



P0-00094
927084
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : 297-Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice n°1

Partie 1

$$1) \text{mat}_{\mathbb{R}^n}(f) = M \quad \text{ainsi} \quad \text{rg}(M) = \text{rg}(f) = 1$$

$$\text{Donc par le théorème du rang} \quad \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) \\ n = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

$$\text{Bilan : } \dim(\ker(f)) = n - 1 \quad \text{Donc } \dim(\ker(f - oId)) = n - 1, o \in \text{Sp}(f)$$

$$2) a) \text{ Soit } (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad C = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } L = (1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n)$$

$$L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$$

$$C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi $CL \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow$ matrice de la même taille que M .

$$\text{Et } CL = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_1 l_2 & \dots & x_1 l_n \\ x_2 & x_2 l_2 & \dots & x_2 l_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n l_2 & \dots & x_n l_n \end{pmatrix}$$

On remarque bien C en première colonne de CL

Ainsi, $\exists (l_2; \dots; l_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \quad / \quad L = (1 \dots l_n)$ où $M = CL$

$$b) \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(CL) \text{ d'après 2)a)}$$

$$= \sum_{i=1}^n [CL]_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik} L_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n L_{ki} C_{ik}$$

par commutation on a $C_{ik} L_{ki}$
commutent car ce sont des
scalaires

$$= \operatorname{Tr}(LC)$$

$$\text{On } L \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ et } C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

On a donc $LC \in M_1(\mathbb{R})$ c'est un scalaire

$$\text{Donc } \operatorname{Tr}(LC) = LC = \operatorname{Tr}(\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}) \text{ où } x = LC$$

Pour mieux expliquer, x est sur la diagonale dans la trace
prenant x somme x qui est le seul élément de la matrice.

Bilan : $\operatorname{Tr}(M) = LC$

$$c) M^2 = CLCL \text{ d'après 2)a)}$$

$$= C \operatorname{Tr}(M) L \text{ d'après 2)b)}$$

$$= \operatorname{Tr}(M) CL \text{ car } \operatorname{Tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ donc on peut déplacer}$$

$$= \operatorname{Tr}(M) M \text{ par 2)a)}$$

$$\operatorname{Tr}(M)$$

Bilan : $M^2 = \operatorname{Tr}(M)M$

$$3) \text{ Résolvons } \begin{pmatrix} \operatorname{Tr}(M) \operatorname{id} \end{pmatrix} (x) = 0$$

$$(M - \operatorname{Tr}(M) \operatorname{id}) x = 0$$

$$\text{où } \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(M - T_n(M) \times I) x = 0$$

On sait que $C \in M_n(\mathbb{R})$ et $C \neq 0$

$$\begin{aligned} MC &= C^T C \quad \text{par 2)a)} \\ &= C T_n(M) \quad \text{par 2)b)} \\ &= T_n(M) C \quad \text{car } T_n(M) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi on a $T_n(M) \in Sp(M)$
C'est-à-dire $T_n(M) \in Sp(f)$

4) Supposons que $T_n(M) = 0$ on sait que $\text{rg}(M) = 1$

Supposons que M est diagonalisable,
 il existe une matrice P (constituée des vecteurs propres)
 et inversible et D qui est diagonale (où il y a les valeurs propres)

$$M = P D P^{-1}$$

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(D) \text{ car les matrices sont semblables}$$

$$T_n(M) = T_n(D) \quad \text{même argument}$$

$$\text{rg}(M) = 1 = \text{rg}(D) \text{ car } T_n(M) \text{ est valeur propre}$$

Or si $T_n(M) = 0$ on a donc $\text{rg}(D) = 0$ c'est la matrice nulle
 et ainsi, $M = 0$ donc elle n'est pas diagonalisable

Bilan, si $T_n(M) = 0$ alors M n'est pas diagonalisable

5) $T_n(M) \neq 0$, donc d'après ce que l'on a fait,

$$\text{On a } \text{rg}(M) = 1 \text{ et } \ker(f - 0 \text{Id}) = n - 1$$

$$\text{Donc } 0 \in Sp(f) \text{ et } \dim(E_0) = n - 1$$

$$\text{De plus, } \dim(E_{T_n(M)}) \geq 1 \text{ par propriété}$$

$$\text{Et par propriété } \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) \leq \dim(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{On a } n \leq \dim(E_0) + \dim(E_{T_n(M)}) \leq n$$

