

# Copie anonyme - n°anonymat : 912076



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 15

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EDHEC bs

D2-00069  
912076  
Maths E

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

## Exercice 1:

1)  $\forall m, p \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$ , le coefficient de la  $m$ -ième ligne,  $p$ -ième colonne vaut 0 si aucun chemin ne relie les sommets  $m$  et  $p$  et 1 sinon.

Ainsi :  $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 sont :  
2-1-0-3 ; 2-3-4-3 ; 2-3-0-3 ; 2-3-2-3  
et 2-1-2-3

Il y en a donc 5.

b)

$B = f(A, 3)$   
 $m = B[2, 3]$   
 $\text{print}(m)$

3) a)  $D =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

$\mathcal{D}$                        $A$

c)  $L$  est diagonalisable car symétrique.

4) a)  ${}^tXLX \in M_5(\mathbb{R})$ . Le calcul de la question suivante  
On identifie donc  ${}^tXLX$  à un réel va le démontrer.

b)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-b-d & -a+2b-c & -b+2c-d & -a-c+3d-e & -d+e \end{pmatrix}$$

${}^tX$                        ${}^tX.L$

On multiplie  ${}^tX.L$  par  $X$  à droite et on obtient :

$$\begin{pmatrix} a(2a-b-d) + b(-a+2b-c) + c(-b+2c-d) + d(-a-c+3d-e) + e(-d+e) \\ 2a^2 - ba - da - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - dc - da - dc + 3d^2 - ed - de + e^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 + d^2 - 2ad + a^2 + e^2 - 2ed + d^2$$

En vérifiant chaque coefficient un par un et puisque l'on a

identifié une matrice de  $M_1(\mathbb{R})$  à un réel (question 4a),  
on a bien  ${}^tX L X = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$

c)  $LX = \lambda X$  puisque  $X$  est un vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

$$\text{Donc } LX = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}$$

Utilisons l'expression de  ${}^tX L X$  de la question précédente.

$$\begin{aligned} (a \ b \ c \ d \ e) \times LX &= (\lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 + \lambda d^2 + \lambda e^2) \\ \text{que l'on identifie au réel } \lambda a^2 + \lambda b^2 + \lambda c^2 + \lambda d^2 + \lambda e^2 \\ \Rightarrow {}^tX L X &\geq 0 \text{ avec l'expression de la question 4b} \\ \text{Donc } \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

d)  $U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{L.U} = 0.U \text{ et } U \text{ est non nul.}$$

Ainsi,  $U$  est vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre 0  
 $\lambda_1 = 0$  car toutes les valeurs propres de  $L$  sont positives ou nulles et  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$ .

5) a)  $LX = 0 \Leftrightarrow X$  est vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre 0 (si et seulement si  $X$  non nul)  
 $\Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U)$   
car on avait trouvé à la question 3b

que  $L$  est diagonalisable et donc  $L = PNP^{-1}$  avec  $P$  une matrice inversible donc les colonnes correspondent aux vecteurs colonnes des bases des sous-espaces propres de  $L$  qui sont associés à des valeurs propres distinctes.

b) De plus, puisque  $L$  possède 5 valeurs propres et<sup>vu</sup> que  $L$  est diagonalisable, les sous-espaces propres de  $L$  sont de dimension 1 et sont associés ainsi à des valeurs propres distinctes.  
On en conclut que  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$ .

### Exercice 2:

1)  $f(x) = 0$   $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$   
et on a  $f'(x) = 0 \leq \frac{1}{2}$  par exemple.

Ainsi  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , avec l'inégalité des accroissements finis.  
version 2, on a que :

$$|f(x) - f(y)| \leq K \times |x - y| \quad \text{avec } K = \frac{1}{2} \in ]0, 1[ \quad \text{par exemple}$$

2)  $x$  et  $y$  sont des réels.

Ainsi, cette application de l'inégalité des accroissements finis version 2 a pour condition la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

3) Supposons que l'équation  $f(x) = x$  admette plus d'une solution.

4) a)  $P_n$ : " $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|$ "

• Initialisation:  $P_0$ :  $|u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0|$  donc  $P_0$  est vraie.

