

A7-00282
623978
Maths 2S



Code épreuve : 283

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Maths 2 HEC ESCP

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Questions préliminaires

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Par définition

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

$$\text{donc } \frac{nx - 1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n}$$

$$\text{Or } \frac{nx - 1}{n} = x - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

$$\text{Et } \frac{nx}{n} = x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

$$\text{donc par théorème d'encadrement } \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$$

$$\text{donc } n - \frac{n}{2} + 1 > n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq n - \frac{n}{2}$$

$$0.5n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{2n - n}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc par théorème de comparaison,

$$\underline{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

Première partie

3a) Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\cos(\arcsin(x))$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}$$

$$= \underline{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\text{car } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1)$$

b) arcsin est la bijection réciproque de sin
et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$

donc arcsin est bien continue sur $[-1, 1]$,
dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[,$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{d'après } q^0 \text{ 3a)}$$

4 a) ~~G est~~ $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$,
dérivable sur $]0, 1[$ et à valeurs dans
 $[0, 1]$.

$x \mapsto \arcsin(x)$ est également continue
sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$
(q° 3b)

donc par composition, G est continue sur $[0, 1]$,
dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[$,

$$G'(x) = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$b) \forall x \in]0, 1[,$$

$$g'(x) = - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$= \frac{1}{x(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x - 1 + x}{\sqrt{1-x} \sqrt{x} x(1-x)}$$

$$0 \text{ car } x \in]0, 1[$$

donc g est strictement

$$4b) \quad \forall x \in]0, 1[.$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} (1 - 2x) \frac{1}{\sqrt{(x - x^2)}}$$

$$x - x^2$$

$$= \frac{x - \frac{1}{2}}{(x - x^2)^{3/2}}$$

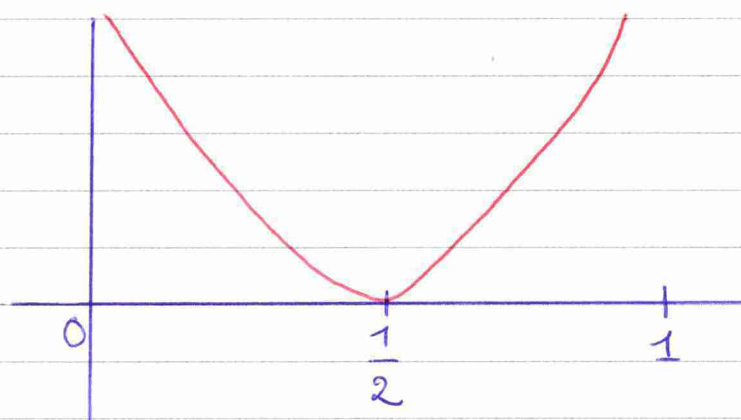
$$> 0 \text{ car } x \in]0, 1[$$

donc ~~g~~ est on peut tracer le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	$+\infty$	-	$+\infty$
g		2	

Copie anonyme - n°anonymat : 623978

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Maths 2		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			



5a) $\circ f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
 $\circ f$ est positive sur $\mathbb{R}$.) d'après q°4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{\pi} g(t) dt$$

Soit $(A, B) \in]0, 1[/ A < B$.

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{1}{\pi} g(t) dt &= \left[\frac{1}{\pi} 2 \operatorname{arcsin}(\sqrt{x}) \right]_A^B \\ &= \frac{1}{\pi} 2 \left(\operatorname{arcsin}(\sqrt{B}) - \operatorname{arcsin}(\sqrt{A}) \right) \end{aligned}$$

En faisant tendre $A \rightarrow 0$ et $B \rightarrow 1$ on obtient

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 1$$

(car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(0) = 0$)

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1

donc f est une densité de probabilité

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \frac{1}{\pi} g(x) dx$$

$$= \int_0^1 x \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

en posant $u = 1-x$ (affine), cette intégrale est de même nature que

$$\int_1^0 \frac{(1-u)}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-u)u}} (-1) du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\pi} (1-u) \frac{1}{\sqrt{(1-u)u}} du$$