Bilan: $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) = n$ donc f est diagonalisable

et $\text{Sp}(f) = \{0, \text{Tr}(M)\}$

Partie 2 :

$\text{mat}_{\mathcal{B}^3} (g) = A$

6/a) Supposons par l'abuse que $AX=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a le système :

$$\begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ -\frac{a}{b}z + 3 \times \frac{1}{c} = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ yc - \frac{b}{a}y = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ 3 \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b}z \\ yc = \frac{b}{a}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ b = ac \text{ si } z \neq 0 \\ ac = b \text{ si } y \neq 0 \end{cases}$$

Bil en : On a donc la relation $ac = b$ si $z \neq 0$ ou $y \neq 0$

b) $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $C_1 = aC_2 = acC_3$

Donc comme les colonnes C_1, C_2 et C_3 sont colinéaires

On a donc $\text{rg}(A) = 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) a) On a $\text{rg}(A) = 1 = \text{rg}(q) = 1$

Par le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(q)) = 2$ (même situation que la partie 1)

On a donc $\text{Tr}(A) = 3 \neq 0$

Par le procédé de la partie 1, on a donc q est diagonalisable et $\text{Sp}(q) = \{0; 3\}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2/a + c/b & 2/b + 1/ac \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$

Par récurrence : Soit $P(n)$: " A^n appartient à $\text{Vect}(A)$ "

Montrons que $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : A appartient au $\text{vect}(A)$, $A = 1 \times A$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Supposons que $P(n)$ est vraie.
Par Hypothèse de récurrence, $A^n \in \text{Vect}(A)$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \lambda A \times A \text{ car } A^n \in \text{Vect}(A) \text{ donc } \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{on } A^n = \lambda A$$

05/30

On a donc λA^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2/a + c/b & +2/b + 1/ac \\ 2a + c/b & 3 & a/b + 2/c \\ b + ac + b & b/a + 2c & 3 \end{pmatrix}$$

on applique $ac=b$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2/a + 1/a & +2/b + 1/b \\ 3a & 3 & 3/c \\ 3b & 3c & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3A$$

Ainsi, $\lambda A^2 = 3\lambda A$ Donc $\lambda A^2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(A)$

Ainsi, $A^{n+1} \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(A)$

Donc $P(n+1)$ est vraie, A^n appartient à $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}(A)$

Exercice n°2

Partie 1 :

1). $c > 2$, si $x \geq 1$ on a $x > \frac{c}{x^{c+1}}$ est C^0 sur $[1; +\infty[$ et est positif

si $x < 1$ $x > 0$ est C^0 sur $(0, 1]$ et est positif

ainsi, on a $x > f(x)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ prise éventuellement de 1 et $f(x)$ est positive $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx \text{ d'après Chasles (entre } -\infty \text{ et } 0 \text{ l'intégrale est nulle)}$$

De plus $\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx$ converge par Riemann en $+\infty$ où elle est
impropre.

En effet, $c+1 > 3$, il faut que $3 > 1$ d'où la convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} c \left[\frac{x^{-c}}{-c} \right]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} c \frac{A^{-c}}{-c} - c \times \frac{1}{-c}$$

$$= 0 + 1 \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{A^c} = 0 \text{ où } c > 0$$

Ainsi, f peut être considérée comme une densité

2) Par le théorème du transfert, $E(x^2)$ existe si et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f(x)| dx$ converge

$$= \int_1^{+\infty} \left| x^2 \times \frac{c}{x^{c+1}} \right| dx \text{ par Charles}$$

On $\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}} dx$ converge absolument car c'est une

intégrale de Riemann en $+\infty$, on a $c > 2$ donc $c-1 > 1$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f(x)| dx$ converge.

