Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Z7-00280
225267
Maths S

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 14	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro ESSEC HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1

1.a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons f_X une densité de X. On a $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

X admet un moment d'ordre $k \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t)dt$ converge absolument par le théorème de transfert.

$\Leftrightarrow \int_0^1 t^k \, dt$ converge

Or, $\int_0^1 t^k dt$ converge et $\int_0^1 t^k dt = [\frac{t^{k+1}}{k+1}]_0^1$

$= \frac{1}{k+1}$

Donc X admet un moment d'ordre k et $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

Donc X admet des moments de tout ordre et $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k(X) = \frac{1}{k+1}$

1.b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons f_X une densité de X, on a $f_X(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$

X admet un moment d'ordre $k \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t)dt$ converge absolument par le théorème de transfert

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \lambda t^k e^{-\lambda t} dt$ converge.

. Par croissance comparée, $\lim\limits_{+\infty} \lambda t^{k+2} e^{-\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda t^k e^{-\lambda t} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$

Par les critères de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge absolument.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par négligeabilité, $\int_1^{+\infty} \lambda t^k e^{-\lambda t} dt$ converge absolument.
Donc $\int_0^{+\infty} \lambda t^k e^{-\lambda t} dt$ converge absolument.
Donc $m_k(X)$ existe, et ce $\forall k \in \mathbb{N}$.
Donc X admet des moments de tout ordre.

. Soit $a > 0$.
Posons $u(t) = t^k$ et $v(t) = -e^{-\lambda t}$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
$u'(t) = kt^{k-1}$ $\quad v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$\int_0^a \lambda t^k e^{-\lambda t} = [-t^k e^{-\lambda t}]_0^a + k\int_0^a t^{k-1} e^{-\lambda t} dt$$

$$= -a^k e^{-\lambda a} + k\int_0^a t^{k-1} e^{-\lambda t} dt, \quad \lim_{a \to +\infty} -a^k e^{-\lambda a} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, quand $a \to +\infty$, on a :
$m_k(X) = 0 + \frac{k}{\lambda} m_{k-1}(X)$ car X admet bien des moments de tout ordre.
Ainsi, on obtient par descente finie : $m_k(X) = \frac{k!}{\lambda^k} m_0(X) = \frac{k!}{\lambda^k}$

. Donc X admet des moments de tout ordre, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k(X) = \frac{k!}{\lambda^k}$.

Partie 2

2. On a $H_3 = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$ et $G_3 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \end{pmatrix}$

3. ${}^tWH_nW = \sum_{i=1}^n [{}^tW]_i [H_nW]_i$, $H_nW \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tWH_nW \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

$$= \sum_{i=1}^n [W_i] \sum_{j=1}^n [H_n]_{i,j} [W]_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \mu_{i+j-2} \alpha_j$$

${}^tWH_nW = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \mu_{i+j-2}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j m_{i+j-2}(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{j-2} f(x) dx$$

$${}^tWH_nW = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx$$

f et P^2 ~~sont~~ positives ~~sur~~ $\mathbb{R}_+$.
Donc ~~$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(P(x))^2 f(x) \geq 0$~~ $\Rightarrow {}^tWH_nW \geq 0$ par positivité de l'intégrale, et ce $\forall$

4. Soient $\overset{n \in \mathbb{N}^*}{,}$ $\lambda \in Sp(H_n)$ et W un vecteur propre associé non nul.

${}^tWH_nW = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx \Leftrightarrow \lambda \|W\|^2 = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx$.

. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(P(x))^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx \geq 0$
car $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(P(x))^2 \geq 0$ et $f(x) \geq 0$ en tant que densité

$$\Rightarrow \lambda \|W\|^2 \geq 0$$

Or, $\|W\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$. $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et ce $\forall \lambda \in Sp(H_n)$.
Ainsi, $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in Sp(G_n)$ et $W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in Ker(G_n - \lambda I_n)$

. ${}^tWG_nW = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \mu_{i+j-1}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \int_0^{+\infty} x^i x^{j-1} f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^j\right) \frac{1}{x} f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(Q(x))^2}{x} f(x) dx \text{ en posant } Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i.$$

. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{(Q(x))^2}{x} f(x) \geq 0 \Rightarrow {}^tWG_nW \geq 0$

$$\Rightarrow \lambda \|W\|^2 \geq 0.$$

Or, $\|W\|^2 \geq 0$, donc on a aussi $\lambda \geq 0$. $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

. Donc $Sp(G_n) \subset \mathbb{R}_+$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

7. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$t \mapsto t^n e^{-t^\theta} - \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

. $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h'(t) = nt^{n-1} e^{-t^\theta} - \theta t^{\theta-1} t^n e^{-t^\theta}$
$= t^{n-1} e^{-t^\theta} (n - \theta t^\theta)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow n - \theta t^\theta \geq 0$
$\Leftrightarrow n \geq \theta t^\theta$
$\Leftrightarrow \frac{n}{\theta} \geq t^\theta$

$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \geq t$

Ainsi, h est $\nearrow$ sur $\left[0, \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]$ puis $\searrow$ sur $\left[\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, +\infty\right[$.

. Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) \leq h\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}} - \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}}$
$= 0$

i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, t^n e^{-t^\theta} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}}$

8.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test_stieljes(U):
    N = len(U) - 1
    m = 1 + N//2
    H = np.zeros((m, m))
    for n in range(1, m+1):
        for i in range(0, m):
            H[i, n-1] = U[i+n-1]
            H[n-1, i] = U[i+n-1]
    valp = al.eigvalsh(H)

