \in \mathbb{R}, g_{cY_1}(x) = \frac{1}{c} g\left(\frac{x}{c}\right)$

$$= \frac{1}{c} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{x}{c}\right) c e^{-x}$$

$$g_{cY_1}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) e^{-x}$$

Donc $cY_1 \hookrightarrow E(1)$, et comme Y_1 et Y_2 suivent la même loi, $cY_2 \hookrightarrow E(1)$.

7.b. cY_1 et cY_2 sont indépendantes par le lemme des coalitions.

$cY_1 \hookrightarrow E(1)$ et $cY_2 \hookrightarrow E(1) \Leftrightarrow cY_1 \hookrightarrow \gamma(1)$ et $cY_2 \hookrightarrow \gamma(1)$.

Par stabilité de la loi gamma, et par indépendance de cY_1 et cY_2 , $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$.

5 / 20

p.a. $Y_1 + Y_2 = \frac{1}{c}(cY_1 + cY_2) + 0$

$H(\Omega) = K(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, $H(x) = 0 = K(x)$

Si $x > 0$, $H(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x)$
 $= P(cY_1 + cY_2 \leq cx) \text{ car } c > 0$
 $= K(cx)$

On a de plus, $\forall x < 0$, $K(x) = K(cx)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = K(x)$

Comme $Y_1 + Y_2 = \frac{1}{c}(cY_1 + cY_2)$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = cx \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \cdot \frac{1}{\Gamma(\Omega)} (cx)^{\Omega-1} e^{-cx}$

$h(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) c^{\Omega} x^{\Omega-1} e^{-cx} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) c^{\Omega} x^{\Omega-1} e^{-cx}$

d'où $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c^{\Omega} x^{\Omega-1} e^{-cx} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

p.b. $(X_1, X_2)(\Omega) \subset [1, +\infty[^2 \Rightarrow Z(\Omega) \subset [1, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 1$, $F_Z(x) = 0$

Si $x \geq 1$, $F_Z(x)$

Z est une densité $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt$ converge et vaut 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt = 1 \Leftrightarrow c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c+1}} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)^2}, \quad \alpha = c+1$$

Donc $\forall \alpha > 3$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

$$E(Z) = \frac{c^2}{(c-1)^2} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} dx$$

$$9.a. E(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2} \Leftrightarrow c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{x^{c+1}} dx = \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} dx = \frac{1}{(c-2)^2}, \quad \text{posons } \alpha = c-1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)^2}, \quad \text{et ce } \forall c > 2 / \alpha = c-1$$

Ainsi, on a :

$\forall \alpha > 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$

Autre méthode :

Posons $u = \ln(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ est une bijection C^1 strictement $\nearrow$ de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$$

9.b. Par 9.a., on a $E(Z)$ existe et donc $E(Z) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} dx$ car cette intégrale converge absolument par 9.a.

$$\underline{E(Z) = c^2 \frac{1}{(c-1)^2}} \quad \text{car } c > 2 > 1$$

De même, on a $E(Z^2)$ existe et $E(Z^2) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} dx$

$$\underline{E(Z^2) = c^2 \frac{1}{(c-2)^2}}$$

Et donc $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$ en réduisant comme dans 6.

Problème

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ car } x \mapsto \cos(x) \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

$h(k+n) = h(k)$, et ce $\forall k \in \mathbb{Z}$, h est n -périodique.

De plus, $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

Donc $h \in F_n$.

2. On a bien $F_n \subset E$.

Soit f l'élément nul de E .

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+n) = f(k) = 0$$

Donc $f \in F_n \Rightarrow$ F_n est non-vide.

$\forall (f, g) \in F_n^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f + \lambda g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}, (f + \lambda g)(k+n) = f(k+n) + \lambda g(k+n) \\ = f(k) + \lambda g(k)$$

$$\underline{(f + \lambda g)(k+n) = (f + \lambda g)(k), f + \lambda g \text{ est } n\text{-périodique.}}$$

F_n est un sous-espace vectoriel de E .

3. Soit $f \in F_n$.

$$f(k) = f(nq + x)$$

Or, f est n -périodique $\Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z}$, f est ni -périodique car ni est un multiple de n

$$\text{Donc } f(nq + x) = f(x). \Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(ni + x) = f(x)$$

Ainsi, $f(k) = f(x)$, et ce $\forall f \in F_n$

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro Edhec bs

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $p \in F_n$.
4.a. $\forall k \in \mathbb{Z}, \exists x \in I_n, p(k) = p(x)$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\exists x \in I_n, p(k) = p(x)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} p(i) e_i(k) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{n-1} p(i) e_i(k) + p(x) e_n(k)$$

Or, on a $\forall i \in I_n, e_i \in F_n \Rightarrow \forall i \in I_n, e_i(k) = e_i(x)$

$$\text{Donc } \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{n-1} p(i) e_i(k) + p(x) e_n(k) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{n-1} p(i) e_i(x) + p(x) e_n(x)$$

$$= 0 + p(x) x 1$$

$$= p(x)$$

$$= p(k)$$

Ainsi, on a $\sum_{i=0}^{n-1} p(i) e_i(k) = p(k), \forall k \in \mathbb{Z}, \forall p \in F_n$

4.b. Soit $p \in F_n$.