On a donc X admet un moment d'ordre 2 donc X admet une espérance et une variance.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} c \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A$$

$$= \frac{c}{c-1} \text{ car } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{c-1}} \times \frac{c}{-c+1} = 0$$

$$D \text{ plus } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} c \left[\frac{x^{-c+2}}{-c+2} \right]_1^A$$

$$= \frac{c}{c-2} + 0 \quad \text{car } \lim_{A \rightarrow +\infty} c \frac{A^{-c+2}}{-c+2} = 0$$

Alors, par Kolmogorov-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$= \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1} \right)^2$$

2) Soit $x < 1$, $F(x) = 0$

Soit $x \geq 1$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ par propriété

$$= \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}} dt \text{ par Chasles}$$

$$= c \left[\frac{t^{-c}}{-c} \right]_1^x$$

$$= -x^{-c} + 1^{-c}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^c}$$

Bilan: $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

a) $Y = \ln(X)$

a) $X(n) = [1, +\infty[$

Donc $Y(n) = [0, +\infty[$

Soit $x < 0$, $G(x) = 0$

Soit $x \geq 0$, $G(x) = P(Y \leq x)$

$$= P(\ln(X) \leq x) \quad \text{car l'exponentielle est croissante sur } \mathbb{R}$$
$$= P(X \leq e^x)$$

$$= F(e^x)$$

$$\text{Donc : } G(x) = \begin{cases} F(e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) On a donc $G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{e^{cx}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$Y \sim \mathcal{E}(c)$

c) Def simul $X(c)$:

$$Y = \text{rd. ex. ponantial} (1/c)$$

$$X = \text{mp. exp} (Y) \quad \# \text{ car } Y = \ln(X) \text{ donc } X = e^Y$$

$$\text{return}(X)$$

Partie 2 :

5) def simul $Z(c)$:

$$\text{return}(\text{simul } X(c) * \text{simul } X(c))$$

6) ~~Par la théorie du transfert, $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}$~~

On sait que X_1 et X_2 sont indépendantes

$$\text{Donc } E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$$

et $E(X_1) = E(X_2)$ car elles ont la même loi

$$E(Z) = E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

• Et X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes par la même des conditions car X_1 et X_2 le sont.

$$E(Z^2) = E(X_1^2 X_2^2) = E(X_1^2) E(X_2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Ainsi par Koenig Theorem :

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} = \frac{(c-1)^4 c^2 - c^4 (c-2)^2}{(c-1)^4 (c-2)^2} \end{aligned}$$

$$V(z) = \frac{c^2 ((c-1)^4 - c^2(c^2 - 4c + 4))}{(c-1)^4 (c-2)^2}$$

Par le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} c^k (-1)^{4-k} &= 1 - \binom{4}{1}c + \binom{4}{2}c^2 - \binom{4}{3}c^3 + c^4 \\ &= 1 - 4c + 6c^2 - 4c^3 + c^4 \end{aligned}$$

$$V(z) = \frac{c^2 ((c-1)^4 - c^4 + 4c^3 - 4c^2)}{(c-1)^4 (c-2)^2} = \frac{c^2 (2c^2 - 4c + 1)}{(c-1)^4 (c-2)^2}$$

7) a) $Y_1 \sim \mathcal{E}(c)$ et $Y_2 \sim \mathcal{E}(c)$

On sait que par transformation affine de la loi exponentielle si $c > 0$:

$cY_1 \sim \mathcal{E}(1)$ de même $cY_2 \sim \mathcal{E}(1)$

Car si $x > 0$, $P(cY_1 \leq x) = P(Y_1 \leq \frac{x}{c})$ où $c > 0$

$$= G\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$= 1 - e^{-x} \text{ où } cY_1 \sim \mathcal{E}(1)$$

Utilise une rapide démonstration.

b) On sait que $\mathcal{E}(1) = \mathcal{J}(1)$

Par stabilité de la loi gamma et cY_1 et cY_2 sont indépendantes par le lemme des conditions (Y_1 et Y_2 le sont)

On a donc $cY_1 + cY_2 \sim \mathcal{J}(2)$

8) a) Soit $x > 0$, $W(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x) \quad] \quad c > 0$
 $= P(cY_1 + cY_2 \leq cx) = K(x)$

Par le théorème de convolution.