Soit $(A, B) \in]0, 1[$ / $A < B$

$$\int_A^B \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} - \frac{u}{\sqrt{(1-u)u}} \right) du$$

$$\text{denc } 2 \int_A^B \frac{1}{\pi} \frac{u}{\sqrt{(1-u)u}} du = \int_A^B \underbrace{\frac{1}{\pi} g(u)}_{=f(u)} du$$

$$\text{de } \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ B \rightarrow 1}} 2 \int_A^B \frac{1}{\pi} g(u) u du = 1$$

donc X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

$$6a) V(\omega) = [0, 1],$$

$$\forall t \leq 0, F_V(t) = 0$$

$$\forall t \geq 1, F_V(t) = 1$$

Soit $t \in [0, 1]$,

$$F_V(t) = P(V \leq t) = P\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \sqrt{t}\right) \quad \begin{array}{l} \text{par stricte croissance de } \sin \text{ sur } [0, 1] \end{array}$$

$$= P\left(\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \arcsin(\sqrt{t})\right) \quad \begin{array}{l} \text{par stricte croissance} \\ \text{de } \arcsin \text{ sur } [-1, 1] \end{array}$$

$$= P\left(\frac{\pi}{2} \cup \leq \arcsin(\sqrt{t})\right)$$

$$= P\left(\cup \leq \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})\right)$$

$$= F_U\left(\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})$$

donc une densité de U est donnée par

$\forall t \in \mathbb{R},$

• si $t \leq 0$ ou $t \geq 1$, $f_U(t) = 0$

• si $t \in [0, 1]$, $f_U(t) = F'_U\left(\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})\right)$