Par 4.a., on a alors $p = \sum_{i=0}^{n-1} p(i) e_i$ (car 4.a est vraie $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall p \in F_n$, et que $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$)
Donc $p \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1})$.

Donc $F_n \subset \text{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1})$.

La réciproque est vraie.

D'où $F_n = \text{Vect}(B_n) \Rightarrow$ B_n est génératrice de F_n .

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$. Soit $k \in I_n$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i(k) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k e_k(k) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0$$

Or, ceci est vrai $\forall k \in I_n$.

Donc $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ est libre.

B_n est donc une base de F_n .

4. c. Soit $f \in F_n$.

Par 4. a., $f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i$.

Donc les coordonnées de f dans B_n sont $(f(0), \dots, f(n-1))$.

Ainsi, les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans B_n sont $(f(0), \dots, f(n-1))$

5. a. $\langle, \rangle : F_n \times F_n \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall (f, g_1, g_2) \in F_n^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\langle f, g_1 + \lambda g_2 \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g_1(k) + \lambda g_2(k))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g_1(k) + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g_2(k)$$

$$\langle f, g_1 + \lambda g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \lambda \langle f, g_2 \rangle$$

$\forall (f, g) \in F_n^2$, on a bien $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

$\forall f \in F_n, \langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(k)$, or $\forall k \in I_n, f^2(k) \geq 0$

Donc $\forall f \in F_n, \langle f, f \rangle \geq 0$

Soit $f \in F_n / \langle f, f \rangle = 0$.

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f^2(k) = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in I_n, f^2(k) = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in I_n, f(k) = 0$$

Donc les coordonnées de f dans B_n sont $(0, \dots, 0)$, on a donc

$f = 0_{F_n}$. La réciproque est vraie.

Donc où $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0_{F_n}$.

$\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur F_n .

s.b. Soit $i \in I_n$

$$\langle e_i, e_i \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_i(k) \\ = (e_i(i))^2$$

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 \quad \forall i \in I_n$$

Soit $(i, j) \in I_n^2 / i \neq j$

$$\langle e_i, e_j \rangle = e_i(i) e_j(i) + e_i(j) e_j(j) \\ = 0 \times 1 + 0 \times 1 \text{ car } i \neq j$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall (i, j) \in I_n^2 / i \neq j$$

Donc B_n est orthonormale pour $\langle, \rangle$.

s.c. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \right) \text{ par la relation admise.}$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} - \alpha_k \right] \text{ où } \forall k \in I_n, \alpha_k = \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} (\alpha_n - \alpha_0) \text{ par télescopage}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin(\frac{b}{2})}$$

s.d. Posons $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n}$, on a $a \in \mathbb{R}$ et $0 < \frac{4\pi}{n} < \frac{4\pi}{3}$, donc $b \in]0, 2\pi[$.

$$\text{Donc où } \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2 \sin(\frac{4\pi}{2n})} \left[\sin\left(0 + \frac{(2n-1) \times 4\pi}{2}\right) - \sin\left(0 - \frac{4\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{2\pi}{n})} \left[\sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{2\pi}{n})} \left[\sin\left(2 \times 2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sin(\frac{2\pi}{n})} [\sin(-\frac{2\pi}{n}) + \sin(\frac{2\pi}{n})], \text{ or } \sin(-\frac{2\pi}{n}) = -\sin(\frac{2\pi}{n})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{4k\pi}{n}) = 0$$

Posons $a = \frac{2\pi}{n}$ et $b = \frac{4\pi}{n}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{(4k+2)\pi}{n}) &= \frac{1}{2\sin(\frac{2\pi}{n})} [\sin(\frac{2\pi}{n} + 4\pi - \frac{2\pi}{n}) - \sin(\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n})] \\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{2\pi}{n})} [\sin(4\pi) - \sin(0)] \\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{2\pi}{n})} [0 - 0] \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{(4k+2)\pi}{n}) = 0$$

$$\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(\frac{2k\pi}{n}))^2$$

6. a. Soit $p \in F_n$.