Soit f la densité de Y_1 et Y_2 où $Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}$ et $Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}$

- f est bornée

- Y_1 et Y_2 admettent des densités

- Y_1 et Y_2 sont indépendantes

$$h(x) = f * g$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } f(t) \text{ est nulle lorsque } t < 0 \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) f(x-t) dt$$

Si $x - t < 0$ alors l'intégrale est nulle

$$= \int_0^x f(t) f(x-t) dt$$

$$= \int_0^x c e^{-ct} \times c e^{-c(x-t)} dt$$

$$= c^2 e^{-cx} \times \int_0^x e^{-ct} e^{ct} dt$$

$$= c^2 e^{-cx} \times [t]_0^x$$

$$= c^2 e^{-cx} x$$

Donc : $h(x) = \begin{cases} c^2 e^{-cx} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $Z = Y_1 + Y_2$, Soit $x \geq 1$

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X_1 + X_2 \leq x)$$

$$= P(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x))$$

$x \geq 1$ et $\ln(x) \in [0; +\infty[$

par propriété des logarithmes $= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$

$$= h(\ln(x))$$

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Bilan n°1 : $F_2(x) = H(h(x))$ donc $h(x) \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 1$

$$= \int_0^{h(x)} h(t) dt$$

$$= \int_0^{h(x)} c^2 t e^{-ct} dt$$

Par intégration par parties sur le segment $[0, h(x)]$

On pose $u(t) = c^2 t$ et $v(t) = -\frac{1}{c} e^{-ct}$

$$u'(t) = c^2$$

$$v'(t) = e^{-ct}$$

les fonctions en jeu sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\int_0^{h(x)} c^2 t e^{-ct} dt = \left[-\frac{1}{c} e^{-ct} c^2 t \right]_0^{h(x)} + c \int_0^{h(x)} e^{-ct} dt$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-c h(x)} c^2 h(x) + 0 + c \times -\frac{1}{c} [e^{-ct}]_0^{h(x)}$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-c h(x)} c^2 h(x) - e^{-c h(x)} + 1$$

$$= -c h(x) x^{-c} - x^{-c} + 1$$

Ainsi $F_2(x) = \begin{cases} -c h(x) x^{-c} - x^{-c} + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 si c'est densité car $F_2(x) = H(h(x))$

On peut donc dériver et on a :

$$I_3(x) = \begin{cases} -c \times \frac{1}{x} x^{-c} - c \ln(x) (-c) x^{-c-1} - (-c) x^{-c-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c^2 \ln(x) \times \frac{1}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

9(a) Soit ~~$x \geq 1$~~ $x > 1$,

x > 1) $\frac{\ln(x)}{x^2}$ est C^0 sur $[1; +\infty[$, l'intégrale est

impropre en $+\infty$.

Soit $A \in [0; +\infty[$, par intégration par partie sur le segment $[0; A]$, on pose $u(x) = \ln(x)$ $v(x) = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[1; A]$

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx &= \left[\ln(x) \times \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^A + \frac{1}{\alpha-1} \int_1^A \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx \\ &= \frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} \times \frac{1}{-\alpha+1} + 0 + \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^A \\ &= \frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} \times \frac{1}{-\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} \end{aligned}$$

Faisons tendre A vers $+\infty$: ($x > 1$)

Par croissance comparée, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = 0$ 14/30

On a donc grâce à l'intégration par parties :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{1}{(2-1)^2}$$

$$b) E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln(x)}{x^c} dx$$

$$= c^2 \times \frac{1}{(c-1)^2} \quad \text{par 9/a)}$$

Par le théorème du transfert :

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c-1}} dx$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} \quad \text{par 9/a)}$$

Par la formule de Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2 (2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2 (c-1)^4}$$

par les calculs effectués à 6)

Exercice n°3

1/a) $X \in \mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$ $P(X=k) = P(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})$

Par indépendance des cas

$$= \underbrace{(1-p) \times \dots \times (1-p)}_{k \text{ fois}} \times p$$

$$= q^k p$$

Bilan, $X(n) = \mathbb{N}$, $P(X=k) = q^k p$

b) $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k P(X=k))$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} |k q^k p|$ c'est une série géométrique
dérivée première donc elle converge

$= q p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$

$= q p \times \frac{1}{(1-q)^2}$

$= \frac{q p}{p^2} = \frac{q}{p}$

Bilan: $E(X) = \frac{q}{p}$

2) a) soit $k \in \mathbb{N}$

$\frac{X+R}{3} = Q$

$[Q=k] = \left[\frac{X+R}{3} = k \right]$

$= [X+R = 3k]$

$= [X+X-3Q = 3k]$

$= [2X - 3k = 3k] \text{ car } [Q=k]$

$= [X = 3k]$

b) $P(Q=k) = P(X=3k) = q^{3k} p$ par 1a)

