

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

29-00076
552248
Maths S



Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES EM LYON (Approfondies)

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème

Préliminaire

$$1) \dim E = m \\ \dim(\mathbb{R}) = 1$$

$$\text{donc } \dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = m \times 1 = m = \dim(E)$$

$$2) a) \operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$$

$$\text{donc } \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1 \text{ ou } \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } \varphi \text{ est une application} \\ \text{nulle} \end{array} \right.$$

$$b) \text{ si } \varphi \text{ est } \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 0, \varphi \text{ est nulle}$$

$$\text{si } \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1 \text{ alors } \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}) \text{ donc } \varphi \text{ est surjective}$$

c) D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \underbrace{\dim(E)}_{=n} \quad \text{donc, comme l'is/pas nulle, } \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1 \text{ d'après b)}$$

$$\dim(\ker(\varphi)) = n - 1$$

donc $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E .

Partie I

$$3) a) \forall P \in \mathbb{R}_p[X], \quad g(P) = \underbrace{\int_0^1 P(t) dt}_{\substack{\in \mathbb{R}_p[X] = E \\ \in \mathbb{R}}}$$

donc $g \in E^*$

b) on pose $P = X^p \in \mathbb{R}_p[X]$

$$g(P) = \int_0^1 x^p dt = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \neq 0 \quad \text{donc}$$

donc g n'est pas l'application nulle donc

d'après 2)c), $\ker(g)$ est un hyperplan de E donc

$$\underline{\dim(\ker(g)) = (p+1) - 1 = p}$$

c) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p / \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_p Q_p = 0$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Les degrés des polynômes de la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ sont échelonnés donc $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une famille libre.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ $g(Q_i) = \int_0^1 x^i dx = \int_0^1 \frac{1}{i+1} dx$ (par linéarité de l'intégrale)

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^{i+1}}{i+1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+1}$$

$$= 0$$

donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q_i \in \ker(g)$

donc $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une famille libre de $\ker(g)$

composée de $p = \dim(\ker(g))$ vecteurs non nuls donc

$(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base du noyau de g .

$$4) a) \forall p \in \mathbb{R}_p[X], \underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}_p[X]} = \underbrace{p(0)}_{\in \mathbb{R}}$$

donc $f \in E^*$

b) ~~Soit $f \in E$~~

Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$

$$\text{On note } P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow P(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X^p, \dots, X)$$

$\ker(f) = \text{Vect}(X^p, \dots, X)$

$$5) a) (f, g) \in (E^*)^2 \mid \begin{cases} f \neq 0 \\ g \neq 0 \end{cases} \text{ donc, d'après 2)c),}$$

$$\dim(\ker(f)) = n-1 = \dim(\ker(g))$$

donc, comme $\ker(f) \subset \ker(g)$, on a :

$\ker(f) = \ker(g)$

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Emplacement
QR Code

552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES EMLYON (Approfondies)

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$5)b) \dim(\ker(f)) = m-1 < \dim(E)$$

donc $\ker(f) \neq E$ donc : $\exists x_0 \in E / x_0 \notin \ker(f)$

(avec $x_0 \neq 0$)

c) Soit $y \in \ker(f) \cap \text{Vect}(x_0)$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x_0 \notin \ker(f)$ donc car $\ker(f)$ est
un espace vectoriel

donc $y = 0$

donc $\ker(f) \cap \text{Vect}(x_0) \subset \{0\}$ de plus,

l'intersection de deux espaces vectoriels étant un
espace vectoriel, $\ker(f) \cap \text{Vect}(x_0)$ est espace vectoriel
donc :

$$\{0\} \subset \ker(f) \cap \text{Vect}(x_0)$$

$$\text{donc } \ker(f) \cap \text{Vect}(x_0) = \{0\} \quad \textcircled{1}$$

de plus, comme $x_0 \neq 0$,

$$\dim(\text{Vect}(x_0)) = 1$$

$$\text{donc } \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Vect}(x_0)) = n-1 + 1 = \dim(E) \quad (2)$$

donc d'après (1) et (2), ~~comme~~

$$E = \ker(f) \oplus \text{Vect}(x_0)$$

d) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ ~~soit~~ une base de $\ker(f)$.

