Correction : EDHEC 2023

Exercice 1 :

Algèbre linéaire, trace, matrices, diagonalisation

1) Comme M est la matrice représentative de f, on sait que $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \operatorname{Ker}(M)$. Or, par le théorème du rang on sait que $\dim \operatorname{Ker}(M) = n - \operatorname{rg}(M) = n-1$. Donc :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(f) = n-1.}$$

Comme le noyau de f n'est pas réduit à zéro, on sait que f n'est pas bijectif, donc :

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } f.}$$

2) **a)** Comme M est de rang 1, on sait que toutes ses colonnes sont proportionnelles, en notant C_i la $i-$ème colonne de M on sait alors qu'il existe des réels $\ell_2, ..., \ell_n$ tels que :

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ C_i = \ell_i C.$$

Posons alors $L = (1\ \ell_2\ ...\ \ell_n)$ et on obtient bien :

$$\boxed{M = CL.}$$

Remarque

Pour ceux qui ne sont pas entièrement satisfait, faites le calcul à la main CL et vous verrez clairement apparaitre la matrice M.

b) Par définition de la trace on sait que $\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

De plus, $LC = (1\ \ell_2\ ...\ \ell_n) \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = m_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \ell_i m_{i,1}$. Considérons alors $i \in [\![2, n]\!]$, comme d'après la question précédente $C_i = \ell_i C$, on a en particulier : $m_{i,i} = \ell_i m_{i,1}$. On obtient donc $\sum_{i=2}^{n} \ell_i m_{i,1} = \sum_{i=2}^{n} m_{i,i}$, puis :

$$\boxed{\operatorname{Tr}(M) = LC.}$$

c) $M^2 = CLCL = C\operatorname{Tr}(M)L = \operatorname{Tr}(M)CL = \operatorname{Tr}(M)M$. La première égalité découle de la question 2)a), la deuxième de la question 2)b), la troisième découle du fait que $\operatorname{Tr}(M)$ est un réel, puis la dernière de la 2)a). On a donc :

$$\boxed{M^2 = \operatorname{Tr}(M)M.}$$

3) Remarquons à l'aide de la question 2)b) :
$MC = CLC = C\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M)C$, comme C est non nul, $\text{Tr}(M)$ est une valeur propre de M associée au vecteur propre C, et comme M représente f dans la base canonique on peut conclure :

$$\boxed{\text{Tr}(M) \text{ est une valeur propre de } f.}$$

4) On suppose $\text{Tr}(M) = 0$. D'après la question 2)c) on remarque le polynôme $P(x) = x^2 - \text{Tr}(M)x$ est annulateur de M, ses deux racines sont clairement 0 et $\text{Tr}(M)$. Les deux valeurs propres possible pour f (car M représente f dans la base canonique) sont donc 0 et $\text{Tr}(M)$.

Par la première question de l'exercice, on sait que 0 est bien une valeur propre de f et par la question précédente $\text{Tr}(M)$ est aussi une valeur propre de f.

$$\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont } 0 \text{ et } \text{Tr}(M).$$

Comme on suppose ici que $\text{Tr}(M) = 0$ alors f possède une unique valeur propre qui est 0. Dès lors, à l'aide de la question 1) :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_0(f)) = n - 1 \neq n.$$

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

> **Remarque**
> Un raisonnement par l'absurde est acceptable aussi pour cette question.

5) Dans l'argument de la question précédente nous avons déjà justifié (indépendamment de l'hypothèse $\text{Tr}(M) = 0$) que les valeurs propres de f sont 0 et $\text{Tr}(M)$.

Comme on suppose ici $\text{Tr}(M) \neq 0$, f possède deux valeurs propres distinctes. De plus, on sait que $\dim E_0(f) = n - 1$ et comme C est un vecteur propre associé à la valeur propre $\text{Tr}(M)$, on sait que $\dim E_{\text{Tr}(M)}(f) \geq 1$. On obtient alors que la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est supérieur ou égale à n, mais par le cours on sait que cette somme est inférieur ou égale à n, ainsi elle est égale et on peut conclure :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

6) **a)** Supposons $ac \neq b$.

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z & = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z & = 0 \\ bx + cy + z & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z & = 0 \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right) z & = 0 \\ \left(c - \frac{b}{a}\right) y & = 0 \end{cases}$$

Remarquons que $\dfrac{1}{c}-\dfrac{a}{b}$ et $c-\dfrac{b}{a}$ sont non nuls, en effet ces deux quantités valent 0 si et seulement si $ac-b=0$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Les deux dernières lignes du système donnent alors $y=z=0$. On en déduit donc que la première donne aussi $x=0$. On vient donc de montrer que la seule solution au système $AX=0$ est $X=0_3$. Ainsi, le noyau de A est réduit au singleton nul et par conséquent A est inversible, ce qui est absurde.

$$\boxed{ac=b.}$$

b) La deuxième colonne de A est proportionnelle à la première, en effet $a\times C_2=C_1$ (en utilisant $ac=b$). De même, on a $b\times C_3=C_1$ (en utilisant $b/c=a$ car $b\neq 0$). De plus, comme la première colonne de A est non nulle ($a\neq 0$), on peut conclure :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A)=1.}$$

7) **a)** Par le théorème du rang et la question précédente on sait que le noyau de A est de dimension 2, donc 0 est une valeur propre de A et son sous-espace propre associé est de dimension 2.

