



A7-00082
542585
Maths S

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2023

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I]

1)

a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

Soit $k \in \mathbb{N}$, soit f une densité de X , on a $f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \quad (\text{d'après le théorème de transfert}) \\ &= \int_0^1 x^k dx \\ &= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k f(x)| dx = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ donc converge

D'où : X admet des moments de tout ordre et $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k(X) = \frac{1}{k+1}$

b) Soient $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^{++}$, $k \in \mathbb{N}$, f une densité de X .

On a : $f: x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, sous réserve de convergence.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k f(x)| dx &= \int_0^{+\infty} |x^k \lambda e^{-\lambda x}| dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x^k e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda \frac{(x)^k}{\lambda^k} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du \quad \text{où } u = \lambda x \text{ en changement de variable } e^1 \\ &= \frac{1}{\lambda^k} \Gamma(k+1) = k! \times \frac{1}{\lambda^k} \end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x) dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx = \frac{k!}{\lambda^k}$

Donc X admet un moment de tout ordre et $\forall k \in \mathbb{N}, m_k(X) = \frac{k!}{\lambda^k}$

Partie II :

2) On a: $H_3 = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \end{pmatrix}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: ${}^t W H_n W = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \mu_{i+j-2} \alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \mu_{n+j-2} \alpha_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{i+j-2} \alpha_i \alpha_j$ CQFD

De plus: $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx = E(P(X)^2)$ (d'après le théorème de transfert et du fait que $\forall x \notin I, f(x) = 0$)

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X^{j-1}\right)\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i X^{i-1} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X^{j-1}\right)\right)\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j X^{i+j-2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j E(X^{i+j-2})$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \mu_{i+j-2}$$

$$= {}^t W H_n W \quad \text{CQFD}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

H_n est symétrique donc admet au moins une valeur propre d'après le théorème spectral

Soit $\lambda \in \text{Sp}(H_n)$, Soit $W \in E_\lambda(H_n)$ tel que $H \neq 0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})}$

$$\text{Alors } {}^t W H_n W = {}^t W \lambda W = \lambda \|W\|^2$$

$$\text{Or d'après la 3) } {}^t W H_n W = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) dx$$

$$\geq 0 \text{ car } \int \forall x \in \mathbb{R}^+ P(x)^2 \geq 0 \\ f \text{ est une densité donc positive.}$$

Donc $\lambda \|W\|^2 \geq 0$ Donc $\lambda \geq 0$ car $\|W\|^2 > 0$ car $H \neq 0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})}$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Sp}(H_n) \subset \mathbb{R}^+}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Soit } W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t W G_n W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j u_{i+j-1}$$

Se n'arrive pas à trouver un polynôme P qui conviendrait

6) Nous passons cette question

7) a) Nous passons cette question et nous admettons le résultat

7) b) Soit $n \in \mathbb{N}^+$, soit $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\begin{aligned} (u_n)^{-\frac{\theta}{n}} &= (E(X^n))^{-\frac{\theta}{n}} = \left(\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt \right)^{-\frac{\theta}{n}} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{n}{\theta} \right)^{\frac{n}{\theta}} e^{t^\theta} e^{-\frac{n}{\theta}} f(t) dt \right)^{-\frac{\theta}{n}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après la 7a)} \\ \text{et car } f \text{ est} \\ \text{positive} \end{array} \right) \\ &= \left(\frac{\theta}{n} \right) e \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt \right)^{-\frac{\theta}{n}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(u_n)^{-\frac{\theta}{n}}} \leq \frac{\theta}{n} e \int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt$ car $\int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt$ converge

De plus $0 \leq \sqrt[n]{(u_n)^{-\frac{\theta}{n}}} \leq \frac{\theta}{\sqrt[n]{n}} e \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{t^\theta} dt \right)^{-\frac{\theta}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\sqrt[n]{(u_n)^{-\frac{\theta}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $u_n^{-\frac{\theta}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)$

Je ne vois pas comment aboutir...