On a $Dp: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, Dp(k+n) &= p(n+k+1) - p(n+k) \\ &= p(k+1) - p(k) \text{ car } p \in F_n \end{aligned}$$

$$\underline{\forall k \in \mathbb{Z}, Dp(k+n) = Dp(k)}$$

Donc $Dp \in F_n$ et ce $\forall p \in F_n$.

6. b. $\forall (p, g) \in (F_n)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, D(p+\lambda g)(k) &= (p+\lambda g)(k+1) - (p+\lambda g)(k) \\ &= p(k+1) - p(k) + \lambda(g(k+1) - g(k)) \\ &= Dp(k) + \lambda Dg(k), \text{ et ce } \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc $D(p+\lambda g) = Dp + \lambda Dg \Rightarrow D$ est linéaire.

Soit $g \in \text{Im } D, \exists p \in F_n / g = Dp$, or $Dp \in F_n \Rightarrow g \in F_n$.

Donc $\text{Im } D \subset F_n$.

D'où $D \in \mathcal{L}(F_n)$

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2023
	Épreuve de : Maths appro Edhec bs		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

6.c. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 Dh(k) &= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)
 \end{aligned}$$

7.a. Soit $(f, g) \in F_n^2$.

$$\begin{aligned}
 \langle f, \Delta g \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))) \\
 \cdot \langle \Delta f, \Delta g \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1)g(k+1) - f(k)g(k+1) - g(k)f(k+1) + f(k)g(k)) \\
 &= \sum_{k=1}^n f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) + \sum_{k=1}^n f(k)g(k-1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k)(\cancel{g(k)} + g(k+1) + g(k-1) - g(k)) - f(n)g(n) + f(0)g(1) + f(n)g(n-1) - f(0)g(0) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k)(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)) + f(0)(g(1) - 2g(0) + g(-1)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))
 \end{aligned}$$

$\langle \Delta f, \Delta g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle, \forall (f, g) \in F_n^2$

7.b. $\forall (p, q) \in F_n^2$, on a:

$$\langle p, \Delta q \rangle = -\langle \Delta p, q \rangle \text{ et } \langle \Delta p, q \rangle = -\langle \Delta p, q \rangle \text{ car } p \text{ et } q \text{ jouent le même rôle}$$

$$\text{Donc } \langle p, \Delta q \rangle = \langle \Delta p, q \rangle \quad \forall (p, q) \in F_n^2 \Rightarrow \Delta \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.$$

7.c. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\Delta)$ et p un vecteur propre associé non nul.

$$\langle p, \Delta p \rangle = -\langle \Delta p, p \rangle \Rightarrow \lambda \langle p, p \rangle = -\|\Delta p\|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda \|\Delta p\|^2}_{>0} = \underbrace{-\|\Delta p\|^2}_{<0}$$

$$\Rightarrow \lambda \leq 0.$$

$$\text{Donc } \lambda \in \mathbb{R}_-.$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(\Delta) \subset \mathbb{R}_-.$$

$$\begin{aligned} \text{8.a. } \Delta \varepsilon_0 &= \varepsilon(1) - 2\varepsilon(0) + \varepsilon(-1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \Delta \varepsilon_0(k) = \varepsilon_0(k+1) + \varepsilon_0(k-1) - 2\varepsilon_0(k) \\ &= 2 - 2 \quad \quad \quad = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta \varepsilon_0 = 0 \text{ donc } \underline{\varepsilon_0 \in \text{Ker } \Delta}$$

Exercice 1

Partie 1:

1. Par le théorème du rang, $n = \dim \text{Ker } f + 1 \Rightarrow \underline{\dim \text{Ker } f = n - 1}$

$$n \geq 2 \Rightarrow \dim \text{Ker } f \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow \underline{0 \in \text{Sp}(f)}$$

$$\begin{aligned}
 2. b. \operatorname{tr}(M) &= \operatorname{tr}(CL) \\
 &= \sum_{i=1}^n [CL]_{i,i}, \quad CL \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\
 &= \sum_{i=1}^n [C]_i [L]_i \\
 &= \sum_{i=1}^n [L]_i [C]_i
 \end{aligned}$$

$$\underline{\operatorname{tr}(M) = LC}$$

$$2. c. M^2 = CLCL.$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned}
 [M^2]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [CL]_{i,k} [CL]_{k,j} \\
 &= \sum_{k=1}^n [C]_i [L]_k [C]_k [L]_j
 \end{aligned}$$

tr

3. $M^2 = \operatorname{tr}(M)M$, donc on a en particulier $MC = \operatorname{tr}(M)C$.

où $C \in \operatorname{Ker}(M - \operatorname{tr}(M)I_n)$.

Or, C est non nulle, donc $\operatorname{Ker}(M - \operatorname{tr}(M)I_n) \neq \{0\} \Rightarrow \operatorname{tr}(M) \in \operatorname{Sp}(M)$.

