

Copie anonyme - n°anonymat : 289967



V7-00013
289967
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EX1

P1

① •

D'où : $\text{rg}(X) = 1$

Par le théorème du rang :

$$\boxed{\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rg}(f)} \\ = \boxed{n-1}$$

• Comme :

$$\dim(\ker(f)) > 0$$

A GRS

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0, f(x) = 0$$

D'où 0 est valeur propre de f

② - a Comme le rang de X est 1, on en déduit que les colonnes de X sont toutes colinéaires entre elles. Notons les $(C_1, \dots, C_n)$

Des GRS :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists ! l_i \in \mathbb{R}, C_i = l_i C_1$$

Et donc :

$$\boxed{X} = \left(\boxed{C_1} \mid \boxed{l_2 C_1} \mid \dots \mid \boxed{l_n C_1} \right) = C_1 \times (1 \mid l_2 \mid \dots \mid l_n) = \boxed{C_1 L}$$

- b

Posons:

$$L = (l_j)_{1 \leq j \leq n} \quad \text{et} \quad C = (c_i)_{1 \leq i \leq n}$$

On pose alors $l_1 = 1$

On a:

$$CL = \mathcal{H} = (c_i l_j)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Et

$$\text{tr}(\mathcal{H}) = \sum_{k=1}^n c_k l_k$$

Or:

$$LC = \left(\sum_{k=1}^n c_k l_k \right)_{1 \leq i \leq n} = \sum_{k=1}^n c_k l_k$$

D'où

$$\boxed{\text{tr}(\mathcal{H}) = LC}$$

- c

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= CLCL \\ &= C \text{tr}(\mathcal{H}) L \\ &= \underline{\text{tr}(\mathcal{H}) \mathcal{H}} \end{aligned}$$

(3)

Considérons:

$$(\mathcal{H} - \text{tr}(\mathcal{H}) I_n)$$

(4) Supposons que: $\text{Tr}(\eta) = 0$

Alors, comme

$P: X^2 - \text{tr}(\eta)X$
est un polynôme annulateur de η dans le cas général /
On a: $P: X^2$

comme polynôme annulateur de η
D'où:

$$\text{rac}(P) = \{0\}$$

Et comme:

$$\text{sp}(\eta) \subset \text{rac}(P)$$

La seule valeur propre possible de η est 0.

Si η était diagonalisable, on aurait ainsi:

$$\eta \sim O_n$$

Et donc, comme la

à la

zéro dans toutes les bases;
fonction

matrice

nulle est associée

zéro dans toutes les bases;

$$\eta = O_n$$

Or:

$$\text{ra}(\eta) = 1 \neq 0$$

C'est absurde. η est pas diagonalisable

(5) Supposons que: $\text{Tr}(\eta) \neq 0$

Comme: $\dim(\ker(\eta)) = n-1$

On a bien, en posant:

$$E_0(\eta) = \ker(\eta)$$

$$\dim(E_0(\eta)) = n-1$$

Or, comme $\text{Tr}(\eta)$ est une valeur propre

$$\text{On a : } \dim \ker(\mathcal{H} - \text{Tr}(\mathcal{H})) \geq 1$$

$$\text{D'où : } \dim E_{\text{Tr}(\mathcal{H})}(\mathcal{H}) \geq 1$$

On a alors

$$n \geq \dim(E_0(\mathcal{H})) + \dim(E_{\text{Tr}(\mathcal{H})}(\mathcal{H})) \geq n$$

Et donc :

- $\mathcal{H}$ est diagonalisable donc $\mathcal{J}$ aussi.
- les valeurs propres de $\mathcal{J}$ sont exactement 0 et $\text{Tr}(\mathcal{H})$

P2

G. a. Considérons : $AX = 0$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} 0 = x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z \\ 0 = ax + y + \frac{1}{c}z \\ 0 = bx + cy + z \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ L_2 - L_3 \end{cases} \quad \begin{cases} (ac - b)x = 0 \end{cases}$$

S: $ac - b \neq 0$

On aurait alors

$$a \times L_2 \quad \begin{cases} by + az = 0 \\ acy + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} by + az = 0 \\ (ac - b)y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et} \quad x = y = z = 0$$

C'est absurde, car cela implique que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$
Donc que A est inversible