8)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
```

```
def test_stieltjes(U):
```

```
    N = len(U) - 1
```

```
    m = 1 + N // 2
```

```
    H = np.zeros((m, m))
```

```
    for n in range(1, m+1):
```

```
        for i in range(0, m-1):
```

```
            H[i, m-1] = U[i+m-1]
```

```
            H[m-1, i] = U[i+m-1] # car H est symétrique
```

```
        valp = al.eigvalsh(H)
```

```
        for k in range(0, m-1):
```

```
            if (valp[k] <= 0):
```

```
                return 0
```

```
    return 1
```

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 16	Session : 2023
	Épreuve de : MATHS APPROFONDIES		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

II]2)

9) Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $t \in \mathbb{R}^+$

$$\text{On a : } \begin{cases} 0 \leq |t^n e^{-t} \sin(t)| \leq |t^n e^{-t}| = t^n e^{-t} & \text{car } t \geq 0 \\ 0 \leq |t^n e^{-t} \cos(t)| \leq |t^n e^{-t}| = t^n e^{-t} \end{cases}$$

Or $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge d'après la 1)b) car c'est le moment d'ordre n d'une loi exponentielle de paramètre 1

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives :

$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t) dt$ convergent absolument donc converge, donc existent.

10)

$$\begin{aligned} \text{Soit } A \in \mathbb{R}^+, \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt &= [-e^{-t} \sin(t)]_0^A + \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt \quad (\text{IPP avec des fonctions } C^1) \\ &= -e^{-A} \sin(A) + [-e^{-t} \cos(t)]_0^A - \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt \quad (\text{De même}) \\ &= -e^{-A} \sin(A) - e^{-A} \cos(A) + 1 - \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2 \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt = -e^{-A} (\sin(A) + \cos(A)) + 1$$

$$\text{Or } |-e^{-A} (\sin(A) + \cos(A))| \leq 2e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème des gendarmes : $-e^{-A} (\sin(A) + \cos(A)) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} 2 \int_0^A e^{-t} \sin(t) dt = 1$

Donc $2 S_0 = 1$

Donc $S_0 = \frac{1}{2}$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $A \in \mathbb{R}^{++}$

On a: $(n+1) \int_0^A t^n e^{-t} \cos(t) dt = \int_0^A (n+1)t^n e^{-t} \cos(t) dt$ avec fonctions $\mathcal{C}^1$
 $\downarrow$
 (IPP)

$$= [t^{n+1} e^{-t} \cos(t)]_0^A - \int_0^A t^{n+1} (-\sin(t) e^{-t} - e^{-t} \cos(t)) dt$$

$$= A^{n+1} e^{-A} \cos(A) + \int_0^A t^{n+1} e^{-t} (\sin(t) + \cos(t)) dt$$

On $|A^{n+1} e^{-A} \cos(A)| \leq A^{n+1} e^{-A} \rightarrow 0$ par croissance comparée.

Donc par le théorème des gendarmes $A^{n+1} e^{-A} \cos(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

Donc en passant à la limite on a:

$$\begin{aligned} (n+1) T_n &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} (\sin(t) + \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \sin(t) dt + \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \cos(t) dt \\ &= T_{n+1} + S_{n+1} \end{aligned}$$

(de même que ci-dessus)

On a: $(n+1) \int_0^A t^n e^{-t} \sin(t) dt = [t^{n+1} e^{-t} \sin(t)]_0^A - \int_0^A t^{n+1} (\cos(t) e^{-t} - e^{-t} \sin(t)) dt$

$$= A^{n+1} e^{-A} \sin(A) - \int_0^A t^{n+1} \cos(t) e^{-t} dt + \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t) dt$$

Comme ci-dessus, $A^{n+1} e^{-A} \sin(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

D'où $(n+1) S_n = S_{n+1} - T_{n+1}$

12) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (n+1) M V_n &= \frac{1}{2} (n+1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (n+1) \begin{pmatrix} S_n + T_n \\ T_n - S_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{S_n + T_n}{2} (n+1) \\ \frac{T_n - S_n}{2} (n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or d'après la 11) en faisant (3) + (4) on obtient :

$$2 S_{n+1} = (n+1) (T_n + S_n) \quad \text{Donc } S_{n+1} = \frac{(n+1) (T_n + S_n)}{2}$$