par concaténation, comme (x_0) est une base de $\text{Vect}(x_0)$,

on a : $(e_1, \dots, e_{n-1}, x_0)$ forme une base de E d'après (5)c)

de plus, comme $\ker f = \ker g$ (5)a), alors

$$\forall i \in [1, n-1], g(e_i) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } i \in [2, n-1]. \quad h(e_i) &= g(x_0) \underbrace{f(e_i)}_{=0} - \underbrace{f(x_0)}_{=0} g(e_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, $\forall i \in [2, n-1], h(e_i) = 0$ de plus,

$$h(x_0) = g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(x_0) = 0$$

donc $h \circ \theta$ coïncide sur une base (où θ est l'application nulle)

donc h est nulle.

e) On en conclut que :

$$f = g \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right)}_{\neq 0}$$

Partie II)

6) a) $H \subset E$

donc comme $(e_1, \dots, e_{m-1})$ est une base de H , c'est une

famille libre de E donc (théorème de la base incomplète), il existe un vecteur e_m de E tel que

$\beta = (e_1, \dots, e_m)$ forme une base de E .

5) $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de E donc

$$\forall x \in E, \exists (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m / x = \sum_{i=1}^m a_i e_i \quad \text{donc}$$

par linéarité de φ ,

$$\forall x \in E, \exists (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m / \varphi(x) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(e_i)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket,$$

$$\varphi(e_i) = 0$$

comme $(e_1, \dots, e_{m-1})$ forme une base de H , ~~car~~

(donc $(e_1, \dots, e_{m-1})$ est libre) et que ~~$\forall (e_1, \dots, e_{m-1})$~~

$\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, e_i \in \ker(\varphi)$, alors

$(e_1, \dots, e_{m-1})$ est une famille libre de $\ker(\varphi)$ composée

de $m-1 = \dim(\ker(\varphi))$ vecteurs non nuls.

car $\ker(\varphi)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

donc $(e_1, \dots, e_{m-1})$ est également une base de

$\ker(\varphi)$ donc :

$$\ker(\varphi) = H$$

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Emplacement
QR Code

552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) Soit $x \in E$

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \ker(f_1), x \in \ker(f_2), \dots, x \in \ker(f_p)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^p \ker(f_i)$$

$$\text{donc } \ker(f) = \bigcap_{i=1}^p \ker(f_i)$$

$$8)a) \quad \varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

f est surjective donc $\forall x \in \mathbb{R}^p, \exists y \in E / f(y) = x$
 en particulier pour $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$

donc ε_1 admet un antécédent x par f .

b) $\forall i \in [1, p], f_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ par hypothèse.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p / \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0 \quad (*)$

Soit $i \in [1, p]$. en étendant le résultat de la question

8)a) à l'ensemble des $(\varepsilon_k)_{k \in [1, p]}$, on a :

$$\exists x \in E / (f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_i(x), f_{i+1}(x), \dots, f_p(x)) \\ = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Ainsi, on a d'après $(*)$ $\underbrace{\lambda_1 f_1(x)}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{f_i(x)}_{=1} + \dots + \lambda_p \underbrace{f_p(x)}_{=0} = 0$

$$\text{donc} \quad \lambda_i = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [1, p]$,

on peut conclure que

$(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre de E^*

g) a) $\dim(\text{Im}(f)) \neq p$ car f n'est pas surjective

donc $m \leq p-1$

b) On pose une base $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_p)$

de $\mathbb{R}^p$ complétée à partir d'une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\text{Im}(f)$

On pose $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{p-1})$ qui

est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ car $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$

Ainsi; comme $(e_1, \dots, e_m)$, est une base de $\text{Im}(f)$,

tout vecteur de $\text{Im } f$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{p-1}$ donc

$\text{Im } f \subset H$

c) D'après la q.6, on sait que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire

donc $\text{Im}(f)$ est inclus dans le noyau d'une forme linéaire

10) a) ~~Par contraposition~~

Dans la q.9, on a démontré que :

f n'est pas surjective $\Rightarrow (f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^*

donc par contraposition on a :

~~f est~~ $(f_1, \dots, f_p)$ n'est pas liée ^{dans E^*} $\Rightarrow f$ est surjective

c'est à dire $(f_1, \dots, f_p)$ est liée ^{dans E^*} $\Rightarrow f$ est surjective

Donc, comme $(f_1, \dots, f_p)$ est ^{libre} ~~liée~~ dans E^* , alors

f est surjective.