$$= \frac{1}{\pi} 2 \arcsin(\sqrt{t})$$

$$= \frac{1}{\pi} G'(t)$$

$$= \frac{1}{\pi} g(t) \quad (q^o 4a)$$

donc U suit la loi arcsinus

b)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def arcsinus():
    U = rd.rand()
    U = np.arcsin(((np.pi)/2)*U)**2
    return U
```

Copie anonyme - n°anonymat : 623978

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 28

Session : 2023

Épreuve de : Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) ~~G~~ d'après la q° 4a), ~~G~~ est ~~defi~~
continue sur $[0, 1]$, dérivable sur
 $]0, 1[$.

Or $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset [0, 1]$ donc

et $\forall x \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$,

$$|G'(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \right| \leq \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}} \right)}$$

~~donc d'après l'inégalité des accroissements~~

$$|G'(x)| \leq g\left(\frac{k}{n}\right)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8) ~~$\forall n \in \mathbb{N}$ (à partir d'un certain rang)~~

~~$$1 \leq a_n \leq \lfloor n\alpha \rfloor$$~~

~~donc
$$\frac{1}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$$~~

~~Or
$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$~~
~~(q° 1)~~

~~donc par théorème d'encadrement :~~

~~$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$~~

8) On peut prendre, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{n}$

En sommant l'inégalité de la q° 7, on obtient :

$$\sum_{l=a_n}^{\lfloor n\alpha \rfloor} G\left(\frac{l+1}{n}\right) - G\left(\frac{l}{n}\right) \leq \sum_{l=a_n}^{\lfloor n\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{l(n-l)}}$$

$$\leq \sum_{l=a_n}^{\lfloor n\alpha \rfloor} G\left(\frac{l}{n}\right) - G\left(\frac{l+1}{n}\right)$$

donc par télescopage, on obtient :

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - G\left(\frac{an}{n}\right)$$

$$< \sum_{l=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{l(n-l)}} < G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{an-1}{n}\right)$$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + 0 \quad (q^0 = 1) \\ \frac{an}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par hypothèse.} \end{cases}$$

donc par continuité de G sur $[0, 1]$. ($x \in]0, 1[$)

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right) - G\left(\frac{an}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x) - G(0) = G(x) - 0$$

de même, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $\frac{an}{n} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc par continuité de G sur $[0, 1]$,

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{an}{n} - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow G(x) - 0$$

donc par théorème d'encadrement :

$$\sum_{l=an}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{l(n-l)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 623978

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Maths 2		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Deuxième partie

9) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$Y_i(\omega) = \{0, 1\}$$

$$P(Y_i = 1) = P\left(\frac{1}{2}(X_i + 1) = 1\right)$$

$$= P(X_i + 1 = 2)$$

$$= P(X_i = 1) = 0$$

donc $Y_i \rightarrow B(0)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{2}(S_n + n)(\omega) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{n}{2}\right\}$$

$$\in [0, n] = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

$\forall l \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}(S_n + n) = l\right) &= P\left(\frac{1}{2}((X_1 + \dots + X_n) + n) = l\right) \\ &= P\left(\frac{1}{2}((X_1 + 1) + (X_2 + 1) + \dots + (X_n + 1)) = l\right) \\ &= P(Y_1 + \dots + Y_n = l) \end{aligned}$$

Or les $(X_i)_{i \in \pi_1, n}$ sont mutuellement indépendantes
 donc d'après le lemme des coalitions,
 les $(Y_i)_{i \in \pi_1, n}$ sont mutuellement indépendantes,
 donc par stabilité de la loi binomiale,

$$Y_1 + \dots + Y_n \rightarrow B(n, \theta)$$

$$\text{ie } P\left(\frac{1}{2}(2n + n) = k\right) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

$$10) S_1(\omega) = X_1(\omega) = \{-1, 1\}$$

$$S_2(\omega) = X_1 + X_2(\omega) = \{-2, 0, 2\}$$

$$P([S_1 = -1] \cap [S_2 = 2])$$

$$= P([X_1 = -1] \cap [X_1 + X_2 = 2])$$

$$= P([X_1 = -1] \cap [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$$

$$= 0 \quad \text{car } [X_1 = -1] \cap [X_1 = 1] = \emptyset.$$

$$\text{Or } P(S_1 = -1) \neq 0$$

$$\text{et } P(S_2 = 2) \neq 0$$

$P(S_1 = -1)P(S_2 = 2) \neq P([S_1 = -1] \cap [S_2 = 2])$
 grâce à ce contre-exemple, on montre que
 $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas mutuellement
indépendantes

$$11) \quad P\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right) \leq 0 \leq \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right)\right)$$

$$= P\left(-t\alpha \leq \sqrt{n}\left(-\bar{S}_n + 2\theta - 1\right) \leq t\alpha\right)$$

$$= P\left(\left|\sqrt{n}\left(\bar{S}_n - (2\theta - 1)\right)\right| \leq t\alpha\right)$$

$$\text{Or } \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_i) = 1 \times \theta - 1(1 - \theta) \\ = 2\theta - 1$$

$$\text{et } E(X_i^2) = \theta + (1 - \theta) = 1$$

$$\text{donc } V(X_i) = 1 - (2\theta - 1)^2$$

$$= 1 - (4\theta^2 - 4\theta + 1) \\ = 4\theta(1 - \theta)$$

$$\text{donc } \sqrt{V(X_i)} = 2\sqrt{\theta(1 - \theta)}$$

$$\text{or } \forall \theta \in]0, 1[, \quad \theta(1 - \theta) \leq \frac{1}{4}$$

(étude de fonction $x \mapsto x - x^2$ triviale)

$$\text{donc } 2\sqrt{\theta(1 - \theta)} \leq 2 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\text{donc } P \left(\left| \sqrt{n} (\bar{S}_n - (2\theta - 1)) \right| \leq t_\alpha \right)$$

$$\Rightarrow P \left(\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}} (\bar{S}_n - (2\theta - 1)) \right| \leq t_\alpha \right)$$

$$= P \left(\left| \bar{S}_n^* \right| \leq t_\alpha \right)$$

$$\text{avec } \bar{S}_n^* = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V(X_1)}} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1) \right)$$

avec $V(X_1)$ la variance de (X_i) , $E(X_1)$ l'espérance de (X_i) qui sont mutuellement indépendants et suivent la même loi.

Donc d'après le théorème central limite, $\bar{S}_n^* \xrightarrow{L} N$ avec $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\text{donc } P \left(\left| \bar{S}_n^* \right| \leq t_\alpha \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha)$$

$$\text{et } \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1$$

$$= 2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \quad \text{d'après l'énoncé.}$$