En faisant (3) - (4) on obtient: $2 T_{n+1} = (n+1) (T_n - S_n)$

$$\text{i.e. } T_{n+1} = \frac{(n+1) (T_n - S_n)}{2}$$

$$\text{Donc } \boxed{(n+1) M V_n = \begin{pmatrix} S_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}}$$

13) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{D'après la 12) } V_{n+1} &= (n+1) M V_n \\ &= (n+1)n M^2 V_{n-1} \\ &= (n+1)n(n-1) M^3 V_{n-2} \\ &\vdots \\ &= (n+1)! M^{n+1} V_{n-n} \\ &= (n+1)! M^{n+1} V_0 \end{aligned}$$

par itération qui se formalise par récurrence

De plus $V_0 = 0! M^0 V_0$

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V_n = n! M^n V_0}$$

$$14) \text{ On a: } M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \underline{M^4 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} I_2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{4n+3} = (4n+3)! (M^4)^n M^3 V_0 = (4n+3)! \left(-\frac{1}{4}\right)^n M^3 V_0$$

De plus $M^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } V_{4n+3} = (4n+3)! \left(-\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (4n+3)! \left(-\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \quad * \text{ signifie ne nous intéresse pas}$$

$$\text{On } V_{4n+3} = \begin{pmatrix} S_{4n+3} \\ * \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \boxed{S_{4n+3} = 0}$$

15) $t \mapsto t^4$ est bijective et $\mathcal{C}^1$ donc le changement de variable est valide.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{On a : } \int_0^{+\infty} x^n g(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{\frac{1}{4}}} \sin(x^{\frac{1}{4}}) dx$$
$$= \int_0^{+\infty} 4t^3 t^{4n} e^{-t} \sin(t) dt \quad x=t^4$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} t^{4n+3} e^{-t} \sin(t) dt$$

$$= 4 \times S_{4n+3}$$

$$= 4 \times 0 \quad (\text{d'après la 14})$$

$$= \underline{0}$$

16) X Nous posons la question et nous admettons le résultat.

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$17) \text{ On pose } G_1 : x \mapsto \begin{cases} g_1(x) \times \frac{1}{\int_0^{+\infty} g_1(t) dt} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G_2 : x \mapsto \begin{cases} g_2(x) \times \frac{1}{\int_0^{+\infty} g_2(t) dt} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : g_1 et g_2 sont positives et distinctes et
 $\int_0^{+\infty} g_1(x) dx = \int_0^{+\infty} g_2(x) dx$ donc nécessairement $\begin{cases} \int_0^{+\infty} g_1(x) dx \neq 0 \\ \int_0^{+\infty} g_2(x) dx \neq 0 \end{cases}$
(d'après la 16))

On remarque que G_1 et G_2 sont deux densités distinctes.
On considère X_1 et X_2 qui admettent pour densité G_1 et G_2
qui sont deux variables aléatoires distinctes car leur densité
sont distinctes et $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ainsi X_1 et X_2 sont deux solutions au problème $M^*(J)$
Donc il n'y a pas unicité des solutions.

III] 1)

18) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a } u_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n f(x) dx \quad \text{car } J = [0, 1]$$

Supposons par l'aburde que $\forall x \in J, f(x) = 0$ alors
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0 \neq 1$ absurde.

Donc f n'est pas nulle sur J .

De plus f est positive sur J car c'est une densité.

Donc $x \in [0,1] \mapsto x^n f(x)$ est positive et n'est pas la fonction nulle et est continue sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 x^n f(x) dx > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n > 0$

19) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} &= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} E(X^{i+k}) \\ &= E\left(\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k X^{i+k}\right) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= E\left[X^i \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-X)^k\right] \\ &= E(X^i (1-X)^j) \quad (\text{binôme de Newton}) \end{aligned}$$

Or $J = [0,1]$, donc $X(\Omega) =]0,1[$ (on peut mettre un intervalle ouvert car X est à densité)