Des lors : $\boxed{ac \neq b}$

Copie anonyme - n°anonymat : 289967

Code épreuve : 2897

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6

On a alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & a & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que, en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes :

$$C_2 = c \times C_3$$

$$C_1 = ac \times C_3$$

D'où C_1, C_2, C_3 sont colinéaires
Et comme a et c sont non nuls

$$\boxed{\text{rg}(A) = 1}$$

(7) a On a donc :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{car} \quad C_3 - cC_2 = 0$$

$$A \begin{pmatrix} -ac \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{car} \quad C_3 - acC_1 = 0$$

Et 0 est valeur propre de multiplicité 2 (pas 3, sinon, comme pour la question

4. $\rightarrow$ A serait nulle)
Et

$$E(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{a} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -ac \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

De plus, comme : $\text{Tr}(A) = 3$

Alors 3 est la dernière valeur propre possible de A

Posons : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(AX - 3I_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1/a & 1/ac \\ a & -2 & 1/c \\ ac & c & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \frac{y}{a} + \frac{z}{ac} = 0 \\ ax - 2y + \frac{z}{c} = 0 \\ acx + cy - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2acx + cy + z = 0 \\ acx - 2cy + z = 0 \\ acx + cy - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_1 + 2L_3 \\ \Leftrightarrow L_2 + L_3 \end{aligned} \quad \begin{cases} 3cy - 3z = 0 \\ -3cy + 3z = 0 \\ acx + cy - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} L_2 + L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -3cy + 3z = 0 \\ acx + cy - 2z = 0 \end{cases}$$

Le système n'est pas un système de Cramer.
Donc il n'y a pas qu'une solution, il y a une infinité.

Et donc $(AX - 3I_n)$ n'est pas inversible.
D'où : $3 \in \text{vp}(A)$

Ainsi $\rightarrow a$ a une valeur propre de multiplicité 2 (0)
et une autre valeur propre (3)

D'ci

$$\dim E_0(a) + \dim E_3(a) = 3$$

Et:

- a est diagonalisable
- $\text{sp}(a) = \{0, 3\}$

On a donc $\forall P \in GL_n(\mathbb{R}), P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = A$

D'ci:

- $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que: $A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \times P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

- On a donc par récurrence:
 $\forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1}$

Ex 2

(1) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1

f est positive sur $\mathbb{R}$

$\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx$ converge car on se connaît une intégrale de Riemann de paramètre $c+1 > 1$

D'où

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge

$$\text{Et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x^c} \right]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{A^c} + 1$$

$$= 1$$

On a donc bien une densité.

(2) $\int_1^{+\infty} x^2 \frac{c}{x^{c+1}} dx$ converge car on a une intégrale de Riemann de paramètre $c-1 > 2-1 > 1$

Et donc X admet $\forall$ moment d'ordre ?

Copie anonyme - n°anonymat : 289967

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc une espérance et une variance.

Et :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{c}{c-1} \cdot \frac{1}{x^{c-1}} \right]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{c}{c-1} \times \frac{1}{A^{c-1}} + \frac{c}{c-1}$$

$$= \frac{c}{c-1}$$

De plus

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{c}{c-2} \frac{1}{A^{c-2}} + \frac{c}{c-2}$$

$$= \frac{c}{c-2}$$

Par la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

Et

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2} \\
 &= \frac{c(c-1)^2 - c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2} \\
 &= \frac{c^3 - 2c^2 + c - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2} \\
 &= \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}
 \end{aligned}$$

(3)

Comme f est une densité, pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Si $x < 1$

$$F(x) = 0$$

Si $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \frac{c}{x^{c+1}} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{x^c} \right]_1^x \\
 &= 1 - \frac{1}{x^c}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x^c}\right) \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x)$$

avec $\mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

④ a Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\ln(X) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq e^x) \\ &= \frac{F(e^x)}{F(e^x)} \end{aligned} \quad \text{car la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

- b On a donc :