$= (1-p)^3 p$
 $P(X=k) \text{ revient } = q^k p \text{ revient à } X(n) \text{ BW}(p) = \text{BW}(1-q)$

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$BN(1-q^3) = BN(1-(1-p)^3)$$

$$BN(p) = BN(1-(1-p)^1) \quad \text{ainsi, } Q \text{ suit la loi } BN(1-q^3)$$

$$3) \quad P(R=0)$$

$$[R=0] = [X-3Q=0] \\ = [X=3Q]$$

$$P(R=2) = P(Q=1) \cap (X=5) \text{ d'après l'énoncé} \\ = q^3 p \times q^5 p \\ = q^2 p^2 q^6$$

On admet

2) Q et R sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall i, j \in Q(1) \times R(1) / i \neq j \quad P(Q=i) \cap (R=j) = P(Q=i) \times P(R=j)$$

On admet l'indépendance

Slag On remarque que la variable X en début d'exercice est une forme de variable géométrique "décalée" de un.

On se rend compte que en posant $Y = X + 1$ on a :

$$Y(1) = 1N^*$$

$$P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = q^{k-1} p$$

On a donc $Y \sim g(p)$ où g

Ainsi la fonction python simple $X = Y + 1$ où $Y \sim g(p)$

b) def div(p):

$$X = \text{simul } X(p)$$

$$Q = \text{simul } X(1 - (1 - p) ** 3)$$

$$R = (1 / 1 + (1 - p) + (1 - p) ** 2) \text{ or } (- \dots) \text{ or } ((1 - p) ** 2 / 1 + (1 - p) + (1 - p) ** 2)$$

return (X, Q, R)

Problème :

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, Soit $m \in \mathbb{N}$

$$h(k+m) = \cos\left(2(k+m)\pi \times \frac{1}{m}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{m} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \text{ car}$$

la fonction cosinus est 2π périodique

Donc $k \in \mathbb{Z}$ et $\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \in \mathbb{R}$

On a bien h est une applications m -périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$

car $h(k+m) = h(k)$

Ainsi, $h \in F_m$

2) $F_m \subset E$, car E est l'ensemble des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

$F_m \neq \emptyset$ la fonction nulle appartient à F_m

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in F_m$

$$\lambda f \in F_m \quad \text{car} \quad \lambda f(k+m) = \lambda f(k)$$

$$g(k+m) = g(k)$$

$$\text{Donc } (\lambda f + g)(k+m) = (\lambda f + g)(k) \in F_m$$

F_m est un sous-espace vectoriel de E

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$ on a $k = nq + r$

$$\text{Soit } f \in F_m \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} f(k+m) &= f(k) \\ f(nq+r+m) &= f(nq+r) \end{aligned}$$

Et donc f est m -périodique donc nq -périodique
($q \in \mathbb{Z}$)

Ainsi $f(nq+r) = f(r)$

Bilan : $f(k) = f(r)$

4) a) Soit $f \in F_m$

i.e. $i = r$ on a admis au 3) que $q, i \in \mathbb{Z} \times I_m : k = nq + r$
et $f(k) = f(i)$

On peut l'écrire sous plusieurs formes

$$\text{On a : } f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k) \\ = f(0) e_0(k) + \dots + f(n-1) e_{n-1}(k)$$

$k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ donc il y aura $n-1$ termes nuls
et 1 terme où $e_i(k)=1$
lorsque $i=k$

Et quand $i=k$ on a

$$f(k) = f(k) \times e_k(k) = f(k)$$

[D'où $\forall k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire $f(k) = f(i)$ ou bien

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k) = f(k)$$

b) $(e_0, \dots, e_{n-1})$ génère F_n car f s'écrit comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$

• et $\text{card}(e_0, \dots, e_{n-1}) = n$

Démontrons la liberté : Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0$$

$$\lambda_0 e_0(0) + \lambda_1 e_1(0) + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}(0) = 0$$

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{car les } i \neq 0 \quad i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$$

On répète le processus $n-1$ fois on aura :

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

Bilan : $(e_0, \dots, e_{n-1})$ génère F_n et est libre de F_n .