    for k in range(0, m):
        if H[k] < 0:
            return 0
    return 1
```

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 14 | Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies ESSEC HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9. $|\sin(t)| \leq 1$, ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|t^n e^{-t} \sin(t)| = t^n e^{-t}|\sin(t)| \leq t^n e^{-t}$.

. Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq t^n e^{-t}|\sin(t)| \leq t^n e^{-t}$.

. Par 1.b, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Donc avec $\lambda = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

. Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}|\sin(t)| dt$ converge.
Donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ converge absolument donc converge.

. $|\cos(t)| \leq 1$, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|t^n e^{-t} \cos(t)| = t^n e^{-t}|\cos(t)| \leq t^n e^{-t}$.
Ainsi, en procédant de la même manière, on a :
Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ converge absolument donc converge.

. Donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ existent.

10. Soit $a > 0$.
Posons $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -\cos(t)$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
$u'(t) = -e^{-t}$ $\quad v'(t) = \sin(t)$

. $\int_0^a e^{-t} \sin(t) dt = [-\cos(t) e^{-t}]_0^a - \int_0^a e^{-t} \sin(t) dt$

$\Leftrightarrow 2\int_0^a e^{-t} \sin(t) dt = 1 - \cos(a) e^{-a}$
On a $0 \leq |\cos(a)| e^{-a} \leq e^{-a} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$, par encadrement, $\lim_{+\infty} |\cos(a)| e^{-a} = 0$.
Donc $\lim_{+\infty} \cos(a) e^{-a} = 0$

. Ainsi, quand $a \to +\infty$, on a :

$2S_0 = 1 - 0 \Leftrightarrow S_0 = \frac{1}{2}$

.. ~~Soit $n \in \mathbb{N}$.~~

. ~~$S_{n+1} + T_{n+1} = \int_0^{+\infty} (\cos(t) + \sin(t)) t^{n+1} e^{-t} dt$~~

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(n+1) M V_n = \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} S_n + T_n \\ -S_n + T_n \end{pmatrix}$

Or, $\begin{cases} S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1) T_n \\ S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2S_{n+1} = (n+1)(T_n + S_n) \\ 2T_{n+1} = (n+1)(T_n - S_n) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} S_{n+1} = \frac{n+1}{2}(T_n + S_n) \\ T_{n+1} = \frac{n+1}{2}(T_n - S_n) \end{cases}$

D'où $(n+1) M V_n = \begin{pmatrix} S_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix}$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}$.

13. Montrons par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$V_n = n! M^n V_0$".

. Pour $n = 0$:

$0! M^0 V_0 = V_0$ donc $P(0)$ est vraie.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie.

$V_{n+1} = (n+1) M V_n$

$= (n+1) n! M M^n V_0$

$V_{n+1} = (n+1)! M^{n+1} V_0$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

. $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = n! M^n V_0$.

14. On trouve $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, et $M^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Posons $x = t^4$. $t \mapsto t^4$ est une bijection strictement $\nearrow$, et C^1, de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Le changement de variable est valide.
$x = t^4 \Rightarrow x^{1/4} = t$, $dx = 4t^3 dt$, et $x^n = t^{4n}$
Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} t^{4n} e^{-x} \sin(t)(4t^3)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{4n+3} e^{-t} \sin(t)\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = S_{4n+3}$$

Le membre de droite converge, donc celui de gauche aussi : on peut lever la réserve.
On a donc $\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx$ converge et vaut $S_{4n+3} = 0$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}$.

16. On admet.

17. On admet que $\int_0^{+\infty} g_1(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g_2(x)\,dx = 1$.

. Ainsi, il existe deux solutions au moins au problème $\mathcal{M}^*(J)$ quand $J = \mathbb{R}_+$.

. Donc il n'y a pas unicité des solutions pour le problème $\mathcal{M}^*(J)$ quand $J = \mathbb{R}_+$.

Partie 3

18. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$ car f est adaptée à $\mathcal{M}^*(J)$

$\forall x \in [0, 1]$, $x^n \geq 0$ et $f(x) \geq 0 \Rightarrow x^n f(x) \geq 0$.
Ainsi, on a donc $u_n \geq 0$.

. X est une variable aléatoire à densité, donc X n'est pas égale à 0 quasi certainement.

. Ainsi, f n'est pas la fonction nulle $\Rightarrow \exists x_0 \in [0,1] / f(x_0) \neq 0$.
Par continuité de f, $\exists x_1 \in]0,1] / f(x_1) \neq 0$.

. Donc $\exists x_1 \in]0,1]$, $x_1^n f(x_1) \neq 0$.

. Ainsi, $u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \geq 0$ et $x \mapsto x^n f(x)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$, et est positive.

. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

19. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k u_{i+k} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k x^{i+k} f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-x)^k \right) x^i f(x) dx$$

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k u_{i+k} = \int_0^1 (1-x)^j x^i f(x) dx$$

. $x \mapsto (1-x)^j x^i f(x)$ est positive sur $[0,1]$.
Donc $\int_0^1 (1-x)^j x^i f(x) dx \geq 0$

. Or, de même qu'en 18., $\exists x_0 \in [0,1]$, $f(x_0) \neq 0$.
Donc par continuité de f, $\exists x_1 \in]0,1[$, $f(x_1) \neq 0$.
Ainsi, $(1-x_1)^j x_1^i f(x_1) \neq 0 \Rightarrow x \mapsto (1-x)^j x^i f(x)$ est positive et pas identiquement nulle sur $[0,1]$.

. Ainsi, on a $\int_0^1 (1-x)^j x^i f(x) dx > 0$.
i.e. $\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0$, et ce $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$.

20. $\forall x \in [0,1]$, $x^3 \leq x^2$ donc $x^3 f(x) \leq x^2 f(x)$.
Par positivité de l'intégrale, $u_3 \leq u_2 = \frac{1}{3}$.

. ~~Par l'inégalité~~ On admet l'autre inégalité.

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 14 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths appro. ESSEC HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

21. Quand $\alpha \in]1, +\infty[$:

$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x^n \leq x^0 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \frac{u_n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Par les critères de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Par comparaison de suites positives, $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

. On admet le cas $\alpha \in]0, 1]$.

$\Delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{n+k}$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 x^{n+k} f(x)\,dx$

$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k \, x^n f(x)\,dx$

$= \int_0^1 (1-x)^n x^n f(x)\,dx$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

22. $\Delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} u_{n+k}$

$\underline{\Delta_{n,0} = u_n}$

23. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, n]\!]$.

$\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} \binom{j}{k-1} u_{n+k-j}$ en posant $k = k+1$

$= u_{n-j} + (-1)^j$

24.

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
    N = len(U) - 1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range(0, N+1):
        Delta[k, 0] = U[k]
        if ((Delta[k, 0] <= 0) and (info = -1)):
            info = k
        for j in range(1, N+2):
            Delta[k, j] = Delta[k-1, j-1] - Delta[k, j-1]
        if ((Delta[k, j] <= 0) and (info = -1)):
            info = k
    return (info, Delta)
```