En utilisant la partie 1, on remarque, en notant C la colonne 1 de A :

$AC=\begin{pmatrix}1+1+1\\ a+a+b/c\\ b+ca+b\end{pmatrix}=3C$ (à l'aide de la relation $ac=b$). Comme $C\neq 0$, on sait que 3 est une valeur propre de A associé au vecteur propre C. Le même raisonnement que celui de la question 5 nous permet d'affirmer (car A représente g dans la base canonique) :

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 3.}}$$

b) Comme A vérifie les hypothèse de la partie 1, on sait que $A^2=\mathrm{Tr}(A)A=3A$. Une récurrence immédiate montre alors que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=3^{n-1}A$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } A^n \text{ appartient à } \mathrm{Vect}(A).}$$

Exercice 2 :
Loi de Pareto, densité, intégrales impropres, python

1) f est positive et continue sur $]-\infty, 1[$ car c'est la fonction nulle. Soit $x \geq 1$, comme $c > 2$ et $x^{c+1} > 0$, f est continue et positive sur $[1, +\infty[$ comme quotient bien définie de telles fonctions. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et positive sur $\mathbb{R}$.

Comme f est nulle sur $]-\infty, 1[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)dt$ converge et vaut 0. Considérons $A > 1$,

$\displaystyle\int_{1}^{A} f(t)dt = c\int_{1}^{A} t^{-c-1}dt = c\left[\frac{t^{-c}}{-c}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^c}$. Comme $c > 2$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} f(t)dt = 1.$$

Cette limite étant finie, on sait alors par la relation de Chasles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge et vaut } 1.$$

$$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité.}}$$

2) Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, et que $t \mapsto tf(t)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, on sait que :

$$X \text{ possède une espérance si et seulement si } \int_{1}^{+\infty} tf(t)dt \text{ converge.}$$

Soit $A > 1$, $\displaystyle\int_{1}^{A} tf(t)dt = c\int_{1}^{A} t^{-c}dt = c\left[\frac{t^{-c+1}}{-c+1}\right]_1^A = \frac{c}{1-c}\left(\frac{1}{A^{c-1}} - 1\right)$.
En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient alors :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} tf(t)dt = \frac{c}{c-1}.$$

La limite étant finie, on en déduit :

$$\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre 1 qui vaut } \frac{c}{c-1}.}$$

De même, on sait que :

$$X \text{ possède un moment d'ordre 2 si et seulement si } \int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)dt \text{ converge.}$$

Soit $A > 1$, $\displaystyle\int_{1}^{A} t^2 f(t)dt = c\int_{1}^{A} t^{-c+1}dt = c\left[\frac{t^{-c+2}}{-c+2}\right]_1^A = \frac{c}{2-c}\left(\frac{1}{A^{c-2}} - 1\right)$.
En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient alors car $c > 2$:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} t^2 f(t)dt = \frac{c}{c-2}.$$

La limite étant finie, on en déduit que X admet un moment d'ordre deux, donc une variance. La formule de Koenig-Huygens nous donne alors :

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \dfrac{c}{c-2} - \left(\dfrac{c}{c-1}\right)^2 = \dfrac{-c}{(c-2)(c-1)^2}$.

$$\boxed{X \text{ possède un variance qui vaut } \dfrac{c}{(c-2)(c-1)^2}.}$$

3) Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on sait que pour $x < 1$ $F(x) = 0$.
Soit $x \geq 1$,
$F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt = c\int_1^x t^{-c-1}dt = c\left[\frac{t^{-c}}{-c}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^c}$.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.}$$

4) **a)** Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on sait que $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.
Si $x < 0$: $G(x) = 0 = F(x)$.
Si $x \geq 0$: $G(x) = \mathbb{P}(\ln(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq e^x) = F(e^x)$.

