



T5-00003

152977

Maths E

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Maths EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1a) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car obtenue à partir de fonctions usuelles e^x (exp, inverse) reliée par produit et composition

donc f est dérivable telle que

$$f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2}$$

$$= \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} < 0 \text{ et } f \text{ est strictement décroissante}$$

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \text{ par croissances comparées}$$

$$\text{donc } \frac{-e^{-x}}{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{de plus } \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \text{ et } e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\text{donc par produit } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

d'où

x	0	$+\infty$
f'		-
f	$+\infty$	0

$$1b) \text{ On a } \begin{cases} U_0 = 1 \in]0; +\infty[\\ f(]0; +\infty[) =]0; +\infty[\end{cases}$$

donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

2a) l5 : while $u \leq a$

ligne 7 : $n = n + 1$

b) Je suppose que le script 2 a une erreur car il est identique au 1, je considère que le 2 cherche le premier terme à partir duquel $u_n \leq a$

$$\text{On a donc } U_5 \leq 10^{-6}$$

$$U_6 \geq 10^6$$

Il semble que la suite (U_n) ne soit pas monotone

2c) def $u(n)$: ← import numpy as np
 $u = 1$
 for ls in range(n):
 $u = np \cdot \exp(-u) / u$
 return u

3a) g est $\mathcal{C}^1$ car obtenue à partir de fonctions $\mathcal{C}^1$ (exp, polynôme reliées par somme et composition).

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$$

g est continue (car $\mathcal{C}^1$) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$g(\mathbb{R}_+) =]-\infty; -1] \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ et } g(0) = -1$$

b) d'après 3a $\exists ! x \in \mathbb{R}_+ \quad e^{-x} - x^2 = 0$ car $0 \in g(\mathbb{R}_+)$
 or $g(0) \neq 0$ donc $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$e^{-x} - x^2 = 0 \quad \text{ssi} \quad e^{-x} = x^2$$

$$\text{ssi} \quad \frac{e^{-x}}{x} = x \quad \text{car } x \neq 0$$

$$\text{Ainsi } \exists ! x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x$$

c) On a

$$f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = \frac{e^{-\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} - \frac{1}{e} \text{ et } f(1) - 1 = \frac{e^{-1}}{1} - 1$$

$$= e^{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e} > 0 \text{ car } 1-\frac{1}{e} > 0 = \frac{1-e}{e} < 0$$

par continuité et stricte décroissance de f , $f(x) = x$ est atteint entre $\frac{1}{e}$ et 1

$$\text{donc } \frac{1}{e} < x < 1$$

$$\begin{aligned} 4a) \quad U_2 &= f \circ f(U_0) \\ &= f \circ f(1) \\ &= f\left(\frac{1}{e}\right) \\ &= e^{1 - \frac{1}{e}} \end{aligned}$$

$$\text{or } 1 - \frac{1}{e} > 0 \text{ donc } e^{1 - \frac{1}{e}} > 1$$

$$\text{ainsi } U_2 > U_0$$

4b) On raisonne par récurrence

$$\text{Soit } \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) : U_{2n+2} \geq U_{2n}$$

Initialisation : d'après 4a $U_2 > U_0$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ est vraie

$$U_{2n+2} \geq U_{2n} \text{ d'où } f(U_{2n+2}) \leq f(U_{2n}) \text{ par décroissance de } f$$

$$U_{2n+3} \leq U_{2n+1}$$

$$f(U_{2n+3}) \geq f(U_{2n+1}) \text{ à nouveau}$$

$$U_{2n+4} \geq U_{2n+2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 152977

