



W9-00070

367121

Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

Partie 1

1) Par correspondance matrice-endomorphisme, on a $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = 1$
 Dès lors, par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^m - \text{rg}(f) = m - 1$
 Or $m \geq 2$ donc $m - 1 \geq 1$, donc $\dim \text{Ker } f \geq 1$, et dès lors, 0 est valeur propre de f car $\text{rg}(f) \neq m$

2)a) M est de rang 1, et C est non nulle, donc toutes les colonnes de M sont proportionnelles à C . Dès lors, il existe $(p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ tels que $C_2 = p_2 C, C_3 = p_3 C, \dots, C_m = p_m C$ (on note $i \in \{2, \dots, m\}$, C_i la i -ième colonne de M)
 Dès lors, il existe $L = (1 \ p_2 \ \dots \ p_m) \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$ telle que, par règle du produit matriciel, $LC = M = CL$

b) $M = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 p_2 & \dots & c_1 p_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & c_m p_2 & \dots & c_m p_m \end{pmatrix}$ donc $\text{tr}(M) = c_1 + c_2 p_2 + \dots + c_m p_m$
 on note $C = (c_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$

$$LC = (1 \ p_2 \ \dots \ p_m) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = c_1 + c_2 p_2 + \dots + c_m p_m$$

Dès lors, on a bien $\text{Tr}(M) = LC$

$$\begin{aligned}
 c) \underline{M^2} &= CLCL = C(LC)L \\
 &= CT_n(M)L \quad \text{selon 2)b)} \\
 &= T_n(M)CL \quad \text{car } T_n \text{ renvoie un réel.} \\
 &= \underline{T_n(M)M}
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ Selon 2)c), } M^2 - T_n(M)M = 0$$

Ainsi, $P = X^2 - T_n(M)X$ est un polynôme annulateur de M
 $= X(X - T_n(M))$

Les valeurs propres de M sont donc comprises dans les racines de P , c'est-à-dire $Sp(M) \subset \{0, T_n(M)\}$, et M ne peut admettre d'autres valeurs propres.

$$\text{De plus, } MC = CLC$$

$$= CT_n(M)$$

$$= T_n(M)C \quad \text{et } C \neq 0 \text{ donc } \underline{T_n(M) \text{ est valeur propre de } M},$$

donc de f par correspondance matrice-endomorphisme.

$$\text{On a donc } Sp(f) = \{0, T_n(M)\}$$

$\dim \mathbb{R}^n$

4) On suppose $T_n(M) = 0$, Ainsi $Sp(f) = \{0\}$, f est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = n$
 On $\dim \text{Ker } f \neq n$ donc f est non diagonalisable
 donc M n'est pas diagonalisable par correspondance matrice-endomorphisme.

$$5) \text{ On a conclu précédemment que } \underline{Sp(f) = \{0, T_n(M)\}}$$

$$\text{De plus, } \begin{cases} \dim E_0(f) = n-1 \text{ car } E_0(f) = \text{Ker } f \\ \dim E_{T_n(M)}(f) \geq 1 \end{cases}$$

donc $\dim E_0(f) + \dim E_{T_n(M)}(f) \geq n$ or $\dim E_0(f) + \dim E_{T_n(M)}(f) \leq n$ obligatoirement
 Dès lors, $\dim E_0(f) + \dim E_{T_n(M)}(f) = n$ donc f est diagonalisable.

Partie 2

6)a) on considère le système $AX=0$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y/a + z/b = 0 \\ ax + y + z/c = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 - aL_1 \\ L_3 - bL_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y/a + z/b = 0 \\ z(1/c - a/b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(c - \frac{b}{a}) = 0 \\ x + y/a + z/b = 0 \\ z(\frac{b-ac}{bc}) = 0 \\ y(\frac{ca-b}{a}) = 0 \end{cases}$$

si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on aurait $AX=0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
et alors A serait inversible,
ce qui est absurde

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y/a + z/b = 0 \\ b - ac = 0 \\ ca - b = 0 \end{cases}$$

On a donc $ac = b$

b) On a alors $C_2 = \frac{1}{a} C_1$ et $C_3 = \frac{1}{b} C_1$ en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A , donc $\text{rg}(A) = 1$ (et donc $\dim \text{Ker}(A) = 2$ par correspondance matrice-endomorphisme)

7)a) A est non inversible donc $0 \in \text{Sp}(A)$

De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3/a & 3/b \\ 3a & 3 & 3/c \\ 3b & 3c & 3 \end{pmatrix} = 3A$ donc $A^2 - 3A = 0$
en utilisant $ac=b$ donc $X(X-3)$ annule A

et $T_A(A) = 3$, donc on retrouve la situation de la partie 1, Puisque $T_A(A) \neq 0$, $\text{rg}(A) = 1$; on peut à partir de la partie 1 conclure que $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$ et A est diagonalisable.