26. h est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions C^1 sur $[0, 1]$.

. h' est continue sur $[0, 1]$. Elle est, par le théorème des bornes atteintes, bornée et elle atteint ses bornes.
Posons $K = \sup\limits_{x \in [0,1]} |h'(x)| \in \mathbb{R}_+$.

. Par l'inégalité des accroissements finis :
$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \ |h(x) - h(y)| \leqslant K|x - y|$ où $K \in \mathbb{R}_+$.

27.a. $Z_n(\Omega) \subset [0, 1]$. Donc par 26. :
$E(|h(x) - h(Z_n)|) \leqslant K E(|x - Z_n|) = K E(|Z_n - x|)$
Or, par les propriétés de l'espérance, $|E(h(x) - h(Z_n))| \leqslant E(|h(x) - h(Z_n)|)$.

. D'où $|E(h(x) - h(Z_n))| = |h(x) - E(h(Z_n))| \leqslant K E(|Z_n - x|)$.

~~Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :~~
~~$|E(|Z_n - x|)| \leqslant$~~ [illegible]

27.b. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$[E(|Z_n - x| \times 1)]^2 \leqslant E((Z_n - x)^2) \times E(1)$

$\Rightarrow |E(|Z_n - x|)| \leqslant \sqrt{E((Z_n - x)^2)}$
$\Rightarrow E(|Z_n - x|) \leqslant \sqrt{E((Z_n - x)^2)}$

D'où finalement, avec 27.a. : $|h(x) - E(h(Z_n))| \leqslant K\sqrt{E((Z_n - x)^2)}$

31. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^1 h^2(x)dx \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)|dx$.

h^2 est positive sur $[0, 1]$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant \int_0^1 h^2(x)dx \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)|dx \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Par encadrement, on a $\int_0^1 h^2(x)dx$.
Puis h^2 étant C^1 et positive sur $[0, 1]$, on a ~~[illegible]~~ par

la stricte positivité de l'intégrale :

$\forall x \in [0,1],\ h^2(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ f_1(x) = f_2(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = f_2(x)$ car f_1 et f_2 sont nulles sur $\mathbb{R} \setminus \{J\}$.

$\Rightarrow f_1 = f_2$

. Ainsi, si $\mathcal{P}^*(J)$ admet une solution, on a montré qu'elle était unique.

32. Posons $l : x \mapsto e^x - 1 - x$, définie sur $[-1, 1]$.

$l'(x) = e^x - 1$, $l'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Ainsi, l admet un minimum en 0.

$\forall x \in [-1, 1],\ l(0) = 0 \leq e^x - 1 - x$

. Soit $x \in [-1, 1]$. $x \mapsto e^x$ est C^∞ et $\forall n \in \mathbb{N},\ (e^0)^{(n)} = 1$.

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, x]$, à l'ordre 1, pour $x \mapsto e^x$, on a :

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{|x-0|^2}{2} \sup_{y \in [0,x]} (e^y)$$

$$\leq C'x^2 \quad \text{avec } C' = \frac{1}{2} \sup_{y \in [0,x]} (e^y)$$

Ceci est vrai $\forall x \in [-1, 1]$.