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Emplacement
QR Code

552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) d'après 7),

$$\bigcap_{i=1}^p \ker(f_i) = \ker(f)$$

d'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\ker(f)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{= p \text{ car } f \text{ est surjective et que } \dim(\mathbb{R}^p) = p} = \underbrace{\dim(E)}_{= m}$$

$$\text{donc } \dim(\ker(f)) = m - p \text{ donc}$$

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^p \ker(f_i)\right) = m - p$$

Partie III .)

M)a)

$$\forall x \in E, f_a(x) = \underbrace{\langle a, x \rangle}_{\in \mathbb{R}} \text{ donc } f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

~~donc $f_a \in E^*$~~ $f_a: E \rightarrow \mathbb{R}$ Soit $(x, x', \lambda) \in E^2 \times \lambda$

$$\begin{aligned} f_a(\lambda x + x') &= \langle a, \lambda x + x' \rangle \text{ d'où par bilinéarité du } \\ &\quad \text{produit scalaire} \\ &= \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, x' \rangle \\ &= \lambda f_a(x) + f_a(x') \end{aligned}$$

$$\text{donc } f_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$$

b) Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} x \in \ker(f_a) &\Leftrightarrow f_a(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle a, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(a)^\perp$$

$$\text{donc } \ker(f_a) = \text{Vect}(a)^\perp$$

c) Supposons que f_a est l'application nulle.

$$\text{Alors } \ker(f_a) = E$$

$$\text{ie } \text{Vect}(a)^\perp = E \text{ donc}$$

$$\text{Vect}(a) = E^\perp = \{0\}$$

$$\text{donc } a = 0_E$$

$$f_a \text{ est nulle} \Rightarrow a = 0_E$$

Id) a)

• $\Phi: E \rightarrow E^*$ (E et E^* sont des espaces vectoriels)

$$\text{Soit } (x, y, \lambda) \in E^2 \times \lambda$$

$$\Phi(\lambda x + y) = f_{\lambda x + y}$$

$$\begin{aligned} \forall x \quad \forall \lambda \in E, f_{\lambda x + y}(x) &= \langle \lambda x + y, x \rangle \\ &= \lambda \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle \text{ par la linéarité} \\ &= \lambda f_x(x) + f_y(x) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \Phi(\lambda x + y) = \lambda f_x + f_y \text{ donc}$$

$$= \lambda \Phi(x) + \Phi(y) \text{ donc}$$

$$\Phi \text{ est linéaire.}$$

b) Soit $a \in E$

$$a \in \ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow f_a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

(à cette étape, on note que l'implication démontrée à la 11)c) est en réalité une double implication)

$$\Leftrightarrow a \in \{0\}$$

$$\text{donc } \ker(\Phi) = \{0\}$$

donc Φ est injective

de plus, $\dim(E) = \dim(E^*)$ d'après 1) donc

Φ est surjective

donc Φ est un isomorphisme de E sur E^*

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Emplacement
QR Code

552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~12~~ c) Φ est bijective d'après 12)b) donc

par définition : $\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E / \Phi(a) = \varphi$ c'est à dire
 $\varphi_a = \varphi$

donc : $\forall x \in E, \varphi_a(x) = \varphi(x)$

13)a) Soit $(A, B) \in M_p(\mathbb{R})^2$

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^t({}^tAB)) = \text{Tr}({}^tBA) = \langle B, A \rangle \\ &= \text{Tr}(B{}^tA) \quad (\text{propriété de la trace}) \\ &= \text{Tr}({}^t({}^tB)A) \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Soit $(A, B, C, \lambda) \in M_p(\mathbb{R})^3 \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + B, C \rangle &= \text{Tr}({}^t(\lambda A + B)C) = \text{Tr}({}^t\lambda AC + {}^tBC) \\ &= \lambda \text{Tr}({}^tAC) + \text{Tr}({}^tBC) \quad \text{par linéarité de la Trace} \\ &= \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire (car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique)