Si $x < 0$

$$\text{Alors : } e^x < 1$$

Et :

$$G(x) = 0$$

Si $x \geq 0$

$$G(x) = 1 - \frac{1}{e^{cx}}$$

$$\text{On a bien : } Y \sim E(c) = 1 - e^{-cx}$$

- c

```
def simul X(c):  
    import numpy.random as rd  
    import numpy as np  
    y = rd.exponential(c)  
    x = np.log(y)  
    return x
```

défini car la loi exponentielle ne donne que des valeurs positives

P2

⑤

```
def simul 2(c):  
    a = simul X(c)  
    b = simul X(c)  
    return ab
```

⑥

Par produit de convolutions, on a, sous réserve de convergence, en commençant par

une densité de Z

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) dt$$

$$= \int_1^{x-1} f(t) f(x-t) dt$$

car: $\forall t \leq 1, f(t) = 0$

Or: $(x-t) > 1 \Leftrightarrow$

D'ao

$$x-1 > t$$

car

$$\forall t > x-1, f(x-t) = 0$$

$$f_Z(x) = \int_1^{x-1} f(t) f(x-t) dt$$

On a donc

la convergence de l'intégrale, et le produit de convolution est valide

$$f_Z(x) = \int_1^{x-1} \frac{c}{t^{c+1}} \times \frac{c}{(x-t)^{c+1}} dt$$

$$= \int_1^{x-1} \frac{c}{(tx - t^2)^{c+1}} dt$$

⑥ Par indépendance des X_1 et X_2

$$\boxed{E[X_1 X_2]} = E[X_1] \times E[X_2]$$

$$= \frac{c}{(c-1)^2}$$

Par le lemme des coalitions, X_1^2 et X_2^2 sont indépendants

D'où

$$\boxed{E[X_1 X_2]^2} = E[X_1^2] E[X_2^2]$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Par l'ing. Hygens

$$V(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2$$

$$= \frac{c}{(c-2) \cdot 2} - \frac{c^2}{(c-1)^4}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 289967

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c^2(c-1)^4 - c^2(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4} \\
 &= \frac{c^2(c^2 - 2c + 1)^2 - c^2(c^2 - 2c + 4)}{(c-2)^2(c-1)^4} \\
 &= \frac{c^2(c^4 - 2c^2(2c+1) + (2c+1)^2 - c^4 + 2c^3 - 4c^2)}{(c-2)^2(c-1)^4} \\
 &= \frac{c^2(c^4 - 4c^2 + 2c^2 + 2c^3 + 2c + 1 - c^4 + 2c^3 - 4c^2)}{(c-2)^2(c-1)^4} \\
 &= \frac{c^2(2c^3 - 4c^2 + 2c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}
 \end{aligned}$$

⑦-a D'après la question 4-b
pour $i \in \{1, 2, 3\}$

- on sait que

$\gamma_n \rightarrow E(c)$

D'où a , posant F_{γ} leur fonction de répartition,
et F_{γ} celle de cY ; pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 F_{cY_i}(x) &= P(cY_i \leq x) \\
 &= P(Y_i \leq \frac{x}{c}) \\
 &= (1 - e^{-x/c}) \mathbb{1}_{x \geq 0} \\
 &= (1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{x \geq 0}
 \end{aligned}$$

D'où

$cY_i \sim \mathcal{E}(1)$
 Et c'est à dire que :

cY_1 et cY_2 suivent une loi exponentielle de paramètre 1.

- b Par stabilité de loi exponentielle de paramètre 1

$$cY_1 + cY_2 \sim \mathcal{E}(2)$$

⑧ a ...

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 H(x) &= P(Y_1 + Y_2 \leq x) \\
 &= P(cY_1 + cY_2 \leq cx) \\
 &= \frac{1}{K} H(cx)
 \end{aligned}$$

On a donc, par dérivation, en posant $k = k'$ la
dérivée de k et une densité de $cY_1 + cY_2$

$$h(x) = ck(x)$$

Et donc, comme

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

On a:

$$\boxed{h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto c^2 x e^{-c} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$
Si $x \geq 1$

$$F_2(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(X_1 X_2 \leq x)$$

$$= P(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x))$$

$$= P(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$$

$$= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$$

$$= H(\ln(x))$$

car G
fonction
est continue
et strictement
croissante

Si $x < 1$

$$F_2(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(X_1 X_2 \leq x)$$

$$= 0$$

D'où : $f_2(x) = \begin{cases} H(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc, pour $x \geq 1$