On a donc $(e_0, \dots, e_{n-1})$ est une base de F_n

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths appro EDAE EL

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) les coordonnées sont : $(k; \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k))$

On a donc

Soit $(f; g) \in F_n^2$ $\langle f; g \rangle$ c'est une somme d'applications qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$

On a donc bien $F_n^2 \mapsto \mathbb{R}$

• Soit $(f; g; h) \in F_n^3$, Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda f + g; h \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(k) h(k) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k) h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k) h(k) \\ &= \lambda \langle f; h \rangle + \langle g; h \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, il y a la linéarité à gauche

$$\begin{aligned} \text{• Soit } (f; g) \in F_n^2, \quad \langle f; g \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) && \text{car les applications commutent (Elles sont dans } F_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} g(k) f(k) \\ &= \langle g; f \rangle \end{aligned}$$

Bilan : il y a la symétrie donc c'est une application bilinéaire symétrique

• Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{I}} \in F_m$, $\langle f_i, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(k)$

Donc, on a une somme d'éléments positifs ou nuls.

Bilan: $\langle f_i, f \rangle \geq 0$

• Enfin, d'après le dernier point, $f \in F_m$:

$$\langle f, f \rangle = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(k)$$

On a une somme d'éléments positifs donc:

$$f^2(k) = 0$$

Soit $f = 0$

Ainsi $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0_{F_m}$

Conclusion: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur F_m

b) Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k)$$

On d'après l'énoncé on a $\begin{cases} \text{si } i \neq k \text{ alors } e_i(k) = 0 \\ \text{si } j \neq k \text{ alors } e_j(k) = 0 \end{cases}$

On a donc une situation où $i \neq j$

Donc il n'y aura jamais $i = j = k$

Ainsi $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ on a:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k) = 0$$

Ainsi, la base B_n est orthogonale avec ce produit scalaire

Enfin, Soit $i \in \{0, n-1\}$

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_i \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)^2 \\ &= e_i(i) \quad \text{car } i \in \{0, n-1\} \\ &\quad + \sum_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{n-1} e_i(k)^2 \end{aligned}$$

$$= e_i(i) + 0 \quad \text{par l'énoncé 4)}$$

$$= 1 \quad \text{par l'énoncé 4)}$$

Donc $\|e_i\|^2 = \|e_i\| = 1$ et ceci valide $\forall i \in \{0, n-1\}$

On a donc B_n est une base orthonormale pour ce produit scalaire

c) Par la relation utilisée

$$\cos(a+kb) = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \times \left(\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \right) \quad \text{où } 2 \sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$$

On somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \right)$$

Somme télescopique $\left\{ \right.$
$$= \frac{1}{2 \sin(\frac{b}{2})} \times \left(\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(-1)b}{2}\right) \right)$$

d) On pose $a = \frac{b}{2}$, $b = 2a$

F.A.U.X

$$\cos(a + k\pi a) = \cos(2a) = \cos\left(4 \frac{k\pi}{n}\right)$$

Donc a donc $a = 2 \frac{k\pi}{n}$

Ainsi par la relation précédente

Si $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n}$

On a $\sin\left(\left(2n-1\right)\frac{4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)$

$= \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)$ } périodicité

$= \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)$

$= -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

la fonction sinus est impaire

$= 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$

On a donc la suite

e) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} h(k)h(k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + 1\right) \times \frac{1}{2}$ car

Par l'identité $\cos(2a) = \cos^2(a) - 1$ où $a = \frac{2k\pi}{n}$
On a simplement à réarranger.

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : 297 - Maths appls EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{On a } \|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \text{ par Charles}$$
$$= 0 + \frac{1}{2} \times n \text{ par la question 5/a)}$$

Dilem : $\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$

b) a) Soit $f \in F_n$

$$\begin{aligned} Df(k+n) &= f(k+n+1) - f(k+n) \\ &= f((k+n)+1) - f(k+n) \quad \text{par périodicité} \\ &= f(k+1) - f(k) \end{aligned}$$

Donc $Df \in F_n$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in F_n$

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k) \\ &= \lambda f(k+1) - \lambda f(k) + g(k+1) - g(k) \\ &= \lambda Df + Dg \end{aligned}$$