$$b) A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9/a & 9/b \\ 9a & 9 & 9/c \\ 9b & 9c & 9 \end{pmatrix} = (T_A(A))^2 A$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 27 & 27/a & 27/b \\ 27a & 27 & 27/c \\ 27b & 27c & 27 \end{pmatrix} = (t_A(A))^3 A$$

Dès lors, on conjecture que $A^m = (t_A(A))^{m-1} A$ et on se propose de le prouver par récurrence $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

initialisation : $m=1$, $A^1 = (t_A(A))^0 A$ vérifié

Récédité : fixons $m \in \mathbb{N}^*$, supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée.

$$\begin{aligned} \text{alors } A^{m+1} &= A^m A \\ &= (t_A(A))^{m-1} A^2 \\ &= (t_A(A))^{m-1} t_A(A) A = (t_A(A))^m A, \text{ d'où l'Récédité et la} \end{aligned}$$

conclusion.

Dès lors, puisque $(t_A(A))^{m-1} \in \mathbb{R} \forall m \in \mathbb{N}^*$, on a bien $A^m \in \text{Vect}(A)$.

Exercice 2 : Partie 1

et continue

1) f est positive $\forall x \in]-\infty, 1[$ car constante nulle, positive sur $[1, +\infty[$ car $c > 2$, et continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Dès lors, f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ au moins.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}} dt. \text{ On pose } A > 1$$

$$\int_1^A c x^{-(c+1)} dx = \left[\frac{-c x^{-c}}{c} \right]_1^A = 1 - A^{-c} = 1 - \frac{1}{A^c} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. On conclut : f peut être considéré comme une densité

2) X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{c}{x^{c+1}} dx \text{ converge (car } f \text{ est nulle sinon)}$$

$$\text{On pose } A > 1. \int_1^A c x^{-c} dx = \left[\frac{-c x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A$$

$$\int_1^A c x^{-c} dx = \left[\frac{-c x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A = \frac{c}{c-1} - \frac{c A^{-c+1}}{c-1} = \frac{c}{c-1} - \frac{c}{(c-1) A^{c-1}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{c}{c-1} \quad (c > 2)$$

Dès lors, X admet une espérance car $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge, et $E(X) = \frac{c}{c-1}$

Copie anonyme - n°anonymat : 367121

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths appl. EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

X admet un moment d'ordre 2 ($\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge

$$\begin{aligned} \int_1^A c x^{-c+1} dx &= \left[\frac{-c x^{-c+2}}{c-2} \right]_1^A \\ &= \frac{c}{c-2} - \frac{c}{(c-2)A^{c-2}} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{c}{c-2}$ car $c-2 > 0$ donc $\frac{1}{A^{c-2}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

$(\Rightarrow) \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}} dx$ converge. Soit $A > 1$

Dès lors, $E(X^2)$ existe et vaut $\frac{c}{c-2}$. Dès lors, $V(X)$ existe.

On conclut par König-Huygens: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{c}{(c-1)^2(c-2)} = V(X)$$

$$= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2} = \frac{c(c-1)^2 - c^2(c-2)}{(c-1)^2(c-2)}$$

$$= \frac{c(c+1)^2 - c^2(c+2)}{(c+1)^2(c+2)} = \frac{c}{(c+1)^2(c+2)} = V(X)$$

3) $X(x) = [1, +\infty[$ donc $\forall x \leq 1, F(x) = 0$

$\forall x \geq 1, \underline{F(x)} = \int_1^x f(t) dt = \left[\frac{-c t^{-c}}{c} \right]_1^x = 1 - x^{-c}$

Donc $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

4) a) $\forall(x) = \mathbb{R}_+$ puisque $X(x) = [1, +\infty[$. Dès lors, $\forall x \leq 0, G(x) = 0$
 $\forall x > 0, G(x) = P(Y \leq x)$
 $= P(\ln(X) \leq x)$
 $= P(X \leq e^x)$ par croissance de la fonction exponentielle
 $= F(e^x)$

Dès lors, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-xc} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\forall x > 0, e^x > 1)$

b) La formule de G nous permet directement d'affirmer (puisque $c > 2$) que $\forall c > 2, E(c)$

c) `def simulX(c):`
 $Y = \text{rd.exp}(c)$
 $X = \text{mp.exp}(Y)$
`return X`

Partie 2:

5) `def simulZ(c):`
 $X_1 = \text{simulX}(c)$
 $X_2 = \text{simulX}(c)$
`return  $X_1 * X_2$`

6) X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2 donc Z admet une espérance et une variance.

$$E(Z) = E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}$$

$$= \frac{c^2}{(c-1)^2} \text{ selon 2)}$$

$$E(Z^2) = E(X_1^2 X_2^2) = E(X_1^2) E(X_2^2) \text{ car } X_1^2 \text{ et } X_2^2 \text{ sont indépendantes par le lemme des coalitions}$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Dés lors, par König-Huygens, $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} \\ &= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4} \\ &= \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c-1)^4 - c^2(c-2)^2 &= c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 1 - c^4 + 4c^3 - 4c^2 \\ &= c^4 + 2c^2 - 4c^2 - 4c + 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7) a) $\forall x \in \mathbb{R}, P(cY_1 \leq x) = P(Y_1 \leq \frac{x}{c})$
 On note G_n la fonction de répartition de cY_n
 $= F(\exp(\frac{x}{c}))$ selon 4) a)

Donc $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{c}} = 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Dés lors, la loi commune à cY_1 et cY_2 est la loi exponentielle de paramètre 1. (car la fonction de répartition caractérise la loi).

b) X_1 et X_2 sont indépendantes donc $\ln X_1$ et $\ln X_2$ le sont (lemme des coalitions) donc $c \ln X_1$ et $c \ln X_2$ le sont aussi.

Dés lors cY_1 et cY_2 sont indépendantes. On sait que la loi $E(1)$ est la loi $\gamma(1)$. Par stabilité de la loi gamma, on a donc $\underline{cY_1 + cY_2} \hookrightarrow \gamma(2)$

8) a) ~~$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x} x}{\Gamma(2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$~~

Une densité de K est donnée par $R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x} x}{\Gamma(2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x)$
 $= P(c(Y_1 + Y_2) \leq cx)$
 $= K(cx)$

donc $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-cx} cx}{\Gamma(2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

~~$H(x)$~~ Y_1 et Y_2 sont indépendantes et à densité donc $Y_1 + Y_2$ est à densité.

On dérive la fonction de répartition car si elle est $\mathcal{C}^1$, on pose des valeurs arbitraires sinon.

Alors $h(x) = cR(cx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{c e^{-cx} cx}{\Gamma(2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

or $\Gamma(2) = 1$ donc $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\forall x \leq 0, P(Z \leq x) = 1$ can $X_n(x) = [1, +\infty[$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, P(C \leq x) = P(X_1 + X_2 \leq x)$
 $C_{1,+\infty} C$ $= P(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$ par monotonie de $\ln$
 $= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$
 $= H(\ln(x))$

Z est d'arité 1 on peut de même dériver F_2 là où elle est et φ^1 est pour des valeurs arbitraires sinon :

par exemple, $\int_2(x) = \frac{1}{x} \ln(x) = \frac{c^2 \ln(x) \exp(-c \ln(x))}{x} = \frac{c^2 \ln(x) x^{-c}}{x} = \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}}$
 (Redéfinie en 0/0)
 $= 0$ si $x < 1$

On a bien $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \ln(x)}{x^{2+1}} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

9) a) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$
soit $A > 1$, on intègre x^a par parties sur $[1, A]$

$$u = \ln(x) \quad u' = \frac{1}{x} \quad \text{u et } v \text{ sont } \psi^1 \text{ sur } [1, A]$$

$$v' = \frac{1}{x^k} \quad v = -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx &= \left[\frac{-\ln(x)}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{(\alpha-1)x^\alpha} dx \\ &= \frac{-\ln(A)}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} + \int_1^A \frac{1}{(\alpha-1)x^\alpha} dx \end{aligned}$$

$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)^2}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(\alpha-1)^2}$

b) On a $E(Z) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} dx = \frac{c^2}{(c-1)^2}$ avec $c = \alpha$ (variable
 $Z(x) = [1, +\infty[$ car $\alpha > 1$ et $c > 2$
 et convergence prouvée

Copie anonyme - n°anonymat : 367121

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths appl. EDEEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

de même, $E(z) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} dx = \frac{c^2}{(c-2)^2}$

Par König Huygens, on retrouve le même calcul qu'en 6)

d'où $V(z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$

Problème

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. $R(k+m) = \cos\left(\frac{2(k+m)\pi}{n}\right)$

Or $\cos$ est 2π périodique et $k+m \in \mathbb{Z}$, donc on a $\cos\left(\frac{2(k+m)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Dès lors, $h \in F_n$

2) $F_n \subset E$ car F_n est un ensemble d'applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

• $0_E \in F_n$ car l'application nulle est n périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

• $\lambda \in \mathbb{R}, (f, g) \in F_n^2$. $(\lambda f + g)(k+m) = \lambda f(k+m) + g(k+m)$ or $(f, g) \in F_n^2$
 $= \lambda f(k) + g(k)$
d'où $(\lambda f + g) \in F_n$.