• Hérédité: Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $P_n$  est vraie et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie.

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K |u_{n+1} - u_n|$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 912076

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 15

Session : 2023

Emplacement  
QR Code

Épreuve de : Mathématiques EDHEC bs

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or,  $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n \times |u_1 - u_0|$  par hypothèse de récurrence

Ainsi, on multiplie par  $k \in ]0, 1[$  et on remet les 2 inégalités ensemble ce qui donne :

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k |u_{n+1} - u_n| \leq k \cdot k^n \times |u_1 - u_0|$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k^{n+1} \times |u_1 - u_0|$$

$P_{n+1}$  est vraie, la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence,  $P_n$  est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $\sum_{n \geq 0} k^n \times |u_1 - u_0|$  converge car  $|u_1 - u_0| \in \mathbb{R}$

et  $\sum_{n \geq 0} k^n$  converge car  $k \in ]0, 1[$ , c'est donc une série géométrique de raison  $k \in ]-1, 1[$

Par comparaison de séries à terme général positif,  $\sum_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n|$  converge.

La convergence absolue implique la convergence donc  $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} - u_n$  converge. Notons a sa limite.

c)

5) a) On a déjà que  $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n \times |u_1 - u_0|$  (question 4a)

on  $|u_{i+1} - u_i| \leq k^i \times |u_1 - u_0|$

On somme pour  $i$  allant de  $n$  à  $n+p-1$  et on obtient :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \times |u_1 - u_0|$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| &= |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+2} - u_{n+1}| + \dots \\ &\quad + |u_{n+p-1+1} - u_{n+p-1}| \end{aligned}$$

par télescopage  $= |u_{n+p} - u_n|$

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \times |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \times k^n \times \frac{1 - k^{n+p-1-n+1}}{1 - k}$$

On en déduit l'inégalité

$$|u_{n+p} - u_n| \leq k^n \times \frac{1 - k^p}{1 - k} |u_1 - u_0|$$

c)

sur  $\mathbb{R}$

6) a)  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  par opérations sur des fonctions  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  (en particulier le dénominateur ne s'annule pas).

$$f(t) = \frac{1}{1+e^t} \quad f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$$

$$f''(t) = \frac{-e^t(1+e^t)^2 - 2e^t(1+e^t)(-e^t)}{(1+e^t)^4}$$

$$= \frac{(1+e^t)(-e^t(1+e^t) + 2e^{2t})}{(1+e^t)^4}$$

$$= \frac{(1+e^t)(-e^t - e^{2t} + 2e^{2t})}{(1+e^t)^4} = \frac{(1+e^t)(e^t(e^t - 1))}{(1+e^t)^4}$$

$f''(t)$  est donc du signe de  $e^t - 1$

$$e^t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1$$

$$\Leftrightarrow t \geq \ln(1) = 0 \quad (x \mapsto \ln(x) \text{ croissante})$$

Ainsi :

|       |           |     |           |
|-------|-----------|-----|-----------|
| $t$   | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f''$ |           | $0$ |           |
| $f'$  | $-$       | $0$ | $+$       |

$\searrow -\frac{1}{4} \nearrow$

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f(0) = -\frac{1}{4}$$

On a donc bien  $|f'(t)| \leq \frac{1}{4}$

c) Avec la question 1 on a :  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} \times |x - y| \quad \text{avec } \frac{1}{4} \in ]0, 1[$$

$f$  est donc  $\frac{1}{4}$  contractante. C'est l'inégalité des accroissements finis avec  $\frac{1}{4}$  qui est bien continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et un majorant de la dérivée est ici  $\frac{1}{4}$

d) ~~Prenons~~  $x = u$  La question 4 a nous donne :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times |u_1| \quad \text{et } u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3/4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

série géométrique de raison  $\frac{1}{4} \in ]-1, 1[$

$(u_n)$  converge vers  $a$ .