$$= 2 - \alpha - 1$$

$$= \underline{1 - \alpha}$$

$$\text{donc } \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n \right) \right] \text{ est}$$

bien un intervalle de confiance asymptotique
de l'estimation de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$

Copie anonyme - n°anonymat : 623978

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Maths 2		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

12a) Soit $h \in \mathbb{N}$.

$2h+1$ est impair et un nombre impair de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas "s'annuler"

autrement dit, $S_{2h+1}(\omega) = \{-2h-1, -2h+1, \dots, -1, 1, 3, \dots, 2h+1\}$

donc $P(S_{2h+1} = 0) = 0$

Soit $h \in \mathbb{N}$

12b) $[S_{2h} = 0] = \{h \text{ } X_i \text{ prennent la valeur } 1 \text{ et } h \text{ autres prennent la valeur } -1\}$.

donc ~~$P(S_{2h} = 0) =$~~

$$\begin{aligned} P(S_{2h} = 0) &= P(X_1 = 1)^h P(X_1 = -1)^h \times \binom{2h}{h} \\ &= 0^h (1-0)^h \binom{2h}{h} \end{aligned}$$

avec $\binom{2h}{h}$ le nombre de façons de les arranger.
(et on prend $P(X_1 = 1)$ car les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi)

13) $P(L_n = n)$

$$[L_n = n] = \{ n \text{ est le max des } k \in \llbracket 0, n \rrbracket / S_{2k} = 0 \}$$

$$= \{ S_{2n} = 0 \}$$

donc $P(L_n = n) = P(S_{2n} = 0)$

$$= \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n \quad (\text{d'après } q^o 12b)$$

14a) ~~Soit~~ $k \in$

avec $j \leq n$.

$$[L_n = k] = \{ [S_{2k} = 0] \text{ et } \forall j > k, [S_{2j} \neq 0] \}$$

donc $P(L_n = k) =$

On peut aussi y rajouter $\forall i \geq k, [S_{2i+1} \neq 0]$ et $j \leq n-1$
 qui est tout le temps vrai ($q^o 12a$) car
 s'écrit aussi $[S_{2i+1} = 0]$ donc la probabilité est
 égale à $1 - P(S_{2i+1} = 0) = 1$.

donc en somme

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$$

b) En sachant que $[S_{2l}=0]$, l'événement

$[S_{2l+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$ est le même

que $[S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2(n-l)} \neq 0]$ car la somme est comme "réinitialisée" et les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes donc les vecteurs $(X_1, \dots, X_{n-l})$ et $(X_{l+1}, \dots, X_{2n})$ suivent la même loi

$$\text{se } P([S_{2l+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0] | [S_{2l}=0]) = P([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2(n-l)} \neq 0])$$

15). $P(L_n = k)$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$$P(L_n = k) = P([S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0])$$

$$= P([S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0])$$

$$= P([S_{2k} = 0]) \cdot P([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]) \times P([S_{2k} = 0])$$

$$= \underline{p^{n-k} \times \binom{n-k}{k} \theta^k (1-\theta)^k} \quad (\text{d'après } q^0 125 \text{ et } q^0 146)$$

16) a) Soit $\omega \in \Omega$.

les $(X_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ prennent des valeurs entières donc leur somme est un entier donc

$\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers

b) Pour que les $(S_k)_{k \in \mathbb{T}_1, 2n}$ soient différents de 0, il faut qu'il existe $k \in \mathbb{T}_1, 2n$ tel que $S_k > 0$ ou $S_k < 0$ (car $S_k = S_{k-1} + 1$ ou $S_{k-1} - 1$)

$$S_k > 0 \quad \text{ou} \quad S_k < 0 \quad (\text{car } S_k = S_{k-1} + 1 \text{ ou } S_{k-1} - 1)$$

donc $P(D_n) = P(D_n^+) + P(D_n^-)$

17) $P(D_n^+)$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0]\right)$$

$$= P\left(\left[\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0]\right] \cap [S_{2n} > 0]\right)$$

$$= P(\underbrace{[\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0]] \cap [S_{2n} = 1]}_{\text{ou } [S_{2n} = 2]}) +$$

$$P(\underbrace{[A]}_{\text{ou } [A]})$$

$$\text{ou } \left[\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0]\right] \cap [S_{2n} > 0]$$

$$= \bigcup_{n=1}^m \left[\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0]\right] \cap [S_{2n} = n]$$

donc par incompatibilité des événements :

$$P(D_n^+) = \sum_{n=1}^m P\left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0] \cap [S_{2n} = n]\right)$$

$$= \sum_{n=1}^m a_{n,n}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 623978

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Maths 2		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$\begin{aligned}
 18) \quad & P(A_{n-1}, q \cap A_{n, r}) = P(A_{n, r} \mid A_{n-1}, q) P(A_{n-1}, q) \\
 & = P\left(\left(\bigcap_{l=1}^{2n-1} [S_l > 0]\right) \cap [S_{2n} = 2r] \mid \bigcap_{l=1}^{2n-3} [S_l > 0] \cap [S_{2n-2} = q]\right) \\
 & \quad \times P(A_{n-1}, q) \\
 & = \begin{cases} P([X_{2n-1} = 1] \cap [X_{2n-2} \neq 1]) a_{n-1, q} & \text{si } q = n-1 \\ P([X_{2n-1} = -1] \cap [X_{2n-2} = -1]) a_{n-1, q} & \text{si } q = n+1 \\ P([X_{2n-1} = -1] \cap [X_{2n-2} = 1]) a_{n-1, q} & \text{ou} \\ P([X_{2n-1} = 1] \cap [X_{2n-2} = -1]) a_{n-1, q} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n, q \neq n-1 \text{ ou } q \neq n+1 \end{cases} \\
 & = \begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a_{n-1, q} & \text{si } q = n-1 \text{ ou } q = n+1 \\ \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) a_{n-1, q} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \left(\cos \theta = \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} a_{n-1, q} & \text{si } q = n-1 \text{ ou } q = n+1 \\ \frac{1}{2} a_{n-1, q} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

18b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_n, n) = \sum_{q=\emptyset}^{n+1} P(A_{n-1, q} \cap A_n, n)$$

$$= P(A_{n-1, n-1}) \frac{1}{4} \times P(A_{n-1, n+1}) \frac{1}{4}$$

$$+ P(A_{n-1, n}) \times \frac{1}{2} \quad \text{d'après } q^o 18a)$$

(les autres probas sont nulles.)

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{4} a_{n-1, n-1} + \frac{1}{2} a_{n-1, n} + \frac{1}{4} a_{n-1, n+1}$$

19) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$:

$$" \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n,n} = \frac{1}{4} \left(\binom{2n-1}{n+n-1} - \binom{2n-1}{n+n} \right) "$$

Initialisation ~~a1,1~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{1,1} = P([S_1 > 0] \cap [S_2 = 2n])$$

$$= P([X_1 = 1] \cap [S_2 = 2n])$$

=

20) Soit $m \in \mathbb{N}$

$$p_m = P(D_m)$$

$$= P(D_m^+) + P(D_m^-) \text{ d'après q°16b)}$$

$$= \sum_{n=1}^m a_{n,n} + \sum_{n=1}^m a_{n,n} \text{ d'après q°17}$$

et car $P(D_m^+) = P(D_m^-)$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{n=1}^m 2 \left(\binom{2n-1}{n+n-1} - \binom{2n-1}{n+n} \right)$$

Troisième partie

21 a)

