



A5-00007

404309

Maths E

Code épreuve : 286

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

Pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1. a) f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) < 0 \text{ car } -e^{-x} < 0$$

$$\text{et } \frac{x+1}{x^2} > 0$$

Il vient que f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par opération sur f les limites, on a directement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

D'où le tableau de variations suivant :

	0	$+\infty$
var f	$+\infty$	0

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$P(n)$: " u_n défini et strictement positif " est vraie.

Initialisation: l'initialisation est immédiate

car u_0 défini égal à 1 donc strictement positif.

Hérédité: Supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 0$$

Or, sous réserve d'existence, $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, f définie sur $]0; +\infty[$ à valeur dans $]0; +\infty[$ d'après ce qui précède.

Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et

$$u_n > 0 \Rightarrow f(u_n) = u_{n+1} > 0$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion: Chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est défini et strictement positif.

2. Informatique.

a) def func - 1(a):
from mpmath import exp
u = 1
n = 0
while u <= a:
u = exp(-u) / u
n = n + 1
return n

b) On a que $u_6 > 10^{-(6)}$ avec 6 premier entier pour lequel $u_n > 10^{-(6)}$ et $u_5 > 10^{-(6)}$ avec 5 premier entier pour lequel $u_n > 10^{-(6)}$.
On déduit que $10^{-(6)} < u_5 < 10^{-(6)} < u_6$.

Cependant, f étant décroissante, gardons nous de conclure quant à la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) def u(n):
u = 1
for i in range(1, n+1):
u = exp(-u) / u
return u

3. Pour $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$

a) g dérivable et continue sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, telle que:

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad g'(x) = -e^{-x} - 2x.$$

$$\text{Or, } \forall x \in [0; +\infty[, \quad -e^{-x} < 0 \text{ et } -2x \leq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0; +\infty[, \quad g'(x) < 0$$

g est donc strictement décroissante et continue sur

$[0; +\infty[$. On a $g(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ par opération sur les limites.

D'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $g([0; +\infty[) =]-\infty; 1]$ par décroissance de g .

b) Pour $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$

Or, d'après a qui précède, $\forall y \in]-\infty; 1]$, $\exists! x \in [0; +\infty[, g(x) = y$ et $0 \in]-\infty; 1]$

Donc, il existe un unique $x \in [0; +\infty[$ tel que

$$g(x) = 0 \text{ ou encore que } f(x) = x \text{ avec } x = \alpha.$$

c) On a f bijection décroissante de $]0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$.

Donc il existe f^{-1} la réciproque de f strictement décroissante aussi sur $]0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$

$$\text{On a } f(1) = \frac{1}{e} < 1$$

$$\text{et } f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{e-1}{e}} > \frac{1}{e} \text{ car } e \approx 2,7.$$

Or, comme il existe un unique x tel que $f(x) = x$ et que f est strictement décroissante,

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées.		
	Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

on a que $f(1) < f(x) < f(\frac{1}{e})$

$(\Rightarrow) \quad \frac{1}{e} < x < 1$ par stricte décroissance de f^{-1} .

4. a) On a $u_0 = 1$

d'où $u_1 = \frac{1}{e}$

et $u_2 = f(\frac{1}{e}) = e^{\frac{e-1}{e}} > 1$ car $e \approx 2,7$

Aussi, $u_0 < u_2$.

b) Nous venons d'initialiser la récurrence qui cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_{2n+2} > u_{2n}$ " est vraie. Procédons à l'hérédité:

Si $u_{2n+2} > u_{2n}$

alors $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$ par stricte décroissance de f

soit $u_{2n+3} < u_{2n+1}$

5/32

Enfin, $u_{2n+3} < u_{2n+1}$

(2) $u_{2n+4} > u_{2n+2}$ par décroissance de f .