Soit $(A) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (on note $A = (a_{i,j})$)

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle &= \text{Tr}({}^tAA) \\ &= \sum_{i=1}^p [{}^tAA]_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{j,i} a_{j,i} \\ &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} a_{j,i}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (on note $A = (a_{i,j})$)

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle = 0 &\Rightarrow \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} a_{j,i}^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, a_{j,i} = 0 \\ &\Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

b) Supposons que ~~f est~~ $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

Exercice 1

1) a) $\forall t \in [k, k+1]$, on a: $k \leq t \leq k+1$ d'où par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$$

Ainsi, les fonctions considérées sont bien continues sur $[k, k+1]$ donc en intégrant point entre k et $k+1$, on a par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

$$(\text{car } \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1})$$

b) en sommant termes à termes l'inégalité obtenue

à la 1)a) pour k allant de 1 à $n-1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ à l'aide
d'un changement de variable [$k' = k+1$]

d'où, d'après la relation de
Chasles,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 1 - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

d'où, en fin par
définition de S_n ,

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$$

$$c) \int_1^n \frac{dt}{t} = [P_n(t)]_1^n = P_n(n)$$

donc on a d'après 1)b, $S_n - 1 \leq P_n(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$

Ainsi, on a : $\forall n \geq 2, \begin{cases} S_n \leq P_n(n) + 1 \\ S_n \geq P_n(n) + \frac{1}{n} \end{cases}$ d'où.

par transitivité,

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq P_n(n) + 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Emplacement
QR Code

552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d) On a d'après 1)c),

$$\forall n \geq 2, \quad p_n(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq p_n(n) + 1$$

donc, en divisant par $p_n(n) (> 0 \text{ car } n \geq 2)$ on a :

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \underbrace{\frac{1}{p_n(n)n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \leq \frac{S_n}{p_n(n)} \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{p_n(n)}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

donc, par théorème d'encadrement,

$$\frac{S_n}{p_n(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$\text{donc } S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} p_n n$$

2) a)

$\text{rang}(S_0)$ va renvoyer une valeur qui correspond à n tel que

$$S_n \geq S_0$$

En d'autres termes, l'appel $\text{rang}(S_0)$ va renvoyer le nombre de termes nécessaire à S_n pour qu'elle soit plus grande que S_0 .

b) Comme $S_n \sim \frac{1}{n} P_n(n)$

alors le n renvoyé par le programme devrait être relativement similaire à $\exp(S_0)$ c'est à dire que

la valeur renvoyée par $\text{rang}(S_0)$ sera supérieure à

$$1.907 \dots 8 e + 21$$

3) a) en effectuant le changement de variable $k' = k - 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^m t^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} t^k = \frac{1-t^m}{1-t} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } x \in]0, 1[\text{ donc} \\ t \in [0, 1[\text{ donc } |t| < 1 \end{array} \right)$$

b) Analogie

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ en intégrant la somme obtenue précédemment entre 0 et x pour x petit, on obtient (la fonction intégrée est continue)

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{k=1}^m t^{k-1} dt &= \sum_{k=1}^m \int_0^x t^{k-1} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \sum_{k=1}^m \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^x \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

de même, on a : $\int_0^x \frac{1-t^m}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt$ (par linéarité)

$$= \left[-\ln(1-t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt$$

$$= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt$$

d'où, comme $\forall t \in [0, x]$, $\sum_{k=0}^{m-1} t^k = \frac{1-t^m}{1-t}$ (d'après 3/a)),

$$\text{On a : } \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

c) à l'aide d'une intégration par partie (on intègre $t \mapsto 1-t$ et on dérive t^m) on

obtient:

$$\int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt = \boxed{\quad}$$

$$d) \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^m}{1-t} dt \right) = -\ln(1-x)$$