e) def suite(n) :

$$u = 0$$

for k in range(1, n+1) :

$$u = 1 / (1 + mp \cdot \exp(u))$$

return u

f) Reprenons l'inégalité de la question 5c avec  $K = \frac{1}{4}$   
 et  $|u_1 - u_0| = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |a - u_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |a - u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{2}{3} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{10^{-3} \times \frac{3}{2}}{1}$$

$$\text{car } x \rightarrow \frac{1}{x} \text{ décroissante} \Leftrightarrow 4^n \geq \frac{1}{10^{-3} \times \frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4^n \geq \frac{2 \times 1000}{3} = \frac{2000}{3}$$

g)

def approx\_a(m):

$$a = 0$$

$$u = 0$$

while 4\*\*m < 2000/3:

$$u = \text{suite}(m)$$

return u

Exercice 3 :

1) a) Si  $a = b$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  qui est triangulaire supérieure  
 donc les valeurs propres se situent sur sa diagonale.  
 On voit que  $\text{Sp}(A) = \{a\}$

b) Supposons  $A$  diagonalisable avec  $a \neq b$

$$\text{Ainsi } A = P \mathcal{D} P^{-1} \text{ avec } \mathcal{D} = a I_2 \text{ (a unique valeur propre)} \\ = a I_2$$

Il y a contradiction car  $A \neq a I_2$

$A$  n'est donc pas diagonalisable si  $a = b$ .

2) a)  $\text{Sp}(A) = \{a, b\}$  car  $A$  est triangulaire

$$b) \quad A \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 912076

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 15

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EDHEC bs

## Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$$

A

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$  sont non nuls. Ils sont donc vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres a et b.

c) B est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. De plus  $\text{card}(B) = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$  donc B est une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$

a)  $P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^2-ab \end{pmatrix} = AP$$

A

Soit  $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$$D \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y(b-a) \end{pmatrix} = P D$$

Ainsi  $AP = P D$

avec  $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$P$  est inversible car triangulaire sans coefficients nuls sur la diagonale

Ainsi  $AP = P\mathcal{D} \Rightarrow A = P\mathcal{D}P^{-1} \Leftrightarrow A$  est diagonalisable.  
car  $\mathcal{D}$  diagonale

3) a)  $X(\omega) = Y(\omega) = \llbracket 1; +\infty \llbracket$

On a donc  $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) \wedge (Y=n)$

par indépendance  $= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) \times P(Y=n)$

b)  $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$   
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

série géométrique

de raison  $\frac{1}{4} \in ]-1; 1[$   
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

4) a)  $A(X, Y)$  n'est pas diagonalisable  $\Leftrightarrow (X=Y)$  est réalisé  
question 1b

et  $P(X=Y) = \frac{1}{3}$

La probabilité  $p$  pour que  $A(X, Y)$  ne soit pas diagonalisable vaut donc  $\boxed{\frac{1}{3}}$ .

b) On répète un grand nombre de fois la même simulation et on regarde la fréquence empirique des simulations où  $X=Y$  en calculant  $\frac{c}{n}$

La loi faible des grands nombres nous indique que les fréquences empiriques tendent vers les probabilités théoriques.

Ainsi  $i = 1 - \frac{c}{n} \approx 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

## Problème : Partie I :

$$1) 0 \geq 0 \text{ et } \frac{c}{x^{1+c}} \geq 0 \text{ donc } f(x) \geq 0$$

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 dx}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{1+c}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } A \geq 1: \int_1^A \frac{c}{x^{1+c}} dx &= c \int_1^A x^{-1-c} dx \\ &= c \left[ \frac{x^{-c}}{-c} \right]_1^A = c \left( \frac{A^{-c}}{-c} - \frac{1}{-c} \right) \\ &= \frac{c A^{-c}}{-c} - \frac{c}{-c} \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{-c A^c} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut 1.