Dès lors, F_n est un sous espace vectoriel de E

3) $f(k) = f(mq+n)$ selon l'énoncé
 en posant $f \in F_n$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k+m) = f(k)$
 c'est-à-dire $f(mq+n) = f(n)$
 ~~$f(k) = f(n)$~~

soit $f \in F_n$. on $e_i(k) = 0 \quad \forall i \neq k$.
 4) a) $\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k) = f(k) e_k(k) = f(k)$

b) $\forall k \in \mathbb{Z}, f$ est combinaison linéaire des $(e_0, \dots, e_{n-1})$
 ce qui nous permet de conclure: B_n est une base de F_n .

c) les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans la base B_n
 sont les $f(i), i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

5) a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ va bien dans $\mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} g(k) f(k) = \sum_{k=0}^{m-1} f(k) g(k) = \langle g, f \rangle \text{ donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est symétrique.}$$

soient $(f, g, h) \in F_m^3, d \in \mathbb{R}$.

$$\langle df + h, g \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (df(k) + h(k)) g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (df(k) + h(k)) g(k) \underset{\text{par définition de } F_m}{=} \sum_{k=0}^{m-1} f(k) g(k) + \sum_{k=0}^{m-1} h(k) g(k)$$

$$= d \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \text{ donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est bilinéaire par}$$

symétrie car elle est linéaire par rapport à la première variable.

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (f(k))^2 \geq 0$$

$$= 0 \Leftrightarrow \forall k \in [0, m-1], (f(k))^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [0, m-1], f(k) = 0$$

$$\Rightarrow f = 0_{F_m}$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif, et on conclut: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur F_m .

b) $k(i, j) \in [0, m-1]$ tels que $i \neq j$,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} e_i(k) e_j(k)$$

$$= 0 \text{ car } e_i(i) = 1 \text{ et } e_j(i) = 0 \text{ puisque } i \neq j \text{ (de même, } e_j(j) = 1 \text{ et } e_i(j) = 0)$$

Ainsi, la famille B_m est orthogonale.

$$\text{De plus, } \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (e_i(k))^2 = 1 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} 0 = 1 \text{ donc } \|e_i\| = 1 \forall i \in [0, m-1]$$

Donc B_m est une famille orthonormale, et en tant que base, c'est une base orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$c) \text{ on a } \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

On somme cette égalité pour k allant de 0 à $m-1$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \cos(akb) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \right)$$

d)

$$\begin{aligned}
 e) \|R\|^2 = (R, R) &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}{2} \quad \left(\cos(2a) = \cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{\cos(2a) + 1}{2}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{n}{2} \text{ selon 5)d)}
 \end{aligned}$$

donc $\|R\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 367121

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths applu EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) a) soit $f \in F_n$.

$$\begin{aligned} Df(k+m) &= f(k+1+m) - f(k+m) \\ &= f(k+1) - f(k) \quad \text{car } f \in F_n \\ &= Df(k) \quad \text{donc } Df \in F_n. \end{aligned}$$

b) soit $(f, g) \in F_n^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g)(k) &= (\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k) \\ &= \lambda (f(k+1) - f(k)) + g(k+1) - g(k) \\ &= \lambda Df + Dg \end{aligned}$$

Ainsi, D est linéaire.

o Df est un élément de F_n selon 6) a)

On peut conclure : $D \in \mathcal{L}(F_n)$.

soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} c) Dk(k) &= k(k+1) - k(k) \\ &= \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \|DR\|^2 &= \langle DR, DR \rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} R(k+1) - R(k) \\
 &= R(m) - R(0) \text{ par télescopage} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1}
 \end{aligned}$$

$$\exists 1a) \langle f, \Delta g \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} f(k) (g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))$$

$$\begin{aligned}
 b) \langle g, \Delta f \rangle &= -\langle Dg, Df \rangle = -\langle Df, Dg \rangle \text{ par symétrie de } \langle \cdot, \cdot \rangle \\
 \text{donc } \langle g, \Delta f \rangle &= \langle f, \Delta g \rangle \text{ et puisque } \langle g, \Delta f \rangle = \langle \Delta f, g \rangle \text{ par symétrie,}
 \end{aligned}$$

Donc a $\langle f, \Delta g \rangle = \langle \Delta f, g \rangle$ donc Δ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien F_m .

$$c) \langle g, \Delta g \rangle = - \langle Dg, Dg \rangle \\ = - \|Dg\|^2 \\ \leq 0$$

La forme quadratique associée à Δ est donc négative.