```

import numpy.random as rd
def serverPartage(m):
    L = 0
    S = 0
    for u in range(1, 2 * (m+1)):
        U = 2 * rd.randint(0, 2)
        S = S + U
        if S == 0:
            L = u
    return L

```

b) On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$, ~~devenir~~ plus etc
comme uniforme.

Copie anonyme - n°anonymat : 623978

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Maths 2		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

22) a)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \ln(C_{n+1}) - \ln(C_n)$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{\sqrt{n}} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{4}{4} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{4}{4} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

22 b) Soit $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{N-1} u_{n+1} - u_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \ln(c_{n+1}) - \ln(c_n)$$

$$= \ln(c_N) - \ln(c_1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$$

car la série converge (a° 22a) et
téléscopage

donc $\ln(c_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S + \ln(c_1)$

par continuité de $x \mapsto \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$,

$$c_N \longrightarrow \exp(S + \ln(c_1))$$

et la série $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

23 d) d'après 23 c),

$$\min_{l \in [\alpha_n, \beta_n]} Cl$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{et } \max_{l \in [\alpha_n, \beta_n]} Cl \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

donc puisque $l \geq \alpha_n$ et que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

par théorème de comparaison, $l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$\text{donc } mn \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{et } Mn \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \quad \text{donc comme.}$$

$$\sum_{k=\alpha_n}^{(n x)} \frac{1}{k(1-k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x) \quad \text{d'après q° 8) alors}$$

par théorème d'encadrement (avec l'inégalité de la q° 23 b), et produit des limites

$$\frac{1}{4^n} \sum_{k=\alpha_n}^{(n x)} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{\pi}$$

24) a) on peut poser $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underline{a_n = n^{\frac{1}{4}}}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]0, 1[$

$$25) P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{l=0}^{[nx]} \binom{2l}{l} \binom{2(n-l)}{n-l}$$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{l=0}^{an-1} \binom{2l}{l} \binom{2(n-l)}{n-l} + \frac{1}{4^n} \sum_{l=an}^{[nx]} \binom{2l}{l} \binom{2(n-l)}{n-l}$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{d'après } q^{\circ} 24b) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{\pi} \\ \text{d'après } q^{\circ} 23d) \end{matrix}$

donc $P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} G(x)$

et $\frac{1}{\pi} G(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X définie dans la Partie 1

donc $\frac{L_n}{n} \xrightarrow{L} X$ avec X qui suit une loi archimésienne