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \ln(\ln(x))$$

Et donc

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \ln(\ln(x)) \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x)$$

D'où :

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^{c+1}} \ln(\ln(x)) \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x)$$

9.a

~~$\alpha > 1 \quad \exists \varepsilon > 0,$~~

~~$\alpha = \varepsilon > 1$~~

~~Posons alors, pour~~
 ~~$x \in \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right[$~~

~~$x \in \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right[$~~

~~On a alors :~~

~~$x^{\alpha - \varepsilon} \times \frac{1}{x^\alpha} \ln(x) = \frac{1}{x^\varepsilon} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$~~

~~par C~~

$\alpha > 1$

D'où, $\exists \varepsilon > 0 \quad \alpha - \varepsilon > 1$

Posons alors :

(par exemple $\frac{\alpha-1}{2}$)

$\forall x \in \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right[\quad x^{\alpha - \varepsilon} \times \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$

Copie anonyme - n°anonymat : 289967

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths ED+EC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{On a } x^{\alpha-\varepsilon} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln(x)}{x^\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{D'où } \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right) \text{ par croissance comparée}$$

$$\text{Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}} dx \text{ converge par Riemann, car } \alpha-\varepsilon > 0$$

D'où, par domination de fonctions positives,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \text{ converge}}$$

$$\text{Posons } A > 1, \quad \begin{cases} u: x \mapsto \ln(x) \\ v: x \mapsto \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1; +\infty[\\ v' \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1; +\infty[\end{array} \right.$$

Par intégration par partie vient

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx &= \left[\ln(x) \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right]_1^A \\ &\quad - \int_1^A \frac{1}{(1-\alpha)x^\alpha} dx \end{aligned}$$

Par croissance comparée, et comme : $\ln(1) = 0$
On obtient

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx}$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha-1} \left[-\frac{1}{(\alpha-1)} x^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \right]_1^A$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

↳ On a donc :

$$\boxed{E(X) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{h(x)}{x^c} dx = \frac{c^2}{(c-1)^2}}$$

$$Et \quad \boxed{E(X^2) = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{h(x)}{x^{c-1}} dx = \frac{c^2}{(c-2)^2}}$$

Et on a bien

$$\boxed{V(X) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}}$$

EX 3

①. a On a une variable aléatoire comptant

le nombre de face obtenus avant le premier pile lors de X expériences de Bernoulli indépendantes.

Le nombre de face obtenu avant le 1^{er} pile est un de moins que le rang du 1^{er} pile.
Or, ce rang est donné par X' avec !
 $X' \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$

D'où :

$$X = X' - 1$$

Et donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} X(\Omega) = N \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = (1-p)^n p \end{array}} \quad \begin{array}{l} (\text{car } X \in \mathbb{N}^*) \\ (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X' = n) = (1-p)^{n-1} p) \end{array}$$

$$\boxed{E(X) = E(X' - 1) = E(X') - 1 = \frac{1}{p} - 1}$$

$$\boxed{V(X) = V(X' - 1) = V(X') = \frac{1-p}{p^2}}$$

② Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \boxed{Q=k} &= (3Q = 3k) \\ &= (3k \leq 3Q + R \leq 3k+2) \\ &= (3k \leq X \leq 3k+2) \\ &= \bigcup_{i=0}^2 (X = 3k+i) \end{aligned}$$

- G Des Cars

• $Q(\Omega) = \mathbb{N}^a$

• $k \in \mathbb{N}$, Soit $P(Q=k) = \sum_{i=0}^2 P(X=3k+i)$ - par incompétabilité (o-additivité)

$$\begin{aligned} &= ((1-p)^{3k} + (1-p)^{3k+1} + (1-p)^{3k+2}) p \\ &= (1-p)^{3k} ((1-p)^2 + (1-p)) p \\ &= q^{3k} (1 + 1 - 2p + p^2 + 1 - p) p \\ &= q^{3k} (3 - 3p + p^2) p \\ &= q^{3k} (3p - 3p^2 + p^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } q^3 &= (1-p)^3 = (1-p)^2 (1-p) \\ &= (1 - 2p + p^2) (1-p) \\ &= 1 - 2p + p^2 - p + 2p^2 - p^3 \\ &= 1 - 3p + 3p^2 - p^3 \\ &= 1 - p^3 \end{aligned}$$