$f$  peut être considérée comme une densité.

$$2) \forall t \in \mathbb{R}, X(\omega) = [1; +\infty[ \text{ donc } F(x) = 0 \text{ si } x < 1$$

$$\text{Si } x \geq 1, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_1^x \frac{c}{t^{1+c}} dt$$

$$= c \left[ \frac{t^{-c}}{-c} \right]_1^x = c \left( \frac{x^{-c}}{-c} - \frac{1}{-c} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c}{-c x^c} + 1 \quad \text{Donc } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{c}{-c x^c} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{-x^c} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Si } x < 1, P_{(X>t)}(X \leq tx) = 0$$

$$\text{Si } x \geq 1, P_{(X>t)}(X \leq tx) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P((X>t) \cap (X \leq tx))}{P(X>t)}$$

$$= \frac{P(t < X \leq tx)}{1 - P(X \leq t)} \quad = 0 \text{ car } X > t$$

$$= \frac{P(X \leq tx) - P(X \leq t)}{1 - P(X \leq t)} = \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$tx > 1$   
 $t > 1$

$$= \frac{-\frac{c}{(tx)^c} + 1 - \left(-\frac{c}{t^c} + 1\right)}{1 - \left(-\frac{c}{t^c} + 1\right)} = \frac{-\frac{c}{(tx)^c} + \frac{c}{t^c}}{-\frac{c}{t^c} + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) &= P_{(X>t)}(X \leq tx) \quad \text{car } t > 1 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{-x^c} + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Partie II :

$$\begin{aligned} 4) G(1) &= P(Y \leq 1) = P(Y = 1) \quad \text{car } Y \text{ est de densité} \\ &\quad \text{nulle sur } ]-\infty; 1[ \\ &= 0 \quad \text{car } Y \text{ est à densité.} \end{aligned}$$

$$\text{5) a) } \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)} = \frac{P(t < Y \leq tx)}{P(Y > t)}$$

$$= \frac{P((Y > t) \cap (Y \leq tx))}{P(Y > t)} \stackrel{\text{Bayes}}{=} P_{(Y>t)}(Y \leq tx)$$

$$= P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right)$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 912076

Emplacement  
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 15

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques EDHEC bs

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= P(Y \leq x) = G(x)$  d'après l'énoncé (la loi de  $Y$  conditionnellement à l'événement  $(Y > t)$  est la loi de  $\frac{x}{t} Y$ )

b)  $G$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]1; +\infty[$  car  $G$  est la fonction de répartition de la variable à densité  $Y$  qui admet une densité  $g$  continue et strictement positive sur  $]1; +\infty[$

$$G(x) = \frac{1}{1-G(t)} \times (G(tx) - G(t))$$

$$G'(x) = \frac{t G'(tx)}{1-G(t)} \quad \text{car } \frac{1}{1-G(t)} \text{ et } G(t) \text{ sont des constantes.}$$

c)

$$b) a) \quad y = \frac{x}{t^c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{t^c} = x \quad \Leftrightarrow \quad y' = 0$$

$$\text{Donc on injecte dans } (E_1) : \quad \frac{y}{t^c} = 0$$

$\Leftrightarrow y$  est constante  
sur  $]1; +\infty[$

$$b) \quad \mathcal{Y}_{E_1} = \left\{ t \mapsto \frac{k}{t^c} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

c)  $\boxed{u = 1}$  est solution de  $(E_2)$  car  $u' = 0$  et donc  $1 + 0 = 1$

d)  $h + \frac{t}{c} h' = 1 \Leftrightarrow h - u + \frac{t}{c} h' = 0$  car  $h' = 0$   
On a bien  $h$  solution de  $(E_2) \Leftrightarrow h - u$  solution de  $(E_1)$ .

e) On connaît la solution de l'équation homogène et une solution particulière.

Ainsi,  $\mathcal{Y}_{E_2} = \left\{ t \rightarrow 1 + \frac{k}{t^c} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$  par superposition  $t > 1$

7) a) On sait que  $\forall t > 1, G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$

b)

Partie III :

8) a)  $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = P(Z \leq x) = P(h(X) \leq x)$   
car  $x \rightarrow e^x$  croissante  $= P(X \leq e^x) = F(e^x)$

On  $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$  car  $x \rightarrow h(x)$  croissante

$$\text{Donc } P(X \leq e^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{c}{-c e^{-cx}} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b)  $\boxed{\text{Donc } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)}$

c)

def simulX(c):

    return mp.exp(nd.exponential(1/c))

can  $Z = \ln(X) \Leftrightarrow e^Z = X$