On peut conclure par le cours que les valeurs propres de Δ sont négatives ou nulles

soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$8) a) \Delta \xi(k) = \xi_0(k+1) - 2\xi_0(k) + \xi_0(k-1) \\ = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \text{d'où} \quad \xi_0 \in \text{Ker}(\Delta)$$

b)

un endomorphisme

9) a) Δ est ∇ -symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée.

Il existe donc une base orthonormale de F_m formée de vecteurs propres de Δ .

0 est valeur propre de Δ selon 8) a), et $\dim E_0(\Delta) = 1$ car $\dim \text{Vect}(\xi_0) = 1$

Dès lors, on peut supposer que le réel associé au vecteur propre ξ_0 est $\frac{1}{\sqrt{m}}$, et il existe $(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ d'autres vecteurs propres de Δ associés aux autres valeurs propres de Δ tels que $(\frac{1}{\sqrt{m}} \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ est une base orthonormale de F_m

On reprend $f(k) = \sum_{i=1}^m f(i) e_i(k)$, e_i joue le rôle de e_i et on suppose $f(i) = \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\}$, d'où $f = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \xi_i$.

10) a) $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(\Delta) = A.$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + 3A = \text{Mat}_{\mathbb{R}}(0).$
 $P = X(X+3)$ est donc un polynôme annulateur de A de degré 2

Des lors, $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3\}.$

$E_0(A)$: on résout $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3/2(-y + z) = 0 \\ 3/2(y - z) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3/2(-y + z) = 0 \end{cases}$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3/2(-y + z) = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$~~

donc $E_0(A) \stackrel{y=z}{=} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_0(A).$
 0 est donc valeur propre de $A.$

$E_3(A)$: on résout $(A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$

donc $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et 3 est valeur propre de $A.$

On a $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\Delta) = \{0, 3\}$

On a alors $\|D_f\|^2 \geq 3\|f\|^2.$

c)

Copie anonyme - n°anonymat : 367121

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2023

Épreuve de : Maths appl. EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3:

$$1) a) X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, [X=k] = \bigcap_{i=1}^k F_i \cap P_{k+n} \quad \text{et} \quad [X=0] = P_1$$

La incompatibilité des événements et indépendance des lancers, on a $P(X=k) = q^k p$ et $P(X=0) = p = pq^0$ qui rejoint le cas général

$$b) X \text{ admet une espérance } \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k P(X=k) \text{ converge}$$

so

$$k P(X=k) = k q^k p = k p q q^{k-1}. \text{ On reconnaît ici un terme de série géométrique dérivée (car } q \in]0, 1[) \text{ donc } X \text{ admet une espérance, général}$$

$$\text{et } E(X) = p q \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = p q \frac{1}{(1-q)^2} = p q \times \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$X \text{ admet un moment d'ordre 2 } \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 P(X=k) \text{ converge}$$

$$k^2 = k(k-1) + k$$

$$k^2 P(X=k) = (k(k-1) + k) p q^k = q^2 p q^{k-2} k(k-1) + p q k q^{k-1}. \text{ On reconnaît encore des termes généraux de séries géométriques dérivées, donc } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p q^2 q^{k-2} + p q \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = p q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + p q \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2(q)^2}{p} + \frac{q}{p}$$

$$\text{Par König Huggens, } V(X) = \frac{2(q)^2}{p} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{(q)^2}{p} + \frac{q}{p}$$

$$2) a) \text{ on a } X-R=Q$$

$$\forall R \in \mathbb{N}, [Q=R] \stackrel{3}{=} [X-R=R] = [X-R=3R] \\ = [X=3R+R]$$

$$b) P(Q=R) = p q^{3R+R} \text{ selon ce qui précède}$$

$$= p(1-q)q^{3R+R} \\ R=0: P(Q=0) = p q^{3 \cdot 0} = q^{3 \cdot 0} q^{0+1} = q^0 (1-q^3)$$

$$3) P(R=0) = P(X=3Q)$$

5)a) la loi géométrique compte le 1^{er} rang d'apparition du pile succès
ici pile, donc rel. géométric $\rightarrow$ compte les "face" obtenus avant le premier pile,
c'est-à-dire X .

b) def $chi(p)$:

$X = \text{simulX}(p)$

$Q = \text{np.} \underset{\text{int}}{\text{abs}} (\text{simulX}(p) / 3)$

$R = \text{np.} \text{abs} (X - Q)$

return (X, Q, R)