(d'après 3)c)

donc en passant à la limite dans l'égalité de la 3)b),

on a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k} \right) = -\ln(1-x) \quad \text{donc (par unicité de la limite)}$$

donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge de somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Emplacement
QR Code

552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2.

$$1) Z_m(\mathcal{L}) \subset [0, 1]$$

$$\forall t < 0, F_m(t) = 0$$

$$\forall t > 1, F_m(t) = 1$$

$$\forall t \in [0, 1], F_m(t) = P(Z_m \leq t) \\ = 1 - P(Z_m > t)$$

$$= 1 - P([X_1 > t] \cap \dots \cap [X_m > t])$$

d'où, comme $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de
variables aléatoires indépendantes

suivant toutes les lois uniformes sur

$[0, 1]$, on a :

$$= 1 - \prod_{k=1}^m P(X_k > t) = 1 - \prod_{k=1}^m (1 - P(X_k \leq t))$$

$$= 1 - (1 - t)^m$$

donc on a bien :

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^m & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) F_m est de classe C^1 sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - (1-x)^m) = 0 \quad (\text{par continuité})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - (1-x)^m) = 1 \quad (\text{par continuité}).$$

donc F_m est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, comme c'est la fonction de répartition de Z_m , on peut conclure que :

Z_m est à densité

c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

$$f_m(x) = F_m'(x) = 0$$

Soit $x \in [0, 1]$

$$f_m(x) = f \quad F_m'(x) = -1(-m(1-x)^{m-1}) \\ = m(1-x)^{m-1}$$

donc on a bien une densité f_m de Z_m qui est donnée, par x quel que

$$f_m(x) = \begin{cases} m(1-x)^{m-1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) def VarZ(m):

```
from numpy import min  
from numpy.random import random  
return min(random(10))
```

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $F_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

Soit $x \geq 1$ $F_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$

Soit $x \in]0, 1[$ $F_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ (car $|1-x| < 1$ donc $(1-x)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$)

donc $(Z_m)_{m \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à 0

$$4) \underline{P(Z_m = X_m) =}$$

$$a) [Z_m = X_m] =$$

$$[Z_{m-1} > X_m]$$

donc comme X_m suit une loi uniforme sur $]0, 1[$

et indépendante des variables aléatoires $X_1, \dots, X_m$, on a :

$$P(Z_m = X_m) = P(Z_{m-1} - U \geq 0)$$

$$= \int_0^{+\infty} g_{m-1}(x) dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-2} dx \text{ donc l'intégrale converge et :}$$

$$P(Z_m = X_m) = \left[-\frac{(1-x)^{m-1}}{m-1} \right]_0^1 = \frac{1}{m}$$

$$b) \text{ On a : } P(Z_m = X_m) = \frac{1}{m} \text{ (d'après 4)a)}$$

$$\text{donc } P(Z_m - X_m = 0) = \frac{1}{m} \text{ donc}$$

$$P(T_m = 0) = \frac{1}{m}$$

donc ~~par con~~ par contraposé d'une propriété des variables aléatoires à densité que veut que si X est une variable aléatoire à densité, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, P(X=x) = 0$. Donc T_m n'a pas à densité

Copie anonyme - n°anonymat : 552248

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2023

Emplacement
QR Code

552248

Épreuve de : MATHÉMATIQUES APPROFONDIES EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c)

```
def VarT(m):  
    from numpy import min  
    from numpy import random  
    return min(random(m)) - random()
```

5) a) T_{500} ne semble pas discrète, car on voit que la répartition des valeurs se fait par pas de 0,001 s'incrémentant en

regardant le zoom ce qui est caractéristique pour une répartition d'une variable aléatoire à densité.

b) en ayant effectué 20000 simulation de T_{500} , on a obtenu environ 50 fois la valeur 0 donc, comme

on a obtenu $P(T_{500} = 0) = \frac{1}{500} = \frac{50}{20000}$,

cela est cohérent avec le résultat de la question 4a).

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE