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall n \in \mathbb{N} (U_{2n})$ est croissante

c) $U_2 \geq U_0$ implique par décroissance de f $U_3 \leq U_1$

par une récurrence identique à 4 b (où les sens des inégalités sont inversés) on obtient que $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est

décroissante. Or $\forall n \in \mathbb{N} U_n \geq 0$ donc $U_{2n+1} \geq 0$

Une suite décroissante et minorée converge donc

(U_{2n+1}) converge

5a) Soit $x > 0$ $h(x) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$

$$= \frac{e^{-\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)}}{\frac{e^{-x}}{x}}$$

b) h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car obtenue à partir de fonctions

continues (exp, ~~par~~ polynôme) reliées par composition, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas

$$\forall x > 0 \quad h(x) = e^{-\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)} \times \frac{x}{e^{-x}}$$

$$\frac{x}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

$$\text{donc} \quad -\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

$$\text{et par composition} \quad e^{-\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{enfin, par produit} \quad h(x) \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$ et h est continue en 0

h est continue sur $\mathbb{R}_+$

(1) Clairement $h(0) = 0$ donc 0 est solution de $h(x) = x$

~~f est ^{strictement} décroissante donc $f \circ f = h$ est ^{strictement} croissante~~

~~h est croissante et ^{strictement} croissante donc~~

$h(x) = f \circ f(x) = f(x) = x$ car x est point fixe de f

d) (U_{2n+1}) converge vers un point fixe de f donc

X

6) (U_{2n}) est croissante et supérieure à $U_0 = 1$ (4a)

or f n'admet pas de point fixe sur $]1; +\infty[$

donc (U_{2n}) n'admet pas de limite. Elle n'est pas majorée par absence de limite.

Exercice 2

Partie I

1a) $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A - 2I_3) = 1$
car les ~~trois~~ trois colonnes sont égales

b) $\text{rg}(A - 2I_3) = 1 < 3$ donc $2 \in \text{Sp}(A)$

A peut être la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
donc d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^3 = \text{rg}(A - 2I_3) + \dim(E_2(A))$$

$$3 = 1 + \dim(E_2(A))$$

$$\text{donc } \dim E_2(A) = 2$$

1c) en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de $A - 2I_3$

on a $C_1 - C_2 = 0$ et $C_2 - C_3 = 0$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $E_2(A)$

or ces vecteurs ne sont pas colinéaires et $\dim E_2(A) = 2$
donc formant une base de $E_2(A)$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

d) Pour que les vecteurs propres associés à toutes les valeurs propres forment une base de $M_3(\mathbb{R})$ ils doivent être 3. Or chaque sous-espace propre ^{3.7} d'une valeur propre est de dimension au moins 1. Il n'y a donc qu'une autre valeur propre que 2. (dont le sous-espace propre sera de dimension 1)

2a) Chaque coordonnée de MU représente la somme des coefficients d'une ligne de M

$$\begin{aligned} 2b) \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $5 \in \text{Sp}(A)$ et $E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

car le sous-espace propre est de dimension 1

Copie anonyme - n°anonymat : 152977

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ -a + c + b = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ c = b \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad a = b = c = 0$$

donc les vecteurs sont libres et forment une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

A est diagonalisable et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible

$$\text{et } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Partie II

4) La matrice associée à (S) est A

Les solutions de ce système sont de la forme

$$X: \left\{ t \rightarrow C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes

5a) Le théorème de Cauchy énonce que par un point du plan il ne passe qu'une trajectoire

b) On cherche C_1, C_2, C_3 tels que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C_1 e^{2 \times 0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2 \times 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5 \times 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit et seulement si

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 1 \\ -C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ -C_2 + C_3 = 0 \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} C_2 = C_3 \\ C_1 = 1 - C_3 \\ C_1 = 1 + 2C_3 \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = C_3 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Partie III

6) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \in \text{Sp}(B) \text{ si } (-1-\lambda)(3-\lambda)+4=0$$

$$\text{si } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\text{si } (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\text{si } \lambda = 1$$

$$\text{Sp}(B) = \{1\}$$

$$7) B - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en notant C_1 et C_2 les colonnes on voit que

$$2C_1 - C_2 = 0 \text{ donc } \text{rg}(B - I_2) = 1$$

$$\dim E_1(B) = 2 - 1 = 1$$

$$E_1(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

il est impossible de former une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ avec un seul vecteur donc B n'est pas diagonalisable.

8a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$aV_1 + bV_2 = 0 \text{ si } (2a; -a) + (-b; 0) = (0, 0)$$

$$\text{si } \begin{cases} 2a - b = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \text{ si } a = b = 0$$

cette famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est libre et de cardinal $2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc B est une base de $\mathbb{R}^2$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(V_1) = V_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(V_2) = V_1 + V_2$$

$$\text{ainsi } T = \underset{B}{\text{Mat } f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) d'après les formules de changement de base on a

$$B = \underline{Q T Q^{-1}} \text{ où } Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

9)

Copie anonyme - n°anonymat : 152977

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

Partie I

1) $h(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car obtenue à partir de fonctions continues ($\ln$, id) reliées par produit.

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées

donc $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = 0 = h(0)$ et h est continue en 0 à droite

donc h est continue sur $\mathbb{R}_+$

h) le taux d'accroissement de h en 0 vaut, $\forall x > 0$

$$T_{f,0}(x) = \frac{h(0+x) - h(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{h(x)}{x}$$

$$= \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

donc h n'est pas dérivable en 0

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$h(x) = 0 \text{ si } \begin{cases} x = 0 \\ x \ln(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} x = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

les antécédents de 0 par h sont 0 et 1

2) g est dérivable sur $]0; 1[$ car h l'est

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; 1[\quad g'(x) &= -h'(x) + h'(1-x) \\ &= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 \\ &= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \end{aligned}$$

on remarque que $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) = 0$

et $\forall x \in]0; \frac{1}{2}[\quad 1-x > x$ donc $\frac{1-x}{x} > 1$

d'où le tableau de variation de g :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
g'		+	-
g	0	$\ln(2)$	0

$$g(0) = -h(0) - h(1) = 0$$

$$g(1) = -h(1) - h(0) = 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -2h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

Partie II

$$3) U \hookrightarrow U(\llbracket 1; n \rrbracket)$$

$U(\Omega)$ est fini donc $H(U)$ existe

$$H(U) = - \sum_{i=1}^n h(p(U=i))$$

$$= - \sum_{i=1}^n h\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n 1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$H(U) = \ln(n)$$

$$4) X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ où } p \in]0; 1[$$

$X(\Omega)$ est fini donc $H(X)$ existe

$$H(X) = - \sum_{i=0}^1 h(p(X=i))$$

$$= -h(p) - h(1-p)$$

$$= g(p) \text{ or d'après 2) } \forall p \in]0; 1[\quad g(p) \leq \ln(2) \\ \text{et } g(p) = \ln(2) \text{ si } p = \frac{1}{2}$$

5a) $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ car chacune des variables vaut 0 ou 1

b) $X_1 + X_2$ est impair si l'un vaut 1 et l'autre 0

$$\text{donc } [Z=1] = [X_1=1] \cap [X_2=0] \cup [X_1=0] \cap [X_2=1]$$

cette union est formée d'événements incompatibles

$$p = P(Z=1)$$

$$= P([X_1=1] \cap [X_2=0]) + P([X_1=0] \cap [X_2=1])$$

$$= P(X_1=1)P(X_2=0) + P(X_1=0)P(X_2=1) \quad \text{par indépendance des } X_1, X_2$$

$$= p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$$

$$c) p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) \text{ si } p = p_1 + p_2 - 2p_1p_2$$

$$\text{et } 1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$$

$$1-2p = 1-2p_2-2p_1+4p_1p_2 \text{ si } p = p_2 + p_1 - 2p_1p_2$$

$$\text{si } p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$$

et l'égalité est vérifiée

6a) La somme de Bernoulli indépendante de même paramètre est une binomiale

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \hookrightarrow B(n, p)$$

b) On raisonne par récurrence

$$\text{Soit } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad H(n): 1-2P(Z_n=1) = (1-2p)^n$$

Copie anonyme - n°anonymat : 152977

Emplacement
GR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 27

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6b) Initialisation si $n=1$

$$\text{alors } [Z_1=1] = [S_1=1] \\ = [X_1=1]$$

$$1 - 2P(Z_1=1) = 1 - 2P(X_1=1)$$

$$= 1 - 2p$$

$$= (1 - 2p)^1 \text{ et } H(1) \text{ est vraie}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $H(n)$ soit vraie

$$[Z_{n+1}=1] = [Z_n=1] \cap [X_{n+1}=0] \cup [Z_n=0] \cap [X_{n+1}=1]$$

par incompatibilité et indépendance

$$P(Z_{n+1}=1) = P(Z_n=1) P(X_{n+1}=0) + P(Z_n=0) P(X_{n+1}=1) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 1-p \qquad \qquad \qquad p$$

6c) $Z_n(z)$ est fini donc $H(Z_n)$ existe, à n force

$$H(Z_n) = -h(P(Z_n=0)) - h(P(Z_n=1))$$

$$= -h(P(Z_n=0)) - h(1 - P(Z_n=0))$$

$$= g(P(Z_n=0)) \text{ car } P(Z_n=0) \in [0, 1]$$

d'après 2) $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \leq \ln(2)$

$$\text{donc } H(Z_n) \leq \ln(2)$$

$$H(Z_n) = \ln(2) \text{ si } g(P(Z_n=1)) = \ln(2)$$

$$\text{si } P(Z_n=1) = \frac{1}{2}$$

d'après 6b en posant $P(Z_n=1) = \frac{1}{2}$

$$1 - 2 \times \frac{1}{2} = (1-2p)^n \text{ si } (1-2p)^n = 0$$

$$\text{si } 1-2p = 0$$

$$\text{si } p = \frac{1}{2}$$

$$H(Z_n) = \ln(2) \text{ si } p = \frac{1}{2}$$

Partie III

7) Soit $U \subset U([a, b])$ où $a < b$

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_U est à valeurs dans $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{b-a} \right\} \subset \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_h$

donc $\ln \circ f_U(x)$ existe pour tout x , et est continue sur $]a, b[$ donc ~~intégrable~~ son intégrale converge absolument sur ce segment

Ainsi $H(U)$ existe

$$a) H(U) = - \int_a^b \ln \circ f_U(x) dx$$

$$= - \int_a^b \ln \left(\frac{1}{b-a} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{b-a} \ln \left(\frac{1}{b-a} \right) \int_a^b dx$$

$$= - \ln \left(\frac{1}{b-a} \right) \frac{b-a}{b-a}$$

$$H(U) = \ln(b-a)$$

8) $X \subset E(\lambda)$, $\lambda > 0$

X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$\text{on } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t f(t) dt \quad \text{car } X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$$

donc $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$

b) Soit $A > 0$ $\ln \circ f(t)$ est $\mathcal{C}^0$ donc intégrable sur $[0, A]$
car $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \in \mathbb{R}_+$

$$-\int_0^A \ln(f(t)) dt = -\int_0^A \ln(\lambda e^{-\lambda t}) dt$$

$$= -\int_0^A \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda e^{-\lambda t}) dt$$

$$= \lambda \ln(\lambda) \left(-\int_0^A e^{-\lambda t} (-\lambda t) dt \right)$$

$$= \lambda \ln(\lambda) \int_0^A t \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \lambda \ln(\lambda) E(X) = \ln(\lambda)$$

donc $H(X) = \ln(\lambda)$ (ce qui est incohérent)

$$2a) X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

$$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2$$

$$\text{d'après König-Huygens } E(X^2) - E^2(X) = V(X)$$

$$\text{donc } E(X^2) = V(X) + E(X)^2$$

$$= \sigma^2 + m^2$$

Copie anonyme - n°anonymat : 152977

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 27	Session : 2023
	Épreuve de : Maths EML		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
Partie 3 9a) donc le moment d'inertie I vaut $\sigma^2 + m^2$ Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt = \sigma^2 + m^2$			
27/24			

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