donc $(1-X)(\Omega) =]0,1[$

donc $(X^i (1-X)^j)(\Omega) \subset]0,1[$

Donc $E(X^i (1-X)^j) > 0$

Donc $\sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0$

20) $\forall x \in]0,1[, x^3 < x^2$ et $0^3 < 0^2$ et $1^3 < 1^2$

Or f est positive et non nulle (voir question 18))

De plus $x \mapsto x^3 f(x)$ et $x \mapsto x^2 f(x)$ sont $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 x^3 f(x) dx < \int_0^1 x^2 f(x) dx$

Donc $\mu_3 < \mu_2 = \frac{1}{3}$ i.e. $\mu_3 < \frac{1}{3}$

Il faudrait encore montrer que $u_3 > \frac{1}{6} \dots$

21) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \frac{u_n}{n^\alpha} &= \frac{1}{n^\alpha} E(X^n) = E\left(\frac{X^n}{n^\alpha}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{n^\alpha} f(x) dx \quad (\text{d'après le théorème de transfert}) \\ &\leq \frac{1}{n^\alpha} \times \underbrace{\left(\max_{t \in [0,1]} f(t)\right)}_{\in \mathbb{R}} \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n^\alpha} \times \max_{t \in [0,1]} f(t) \times \frac{1}{n+1} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha} \max_{t \in [0,1]} f(t) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \max_{t \in [0,1]} f(t) \end{aligned}$$

Or $\alpha+1 > 1$ (car $\alpha > 0$) donc $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \left(\max_{t \in [0,1]} f(t)\right)$ converge

Par comparaison de séries de termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^\alpha} \times \frac{1}{n+1} \max_{t \in [0,1]} f(t)\right)$ converge

Par comparaison de séries de termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

Notons $M = \min \{ f(t) \text{ tel que } f(t) \neq 0 \text{ où } t \in [0,1] \}$ ce minimum existe car f est non nulle.

On pose $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \frac{u_n}{n^\alpha} &= u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \\ &\geq M \times \int_0^1 x^n dx \\ &= M \times \frac{1}{n+1} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{M}{n} \end{aligned}$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n}$ diverge car $M \neq 0$

Par comparaison de séries de termes positifs : $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ diverge lorsque $\alpha = 0$

III] 2)

22) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{On a: } \Delta_{n,0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u_{n+k-0}$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} u_{n+0}$$

$$= u_n$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n,0} = u_n}$

23) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

On a:

$$\Delta_{n+1,j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+1+k-j-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \left(\binom{j}{k} + \binom{j}{k-1} \right) u_{n+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k-1} u_{n+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k-1} u_{n+k-j} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \binom{j}{j+1}=0 \\ \text{et } \binom{j}{-1}=0 \end{array} \right)$$

$$= \Delta_{n,j} + \sum_{k=0}^j (-1)^{k+1} \binom{j}{k} u_{n+k+1-j} \quad (\text{changement de variable})$$

$$= \Delta_{n,j} - \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}$$

$$= \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}$$

Donc $\boxed{\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 16

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : MATHS APPROFONDIES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

24)

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
    N = len(U)-1
    Delta = np.zeros((N+1), (N+1))
    info = -1
    for h in range(0, N):
        Delta[h, 0] = U[h]
        if ((Delta[h, 0] <= 0) and (info == -1)):
            info = h
        for j in range(1, N-h):
            Delta[h, j] = Delta[h-1, j] - Delta[h, j-1] # d'après # la 23)
            if ((Delta[h, j] <= 0) and (h < info)):
                info = h
    return (info, Delta)
```