La propriété est bien héréditaire.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_{2n+2} > u_{2n}$ " est vrai et $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.

c) f étant décroissante et comme $v_{n+1} = f(u_n)$, on a $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de sens de variation contraire; on montre aisément comme ce qui précède que $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; +\infty[$ donc

$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante minorée, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $n \in]0; +\infty[$, $h(n) = f \circ f(n)$.

On pose $h(0) = 0$.

a) Soit $n \in]0; +\infty[$, h définie car f bijection décroissante de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0; +\infty[, \quad h(x) &= f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= \frac{x}{e^{-x}} \times e^{-\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= x \times e^{-\frac{x^2 - e^{-x}}{x}} \\ &= x \times e^{-\left(\frac{e^{-x} - x^2}{x}\right)}\end{aligned}$$

b) h continue sur $]0; +\infty[$ comme produit et composée de fonction qui le sont sur $]0; +\infty[$.

Un problème de continuité peut surgir en 0 car il y a un x au dénominateur dans la composée par l'exponentielle.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - x^2}{x} = +\infty \text{ par opération sur les limites.}$$

$$\text{D'où } e^{-\left(\frac{e^{-x} - x^2}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ par opération sur les limites.

Il vient que h continue sur $[0; +\infty[$.

c) On a donc que $h(0) = 0$ d'après ce qui précède.

Or, pour $n \in]0; +\infty[$,

$$h(x) = x$$

$$\Rightarrow f(f(n)) = n$$

$$\Leftrightarrow f(n) = n \text{ en composant par } f$$

$$\Leftrightarrow n = \alpha \text{ d'après 3 b.}$$

Ainsi, $h(n) = n$ admet exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α .

d) On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = \alpha$ car

$v_1 > \alpha$, (v_{2n+1}) décroissante minorée,

et α solution de $h(n) = \alpha$

6. Supposons qu'il existe une majorante de $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} < M.$$

$(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,

pour $n = \lceil M \rceil$, on a

$$v_{2 \lceil M \rceil} \geq M \text{ ce qui est absurde.}$$

Ainsi, $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ croissante non majorée donc divergente et n'admettant pas de limite finie.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :

Deux systèmes différentiels.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de A :

1. a) On a $A - 2Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est

de rang 1 car toutes les colonnes sont non nulles et les mêmes.

b) $\text{rg}(A - 2Id) < 3$ donc $A - 2Id$ non

invertible $\Leftrightarrow 2$ valeur propre de A

et $\dim(E_2) = 3 - \text{rg}(A - 2Id) = 2$ d'après la Théorème

c) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\text{du rang car } E_2 = \ker(A - 2Id)$

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow -x - y = z$$

Il vient donc que $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non colinéaires de $E_2(A)$ de dimension 2 donc base de $E_2(A)$

d) A ne peut avoir encore que 1 seule valeur propre car la dimension du sous-espace associé est déjà de 2 et que la dimension du possible autre espace propre ne peut donc excéder 1.

2. a) Les coordonnées du vecteur colonne ΠU représentent la somme des coefficients de chaque ligne de Π

b) On remarque que

$$A U = 5 U \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ainsi, 5 est la valeur propre restante avec E_5 le sous-espace propre associé à A de dimension au plus 1 d'après c qui précède.

U est donc une base du sous-espace propre associé car $U \in E_5$ et, $U \neq 0$ et $\dim(E_5) = 1$.

3. Il vient donc que

$$A = P D P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage P de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ à la nouvelle base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ qui est une base de

$\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ par concaténation de vecteurs propres distincts
associés à des sous espaces propres distincts

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II - Un système différentiel

Soit (S) $\begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}$

4. On reconnaît $X' = AX$ avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,
 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a que A diagonalisable, alors, l'ensemble
des solutions, pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des constantes
réelles, sont des est le suivant :

$$\begin{cases} x : t \mapsto 2\lambda_1 e^{-t} + 5\lambda_3 e^{-t} \\ y : t \mapsto 2\lambda_2 e^{-t} + 5\lambda_3 e^{-t} \\ z : t \mapsto 2\lambda_1 e^t + 2\lambda_2 e^t + 5\lambda_3 e^{-t} \end{cases}$$

5. a) Le théorème de Cauchy - Shwarz permet d'affirmer qu'il existe une unique solution $\lambda_0: t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système telle que $\lambda_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) On cherche λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$\begin{cases} x_0(0) = 1 \\ y_0(0) = -1 \\ z_0(0) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = -1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{5} \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} x_0: t \mapsto 2e^{-t} - e^{-t} \\ y_0: t \mapsto -e^{-t} \\ z_0: t \mapsto 2e^{-t} - e^{-t} \end{cases}$$

Partie III : Un second système différentiel.

Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. Les valeurs propres de B sont racines du polynôme : $x \mapsto (-1-x)(3-x) + 4$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2023
	Épreuve de : Mathématiques appliquées.		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

On $P(n) = (n-1)^2$

Dans $P(n) = 0 \Leftrightarrow n = 1$

Ainsi, 1 est valeur propre de B et unique valeur propre de B.

7. B n'est pas diagonalisable car si elle l'était, n'ayant qu'une valeur propre, 1, elle devrait être égale à la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui n'est pas le cas.

8. Soit f endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B matrice de f dans $\mathbb{R}^2$.

a) Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

13/22

Ainsi, (v_1, v_2) famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}_2$ de dimension 2.

(v_1, v_2) base de $\mathbb{R}_2$.

donc on a $f(v_1) = (2, -1) = v_1$

$$\begin{aligned} \text{et } f(v_2) &= (-1, -1) \\ &= (2, -1) + (-1, 0) \\ &= v_2 + v_1 \end{aligned}$$

D'ailleurs, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de f dans β .

c) Pour $Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

On a bien $Q T Q^{-1} = B$.

On a trouvé Q en posant une matrice inversible

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } Q^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

et en résolvant le système $\begin{cases} Q T Q^{-1} = B \\ Q Q^{-1} = I \end{cases}$

9. De la même manière que dans la partie II,

avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

on a (S) $\Leftrightarrow X' = BX$.

Je ne sais néanmoins pas résoudre le système lorsque T triangulaire supérieure.

Exercice 3:

l'entropie en probabilité.

Partie I - Préliminaire.

1. Soit $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie
par $h(n) = \begin{cases} n \ln(n) & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

a) h continue sur $]0; +\infty[$ comme
produit de deux fonctions qui le sont.

On, par croissance capotée, $\lim_{n \rightarrow 0} h(n) = 0 = h(0)$

On prolonge donc h par continuité en 0.

Enfin, h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions qui le sont, telle que,

$$\forall x > 0, h'(x) = \ln(x) + 1$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = +\infty$ par opération sur les limites.

Autrement dit, non, h n'est pas dérivable en 0.

c) Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Ainsi, les antécédents de 0 par h sont 0 et 1.

2. Pour $x \in [0; 1]$, g dérivable sur $]0; 1]$, comme somme de fonctions qui le sont telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; 1], g'(x) &= -h'(x) + h'(1-x) \\ &= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 \\ &= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Or, pour } n \in]0; 1[, \ln\left(\frac{1-n}{n}\right) < 0$$

$\Leftrightarrow \frac{1-n}{n} < 1$ car e^x réalise
une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 1-n < n \text{ car } n \in]0; 1[$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < n.$$

Ainsi, on a le tableau de variation suivant.

	0	$\frac{1}{2}$	1
$\text{sgn } g'(n)$		+	-
$\text{var } g$		$\nearrow g(\frac{1}{2})$	$\searrow$
	0		0

$$\text{On a } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

Partie II - Des variables aléatoires discrètes.

L'entropie de X est $H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X=x))$

En particulier, lorsque X a valeurs dans

$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie $H(X)$ existe toujours et vaut :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n h(p_i)$$

où, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i = P(X=x_i)$

3. Pour $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$,

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(U=k) = \frac{1}{n}$ et $H(U)$ existe

d'après l'énoncé car U a valeurs dans un ensemble fini.

$$\text{Il vient, } H(U) = - \sum_{i=1}^n h\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -n h\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -n \times \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln(n).$$

4. Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

On a $H(X)$ définie telle que

$$\begin{aligned} H(X) &= - (h(p) + h(1-p)) \\ &= -h(p) - h(1-p) \end{aligned}$$

Or $p \in]0; 1[$ donc $H(X) = g(p)$.

Ainsi, comme,

$\forall x \in]0; 1[, g(x) \leq \ln(2)$ d'après I. 2.,
et comme $p \in]0; 1[$,
il vient : $H(X) \leq \ln(2)$

De plus, $H(X) = \ln(2)$ si $p = \frac{1}{2}$ car
seul $\frac{1}{2}$ est antécédent par g de $\ln(2)$ d'après I. 2.

5. Soient X_1 et X_2 indépendantes suivant une
loi de Bernoulli de paramètres p_1 et p_2 respectivement.
On définit Z tel que :

- $Z(\Omega) = \{0; 1\}$
- $\{Z=1\}$ réalisé si « $X_1 + X_2$ est impair »

a) Les valeurs prises par $X_1 + X_2$ sont 0, 1 et
2 car X_1 et X_2 suivent une loi de Bernoulli.

b) « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé

ssi $[X_1 + X_2 = 1]$ est réalisé d'après les valeurs que prend $X_1 + X_2$

Alors,

$$p = P(Z=1) = P(X_1 + X_2 = 1)$$

$$= P([X_1=1] \cap [X_2=0] \cup [X_1=0] \cap [X_2=1])$$

$$= P(X_1=1)P(X_2=0) + P(X_1=0)P(X_2=1) \text{ par}$$

incompatibilité des événements et indépendance de X_1 et X_2

$$= p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$$

c) D'autre part :

$$1-2p = 1 - 2p_1(1-p_2) - 2p_2(1-p_1)$$

$$= 1 - 2p_1 + 2p_1p_2 - 2p_2 + 2p_1p_2$$

$$= 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2$$

$$\text{et } (1-2p_1)(1-2p_2) = 1 - 2p_2 - 2p_1 +$$

$$4p_1p_2 = 1 - 2p$$

$$\text{D'où } 1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2).$$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de : *statistiques appliquées.*

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6. a) $(X_h)_{h=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p .

Dès lors, par stabilité de la loi binomiale,

$$S_n = \sum_{h=1}^n X_h \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

~~b) L'initialisation a été faite en 5.c)
car pour $p_1 = p_2 = p$, $\left(\begin{array}{l} \text{on doit changer notation} \\ \text{car } p = P(Z=1) \text{ dans question 5} \end{array} \right)$
on a $1 - 2P(Z=1) = (1 - 2p)^2$~~

b) L'introduction est maintenue; en effet:

$$\text{Pour } n=1, Z_1 = X_1$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } 1 - 2P(Z_1=1) &= 1 - 2P(X_1=1) \\ &= (1 - 2p)^1 \end{aligned}$$

Hérédité:

Supposons que jusqu'à un n fixé,

$$1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$$

$$\Leftrightarrow P(Z_n = 1) = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } P(Z_{n+1} = 1) &= P([Z_n = 1] \cap [X_{n+1} = 0] \\ &\quad \cup [Z_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1]) \\ &= (1-p) \left(\frac{1 - (1-2p)^n}{2} \right) + p \left(\frac{1 + (1-2p)^n}{2} \right) \\ &\text{par indépendance d'après la lemme des coalitions} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - (1-2p)^n - p + p(1-2p)^n + p + p(1-2p)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - (1-2p)^n + 2p(1-2p)^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } 1 - 2P(Z_{n+1} = 1) &= 1 - 1 + (1-2p)^n - 2p(1-2p)^n \\ &= (1-2p)^n (1-2p) \\ &= (1-2p)^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z_n = 1) = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}.$$

$$\text{et } P(Z_n = 0) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

$$\text{Ainsi } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}\right)$$

$$\text{car } \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} \in]0; 1[.$$

D'après 4., $H(Z_n) \leq \ln(2)$

et il y a égalitéssi

$$\frac{1 - (1 - 2p)^n}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - (1 - 2p)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2p)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Partie III - Des variables à densité.

On a $M(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ sous réserve d'existence.

7. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{Z}([a; b])$

on a f_0 la densité de U telle que :

$$f_0 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, \quad \frac{1}{b-a} > 0.$$

Autrement dit, $h \circ f_0$ continue par extension, h est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } - \int_{-\infty}^a h \circ f_0(t) dt = - \int_b^{+\infty} h \circ f_0(t) dt = 0$$

$$\text{car } \forall t \notin [a; b], f_0(t) = 0$$

$$\text{et } h(0) = 0$$

Enfin, $h \circ f_0$ est continue sur $[a; b]$,

$- \int_a^b h \circ f_0(t) dt$ converge absolument et U admet donc une intégrale.

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de :

Mathématiques appliquées.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or) On a donc

$$H(U) = - \int_a^b h \cdot f(t) dt$$

$$= - \int_a^b h \left(\frac{1}{b-a} \right) dt$$

$$= - \int_a^b \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{1}{b-a} \right)$$

$$= - \left[\frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{1}{b-a} \right) \right]_a^b$$

$$= \ln(b-a).$$

8. Pour f densité de $X \in E(\mathbb{R})$, on a
tout d'abord X qui admet une espérance $E(X) = \frac{1}{1}$.
Or, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{1}$.

Donc, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge et est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

b) On rappelle que pour f densité de $X \in \mathcal{E}(\lambda)$,
 $f: n \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda n} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi,

$$- \int_{-\infty}^0 h \circ f(t) dt = 0 \quad \text{car } h(0) = 0.$$

$$\text{D'autre part, } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h \circ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \times h(\lambda e^{-\lambda t}) \\ = -\lambda^2 t e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} h(\lambda)$$

~~Donc~~ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Or } - \int_0^{+\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} t f(t) dt \\ = 1$$

$$\text{et } - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} h(\lambda) dt = -h(\lambda) \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ = -h(\lambda) \times 1$$

Ainsi, par linéarité des intégrales convergentes.

$$h(x) = 1 - \ln(x).$$

g. Soit $X \sim N(m, \sigma^2)$

a) Par définition, $E(X) = m$

$$\text{et } V(X) = \sigma^2.$$

Or, d'après la formule de Koenig-Meuygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2$$

Or, $E(X^2)$ existe car $V(X)$ existe avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt$.

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt = E(X^2) = m^2 + \sigma^2.$$

b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) > 0$ avec $\phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$
et continue!

Ainsi, h.o. ϕ définie^v telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h \circ \phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$O_1, \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ln(\sigma^2 2\pi)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(\sigma^2 2\pi) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 2\pi) e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$$

D'autre part,

$$-\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2\sigma^2} \times \left(x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - 2mx e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} + m^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right)$$

On montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2\sigma^2} \times x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{1}{2\sigma^2} (m^2 + \sigma^2)$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sigma^2} \times x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sigma^2} (2m^2) \quad \text{d'après ce qui précède}$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{m^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sigma^2} \times e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{m^2}{2\sigma^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 404309

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 29

Session : 2023

Épreuve de : statistiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Enfin, par linéarité des intégrales convergentes, on obtient que :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \times \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

Et enfin, par linéarité,

$$H(X) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$$
$$= \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$$

FIN

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