$$= q^{3k} + q^{3k+1} + \dots + q^{3k+2} + \dots$$

$$= q^{3k} (1 + q + q^2 + \dots)$$

Or $p + qp + q^2p = p + p(1-p) + (1-p)^2p$

$$= p + p - p^2 + p - 2p^2 + p^3$$

$$= 3p - 3p^2 + p^3$$

$$1 - q^3 = 1 - (1-p)^3$$

$$= 1 - (1 - 2p + p^2)(1-p)$$

$$= 1 - 1 + 2p - p^2 + p - 2p^2 + p^3$$

$$= 3p - 3p^2 + p^3$$

Or

Eff donc $P(Q=k) = q^{3k} (1 - q^3)$

$$Q \sim \text{BN}(1 - q^3)$$

(3) $P(R=0) = P(X=3Q)$

Copie anonyme - n°anonymat : 289967

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 30	Session : 2023
	Épreuve de : Maths EDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
(5) - a On a dans la question 1 montré que : $X = X' - 1 \text{ avec } X' \sim \mathcal{G}(p)$ En effet, X est le rang juste avant l'apparition de premier succès lors d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p. D'où, comme rd. géométrique de paramètre p, si on a une loi géométrique de paramètre p, on a l'a. d'une simulation de X. def div(p): $X = \text{simul}(X(p))$$Q = \text{floor}(X/3)$$R = X - Q$$\text{return } (X, Q, R)$			
21/32			

Problème

(1) Soit $k \in \mathbb{Z}$

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{n2\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= h(k)$$

On a de plus $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

D'où $\boxed{h \in F_n}$

(2) • $F_n \in F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, un espace vectoriel
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in F_n$

$$\lambda f + g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N},$$

$$(\lambda f + g)(k+n) = \lambda f(k+n) + g(k+n)$$

$$= \lambda f(k) + g(k)$$

$$= (\lambda f + g)(k)$$

D'où : $\lambda f + g \in F_n$

• Soit 0 l'élément nul de $F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ (la fonction nulle)
Soit $k \in \mathbb{N}$

$$0_{F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})}(k+n) = 0 = 0_{F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})}(k)$$

D'où $0_{F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})} \in F_n$

Par la caractérisation des sous espaces vectoriels,
 F_n est un sous espace vectoriel de E

(3) • $f(r) = f(0 \times q + r)$
 Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons que : $f(r) = f(nq + r)$
 Alors :

On a : $f(nq + r + n) = f(r + n) = f(r)$

• Par récurrence :
 $\forall q \in \mathbb{N}, f(r) = f(nq + r)$

On peut généraliser ce résultat aux entiers
 en procédant par récurrence sur les négatifs :

$\forall q \in \mathbb{N}, f(qn + r) = f(r) \Rightarrow f(q(n-1) + r) = f(r)$

On a donc :

$f(k) = f(r)$

(4) Par la question 3, on sait que :

$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists ! r \in [0, n-1], f(k) = f(r)$

Soit $k \in \mathbb{Z}$

$f(k) = f(r)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(r)$$

car les
 autres $e_i(k)$ sont nuls

D'où:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)}$$

car e_i est périodique
de la même période
que f

On a donc:

$$\forall f \in F_n, f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i$$

Donc $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est une famille génératrice
de F_n

De plus:

$$\text{Soit } (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}), \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i = 0$$

Alors, en évaluant en $\{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

...

$$\alpha_{n-1} = 0$$

D'où $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre

C'est donc une base de F_n

c Comme B_n est une base de F_n , il y a
unicité des coordonnées des fonctions de F_n
dans B_n

$$\text{Ainsi, comme: } f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i$$

On en déduit que un élément quelconque f de F_n
a pour coordonnées dans B_n : $(f(0), \dots, f(n-1))$