. Ainsi, en posant $C = \sup_{y \in [-1,1]} (e^y)$, on obtient :

$\forall x \in [-1, 1],\ 0 \leq e^x - 1 - x \leq Cx^2$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

33.b. Avec $i = 1$:

$$\partial_1 F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{(\partial_1 R_k(\alpha_1,\alpha_2)) R_0(\alpha_1,\alpha_2) - R_k(\alpha_1,\alpha_2)(\partial_1 R_0(\alpha_1,\alpha_2))}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$$

$$= \frac{R_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - \frac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} \times \frac{R_1(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)}$$

$$= \cancel{F_{k+1} - F_k F_i}\ F_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2) - F_k(\alpha_1,\alpha_2) F_i(\alpha_1,\alpha_2)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 225267

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 14	Session : 2023

Épreuve de : Maths appro ESSEC HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

. Avec $i = 2$:

$$\partial_2 F_k(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{(\partial_2 R_k(\alpha_1,\alpha_2))(R_0(\alpha_1,\alpha_2)) - R_k(\alpha_1,\alpha_2)(\partial_2 R_0(\alpha_1,\alpha_2))}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$$

$$= \frac{R_{k+2}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - \frac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} \times \frac{R_2(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)}$$

$$= \cancel{F_{k+2}(\alpha_1,\alpha_2) - F_k F_2}\ F_{k+2}(\alpha_1,\alpha_2) - F_k(\alpha_1,\alpha_2)F_2(\alpha_1,\alpha_2).$$

. Les résultats sont vrais $\forall (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$).

. Donc $\forall i \in [\![1,2]\!]$, $\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i$

~~Soit $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$~~

34.a. $\partial_1 G(\alpha_1,\alpha_2) = F_1(\alpha_1,\alpha_2) - \mu_1$

$\partial_2 G(\alpha_1,\alpha_2) = F_2(\alpha_1,\alpha_2) - \mu_2$

. $\partial^2_{1,1} G(\alpha_1,\alpha_2) = \partial_1 F_1(\alpha_1,\alpha_2) = \cancel{F_2 - (F_1)^2}\ F_2(\alpha_1,\alpha_2) - (F_1(\alpha_1,\alpha_2))^2$

$\partial^2_{2,2} G(\alpha_1,\alpha_2) = \partial_2 F_2(\alpha_1,\alpha_2) = F_4(\alpha_1,\alpha_2) - (F_2(\alpha_1,\alpha_2))^2$

$\partial^2_{1,2} G(\alpha_1,\alpha_2) = \partial^2_{2,1} G(\alpha_1,\alpha_2) = \partial_2 F_1(\alpha_1,\alpha_2)$

$= F_3(\alpha_1,\alpha_2) - F_1(\alpha_1,\alpha_2)F_2(\alpha_1,\alpha_2)$

. D'où $\nabla^2 G(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{pmatrix} F_2(\alpha_1,\alpha_2) - (F_1(\alpha_1,\alpha_2))^2 & F_3(\alpha_1,\alpha_2) - F_1(\alpha_1,\alpha_2)F_2(\ldots) \\ F_3(\alpha_1,\alpha_2) - F_1(\alpha_1,\alpha_2)F_2(\alpha_1,\alpha_2) & F_4(\alpha_1,\alpha_2) - (F_2(\alpha_1,\alpha_2))^2 \end{pmatrix}$

~~$\forall v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, ${}^t v D^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0$.~~

~~Par la partie 1, $Sp(D^2 G(\alpha_1, \alpha_2)) \subset \mathbb{R}_+$.~~

34. c. Soit $\lambda \in Sp(D^2 G(\alpha_1, \alpha_2))$ et v un vecteur propre.

${}^t v D^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0 \Rightarrow \lambda \|v\|^2 > 0$, or $v \neq 0 \Rightarrow \|v\|^2 > 0$

$\Rightarrow \lambda > 0$.

Donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

D'où $Sp(D^2 G(\alpha_1, \alpha_2)) \subset \mathbb{R}_+^*$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751