4. $\operatorname{tr}(M) = 0$, donc $M^2 = 0$.

Donc le polynôme X^2 est annulateur pour M .

Or, $\operatorname{Sp}(M) \subset \{ \text{racines de } X^2 \neq 0 \} \Rightarrow \operatorname{Sp}(M) = \{0\}$.

$\dim \operatorname{Ker} M = n-1 \neq n$, et seul 0 est valeur propre de M .

Donc M n'est pas diagonalisable.

5. $\operatorname{tr}(M) \in \operatorname{Sp}(M)$ et $0 \in \operatorname{Sp}(M)$.

Or, $X(X - \operatorname{tr}(M))$ est annulateur pour M et admet 0 et $\operatorname{tr}(M)$ comme racines.

où $\operatorname{Sp}(M) = \{0, \operatorname{tr}(M)\}$.

$$\dim \ker(M) = n-1$$

$$\dim \ker(M - \operatorname{tr}(M)I_n) \geq 1$$

$$\Rightarrow \dim \ker(M) + \dim \ker(M - \operatorname{tr}(M)I_n) \geq n$$

Or on a aussi $\dim \ker(M) + \dim \ker(M - \operatorname{tr}(M)I_n) \leq n$, car les deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

$$\Rightarrow \text{où } \underline{\dim \ker(M) + \dim \ker(M - \operatorname{tr}(M)I_n) = n \Rightarrow M \text{ diagonalisable}}$$

Partie 2

$$6.a. AX = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } acx + by + z = bx + cy + z \Leftrightarrow acx = bx$$

Supposons $x = 0$

$$\text{Alors } \begin{cases} by + az = 0 \\ cy + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} by + az = 0 \\ acy + az = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} by + az = 0 \\ (ac-b)y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} az = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi $AX = 0 \Rightarrow X = 0$. On admet qu'il y a une contradiction en lien avec le fait que A n'est pas inversible.

$$\text{Donc } x \neq 0 \Rightarrow \underline{ac = b}$$

$$6.b. \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ a & a & b \\ b & ac & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} & c_2 & c_3 \\ & \uparrow & \uparrow \\ & ac_2 & bc_3 \end{matrix}$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ a & a & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro Edhec bs

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} c & b & 1 \\ 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{rg}(A) = 2}$$

Exercice 3

1.a. $[X = k]$: "il y a k faces avant le premier 'pile'".

$$\underline{X(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$[X = k] = F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1} \Rightarrow P(X = k) = P(F_1) \dots P(F_k) P(P_{k+1}) \text{ par indépendance}$$
$$\underline{P(X = k) = p(1-p)^k \forall k \in \mathbb{N}}$$

1.b. Sous réserve de convergence :

$$E(X) = p \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}, \text{ or cette série converge : on lève la réserve}$$

(car $|1-p| < 1$)

$$= \frac{p}{1-p} \frac{1}{(1-p)(1-p)^2}$$

$$\underline{E(X) = \frac{1}{p(1-p)}}$$

• Pour réserve de convergence :

$$E(X^2) = p \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 (1-p)^k$$

$$= p \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^k + p \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k$$

$$= \frac{p}{(1-p)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + E(X), \text{ le membre de droite converge}$$

donc on peut lever la réserve

$$= \frac{p}{(1-p)^2} \frac{1}{(1-p)(1-p)^2} + \frac{1}{p(1-p)}$$

$$= \frac{1}{p^2(1-p)^2} + \frac{1}{p(1-p)}$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{1}{p^2(1-p)^2} + \frac{1}{p(1-p)} \cdot \frac{1}{p^2(1-p)^2}$$

$$\underline{V(X) = \frac{1}{p(1-p)}}$$

2.a. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} [Q=k] &: \left[\frac{1}{3} (X-R) = k \right] \\ &: [X-R = 3k] \end{aligned}$$

$$\underline{[Q=k] : [X = 3k + R]}$$

4. On vérifie que $\forall i \in [0, 2], \forall j \in \mathbb{N}, P(R=i)P(Q=j) = P([R=i] \cap [Q=j])$.
Donc Q et R sont indépendantes.

5.a. La fonction simule une variable suivant une loi géométrique, et retire 1 à la valeur prise de telle sorte que X , dans le programme prenne ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et pas que $\mathbb{N}^*$.

Or, avec $X_1 \hookrightarrow G(p)$ et $X_i \hookrightarrow BN(p)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X_1 = k+1) = P(X_i = k)$.

Donc de cette manière, le programme simule X .

5.b.

def div(p):

$X = \text{simulX}(p)$

$Q = \text{simulX}((1-p) * 3)$

$R = X - 3 * Q$

return (X, Q, R)