Donc, Df est linéaire et associe Df dans F_n par 6/a)

On a ainsi: Df est un endomorphisme

$$\begin{aligned}
 Dh(k) &= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 0\right) \\
 &\quad \quad \quad = a \quad \quad = b \quad \quad \quad = a \quad \quad = b \\
 &= \\
 &=
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\|Dh\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} Dh(k)^2 = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

On détermine :

$$= 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right) - 1 \right) \times -\frac{1}{2}$$

$$= 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi(2+4k)}{n}\right) \times -\frac{1}{2}$$

$$+ 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sum_{k=0}^{n-1} 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= 0 + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \frac{1}{2} \times n$$

pour la question 5/d)

$$A_{\text{min}}, \|Dh\|^2 = 2m \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Bilan: } \|Dh\| &= \sqrt{2m} \left| \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right| \geq 0 \\ &= \sqrt{2m} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ car } \frac{\pi}{n} \in [0; \pi] \end{aligned}$$

$$\exists (a) \quad (f, g) \in F_n^2$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \langle f; \Delta g \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k+1) - 2g(k) f(k) \\ &\quad + f(k) g(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad -\langle Df, Dg \rangle &= -\sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) (g(k+1) - g(k)) \\ &= -\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) - f(k)g(k+1) \right. \\ &\quad \left. + g(k)f(k) - f(k+1)g(k) \right) \end{aligned}$$

$$\langle f; \Delta g \rangle + \langle Df; Dg \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} -g(k)f(k) - f(k)g(k+1) - f(k+1)g(k) + f(k)g(k-1)$$

On admet

$$b) \text{ On a prouv } : \forall (f, g) \in F_n^2, \quad \langle f; \Delta g \rangle = -\langle Df; Dg \rangle$$

Inverses f et g on a donc

$$\begin{aligned} \langle g; \Delta f \rangle &= -\langle Dg; Df \rangle \\ &= -\langle Df; Dg \rangle \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{symétrique} \\ \text{de } L_1 \end{array}$$

Ainsi, $\langle f; \Delta g \rangle = \langle \Delta f; g \rangle$ grâce à la symétrie du produit scalaire

c) Soit λ une valeur propre de Δ associée à g (avec $g \neq 0$)

On a $\langle f; \Delta g \rangle = \lambda \langle f; g \rangle$ (bilinéarité $\langle \cdot; \cdot \rangle$)

$$\langle g; \Delta g \rangle = \lambda \|g\|^2 = -\|\Delta g\|^2$$

Ainsi $\lambda = -\frac{\|\Delta g\|^2}{\|g\|^2}$ & car $g \neq 0$ (vecteur propre)

Donc les valeurs sont toujours négatives,

$$\lambda \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{8/a) } \Delta(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1) \\ &= \text{id}(k+1) - 2\text{id}(k) + \text{id}(k-1) \\ &= k+1 - 2k + k-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\varepsilon_0 \in \ker(\Delta)$

b) dim $(\ker \Delta) \geq 1$ donc $\exists 0 \in \text{Sp}(\Delta)$ car $\varepsilon_0 \neq 0$

Soit $f \in \ker(\Delta)$:

$$\Delta f = 0 \quad (=)$$

On Admet

Copie anonyme - n°anonymat : 927084

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 30

Session : 2023

Épreuve de : Maths approfondies EDHEC - 297

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9) a) la question 7) b) montre que Δ est
un endomorphisme symétrique.

Ainsi par propriété Δ est diagonalisable et il existe
une base orthonormale ~~ou~~ dans laquelle Δ
a matrice représentative est symétrique

On a donc la base orthonormale
et la formule

b) D'après 7) a)

$$\langle f; \Delta f \rangle = - \| \Delta f \|^2$$

On a donc

10) a)

$A \equiv \text{mat}_{B_3}(\Delta)$

$$\Delta(x) = \text{mat}_{B_3}(\Delta)x = Ax$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = -3A$$

Ainsi, le polynôme $P(X) = X^2 + 3X$ est un polynôme annulateur de A

Ainsi, les valeurs propres possibles sont par propriété -3 et 0

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{donc} \quad 0 \in \text{Sp}(A) = \text{Sp}(A)$$

On a donc le reste.