25) Je passe la question.

III) 3)

26) f_1 et f_2 sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$

Donc $h = f_2 - f_1$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$

Donc la dérivée de h est continue sur $[0, 1]$, donc est bornée et atteint ses bornes.

Donc $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [0, 1], |h'(x)| \leq M$

On pose $K = |M|$ alors $\forall x \in [0, 1], |h'(x)| \leq K$

⊕ après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, 1], \left| \frac{R(x) - R(y)}{x - y} \right| \leq K \text{ i.e. } |R(x) - R(y)| \leq K|x - y| \text{ où } K \in \mathbb{R}^+ \text{ car } K = |M|$$

27) Soient $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}^*$

a) On a : $Y_n(\omega) \in [0, n]$ Donc $Z_n(\omega) = \frac{Y_n}{n}(\omega) \in [0, 1]$, soit $\omega \in \Omega$
 Donc d'après la 26), on a : $|R(x) - R(Z_n(\omega))| \leq |x - Z_n(\omega)| \times K$

$$\text{Donc } E(|R(x) - R(Z_n)|) \leq K E(|x - Z_n|) \text{ (raison de l'espérance)}$$

On se par l'inégalité triangulaire :

$$E(|R(x) - R(Z_n)|) \geq |E(R(x) - R(Z_n))| = |R(x) - E(R(Z_n))|$$

$$\text{De plus : } K E(|x - Z_n|) = K E(|Z_n - x|)$$

$$\text{⊕ où } |R(x) - E(R(Z_n))| \leq K E(|Z_n - x|)$$

Soit $(x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$

$$b) E(|Z_n - x|) \leq \sqrt{E((Z_n - x)^2)} \Leftrightarrow E(|Z_n - x|)^2 \leq E((Z_n - x)^2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq E(|Z_n - x|^2) - E(|Z_n - x|)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq V(|Z_n - x|)$$

ce qui est vrai car une variance est toujours positive

$$\text{Donc } E(|Z_n - x|) \leq \sqrt{E((Z_n - x)^2)}$$

$$\text{Donc } K \times E(|Z_n - x|) \leq K \sqrt{E((Z_n - x)^2)} \text{ car } K \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Donc } |R(x) - E(R(Z_n))| \leq K \sqrt{E((Z_n - x)^2)} \text{ (d'après la 27/a)}$$

28) Soit $(x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} |h(x) - \hat{h}_n(x)| &= \left| h(x) - \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{h(x)}{n} - h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{h(x)}{n} - h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \end{aligned}$$

Dependant $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ donc $\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2}$ donc $\boxed{K \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}}$ (car $K \geq 0$)

29) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \hat{h}_n(x) h(x) dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} h(x) x^k (1-x)^{n-k} dx \\ &= \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \int_0^1 h(x) x^k (1-x)^{n-k} dx \end{aligned}$$

je n'arrive à conclure, on admet le résultat

30)

~~⊕ après la 28)~~

~~$$|h(x) - \hat{h}_n(x)| \int_0^1 |h(t)| dt \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(t)| dt \text{ car } \int_0^1 |h(t)| dt > 0$$~~

⊕ après la 28)

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |h(x) - \hat{h}_n(x)| |h(x)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} |h(x)|$$

$$\text{Donc } |h(x)^2 - \hat{h}_n(x) h(x)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} |h(x)|$$

$$\text{Donc } \int_0^1 |h(x)^2 - \hat{h}_n(x) h(x)| dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx$$

On se par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |h(x)^2 - \hat{h}_n(x) h(x)| dx &\geq \left| \int_0^1 h(x)^2 dx - \int_0^1 \hat{h}_n(x) h(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 h(x)^2 dx \right| \text{ d'après la 29} \\ &= \int_0^1 h(x)^2 dx \text{ car } \forall x \in [0, 1], h(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\int_0^1 h^2(x) dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx$

31) D'après la 30) : $0 \leq \int_0^1 h^2(x) dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

D'après le théorème des gendarmes : $\int_0^1 h^2(x) dx = 0$

Or h^2 est positive et continue sur $[0,1]$

Donc $\forall x \in [0,1], h^2(x) = 0$

Donc $\forall x \in [0,1], h(x) = 0$

Donc $\forall x \in [0,1], f_1(x) = f_2(x)$ Donc $f_1 = f_2$

Donc X_1 et X_2 ont la même loi.

Dans le cas $I = [0,1]$, le problème $H^*(I)$ admet une unique solution

III 4)

32) On pose $\forall x \in [-1,1], g(x) = e^x - 1 - x$
 g est dérivable sur $[-1,1], \forall x \in [-1,1], g'(x) = e^x - 1$
 $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

D'où :

x	-1	0	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

0

Donc $\forall x \in [-1,1], g(x) \geq 0$ i.e. $e^x - 1 - x \geq 0$

Posons $h: x \in [-1,1] \mapsto e^x - 1 - x - cx^2$ où $c \in \mathbb{R}^+$

Je n'ai pas le temps de finir il faudrait étudier la fonction...

FIN.