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) • $\langle f, g \rangle : F_n^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme linéaire
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $(f, g, h) \in F_n^3$

$$\bullet \quad \langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) = \langle g, f \rangle \quad \text{donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est symétrique}$$

$$\bullet \quad \langle \lambda f + g, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(k) h(k) \\ = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k) h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k) h(k) \\ = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire
et bilinéaire par symétrie
des variables

$$\bullet \quad \langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k))^2 \geq 0$$

$$\bullet \quad \langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (f(k))^2 = 0 \quad \text{donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est positif}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{I} \cdot 0, n-1 \mathbb{I}, f(k) = 0$$

$$\Rightarrow f = 0 \quad \checkmark \quad \text{car par } n \text{ périodicité, } \forall i \in \mathbb{Z} \quad f(i) = 0$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur F_n

- b Soit $(i, j) \in \{0, n\}^2$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k)$$

Si $i=j$

$$\langle e_i, e_j \rangle = e_i^2(i) = 1 \times 1 = 1$$

Si non

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_0 e_i(i) e_j(i) + e_j(j) e_i(j)$$

B a bien une norme parce produit scalaire

- c Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \times \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{(2k+1)b}{2}) - \sin(a + \frac{(2k-1)b}{2})$$

On reconnaît des sommes télescopiques

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \left(\sum_{k=1}^n \sin(a + \frac{(2k-1)b}{2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{(2k-1)b}{2}) \right)$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \left(\sin(a + \frac{(2n-1)b}{2}) - \sin(a - \frac{b}{2}) \right)$$

$$- d \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4\pi}{n} b + 0\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{n2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \times \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{2})}$$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) + 1 \right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\|h\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

pour $k \in \{0, n-1\}$

$$\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1$$

$$\frac{n-1}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

⑥ - a Soit $f \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \in \mathbb{Z} \quad Df(k+n) &= f(k+1+n) - f(k+n) \\ &= f(k+1) - f(k) \\ &= Df(k) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{Df \in \mathcal{F}_n}$

- b Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D(\lambda g_1 + g_2) &= (\lambda g_1 + g_2)(k+1) - (\lambda g_1 + g_2)(k) \\ &= \lambda g_1(k+1) + g_2(k+1) - \lambda g_1(k) - g_2(k) \\ &= \lambda D(g_1) + D(g_2) \end{aligned}$$

De plus $D: \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ par la question précédente
Alors $\boxed{D \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_n)}$

- c Soit $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Dh(k) &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 289967

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 20	Session : 2023
	Épreuve de : Maths ED/EC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
-d- $\ Dh\ ^2 = \sum_{k=0}^{n-1} -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$			
⑦ a Soit $g, g \in \mathbb{T}_n^2$, $\langle g, \Delta g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) (-g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))$ $\langle Dg, Dg \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (g(k+1) - g(k)) \times (g(k+1) - g(k))$ $= \sum_{k=0}^{n-1} g(k+1) (g(k+1) - g(k)) - \sum_{k=0}^{n-1} g(k) (g(k+1) - g(k))$ $= \sum_{k=1}^n g(k) (g(k) - g(k-1)) - \sum_{k=1}^n g(k-1) (g(k-1) - g(k))$			
29/39			

$$\begin{aligned}
 Or: f(n)(g(n) - g(n-1)) &= g(0)(g(0) - g(-1)) \\
 &\text{par a-périodicité} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k) - g(k-1)) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k+1) - g(k)) \\
 &= -\langle f, \Delta g \rangle
 \end{aligned}$$

$$D'où \boxed{\langle f, \Delta g \rangle = -\langle \Delta f, g \rangle}$$

- Soit $(f, g) \in \mathbb{F}_n^2$

$$\langle f, \Delta(g) \rangle = -\langle \Delta f, g \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta(f), g \rangle &= -\langle \Delta g, \Delta f \rangle \\
 &= -\langle \Delta f, \Delta g \rangle
 \end{aligned}$$

D'où

$$\langle f, \Delta(g) \rangle = \langle \Delta(f), g \rangle$$

Δ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{F}_n$

- Soit f un vecteur propre de Δ associé à λ
une valeur propre

$$\langle f, \Delta(f) \rangle = \dots = \langle f, \lambda f \rangle = \lambda \|f\|^2$$

$$Or \quad \lambda \|f\|^2 = -\langle \Delta f, f \rangle$$

$$Et \quad \lambda = -\frac{\|\Delta f\|^2}{\|f\|^2} \quad \downarrow \text{ car } f \neq 0 \text{ et } \|f\| \neq 0$$

$$D'où \boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$$