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(e^x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.}$$

b) En utilisant la question précédente et la question 3), on obtient (car $e^x \geq 1$ pour $x \geq 0$) :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre c. Comme la fonction de répartition caractérise la loi :

$$\boxed{Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } c.}$$

c)
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulX(c) :
    return np.exp(rd.exponential(c))
```
En effet, comme $Y = \ln(X)$, on a $X = e^Y$ et on sait que Y suit une loi exponentielle de paramètre c.

5)
```
def simulZ(c) :
    return simulX(c) * simulX(c)
```

6) L'existence du moment d'ordre 1 et du moment d'ordre 2 de Z découle du fait que Z est un produit de variables aléatoires indépendantes qui possèdent un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2.

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes : $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{c^2}{(c-1)^2}$ par la question 2).

De même, le lemme des coalitions nous assure l'indépendance entre X_1^2 et X_2^2 donc :
$E(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \dfrac{c^2}{(c-2)^2}$.
La formule de Koenig-Huygens nous donne alors :
$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = \dfrac{c^2}{(c-2)^2} - \left(\dfrac{c^2}{(c-1)^2}\right)^2 = \dfrac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-1)^4(c-2)^2} = \dfrac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \dfrac{c^2}{(c-1)^2},\ \mathbb{E}(Z^2) = \dfrac{c^2}{(c-2)^2} \text{ et } \mathbb{V}(Z) = \dfrac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}.}$$

7) a) cY_1 est une transformation affine de Y_1, c'est donc une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par :
$f_{cY_1}(t) = \dfrac{1}{|c|} f_{Y_1}\left(\dfrac{t-0}{c}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{c}{c} e^{-c\frac{t}{c}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ car Y_1 suit une loi exponentielle de paramètre c. On reconnait alors une densité d'une loi exponentielle de paramètre 1, comme la densité caractérise la loi :

$$\boxed{cY_1 \text{ et } cY_2 \text{ suivent la loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

Remarque
On pouvait aussi simplement utiliser les propriétés du cours sur la loi exponentielle ...

b) Comme la loi exponentielle de paramètre 1 coïncident avec la loi gamma de paramètre 1, on sait que cY_1 et cY_2 suivent la loi gamma de paramètre 1. De plus, comme X_1 et X_2 sont indépendantes et que cY_1 et cY_2 sont respectivement fonction de X_1 et de X_2, le lemme des coalitions nous donne l'indépendance entre cY_1 et cY_2. On obtient alors, par stabilité de la loi gamma :

$$\boxed{cY_1 + cY_2 \text{ suit la loi gamma de paramètre } 2.}$$

8) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x) = \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{c}(cY_1 + cY_2) \leq x\right) = K(cx)$.
Comme K est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Ainsi, par composition avec la fonction $x \mapsto cx$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on sait que H est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par conséquent, $Y_1 + Y_2$ est à densité et une densité h de $Y_1 + Y_2$ est donnée par H' là où elle est dérivable et en attribuant une valeur arbitraire positive ailleurs. On obtient alors :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cK'(cx) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Comme $cY_1 + cY_2$ suit la loi gamma de paramètre 2, pour $x \geq 0$ on a en notant k une densité de $cY_1 + cY_2$:

$$K'(cx) = k(cx) = \frac{(cx)^{2-1} e^{-cx}}{\Gamma(2)} = cxe^{-cx}.$$

Finalement,

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.}$$

b) $Z(\Omega) = [1, +\infty[$.
Si $x < 1$: $F_Z(x) = 0$.
Si $x \geq 1$: $F_Z(x) = \mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) = \mathbb{P}(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x)) = \mathbb{P}(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x)) = H(\ln(x))$.

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ H(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.}$$

Pour les mêmes raisons que celles citées à la question 8)a) on sait que Z est une variable aléatoire à densité et une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} H'(\ln(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Pour $x \geq 1$, $H'(\ln(x)) = h(\ln(x)) = c^2 \ln(x) e^{-c\ln(x)} = \dfrac{c^2\ln(x)}{x^c}$ par la question 8)a). On obtient finalement :

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.}$$

9) **a)** Soit $\alpha > 1$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A > 1$, posons : $\begin{cases} u(t) = \ln(x) & u'(t) = \dfrac{1}{x} \\ v'(t) = x^{-\alpha} & v(t) = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \end{cases}$.

Les fonctions u et v étant clairement de classe C^1 sur $[1, A]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx &= \left[\frac{\ln(x)x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \int_1^A x^{-\alpha} dx\right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A\right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{A^{\alpha-1}(\alpha-1)}\right) \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln(A)}{A^{\alpha-1}} = 0$ par croissance comparée car $\alpha - 1 > 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}(\alpha-1)} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Cette dernière limite étant finie, on peut conclure :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{(1-\alpha)^2}.}$$

b) Comme on sait que $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ existent, on a :
$\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_1^{+\infty} xc^2 \frac{\ln(x)}{x^{c+1}dx} = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} = c^2 \frac{1}{(1-c)^2} = \frac{c^2}{(c-1)^2}$. L'avant dernière égalité découle de la question précédente.
De même, $\mathbb{E}(Z^2) = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 c^2 \frac{\ln(x)}{x^{c+1}dx} = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} = c^2 \frac{1}{(1-(c-1))^2} = \frac{c^2}{(c-2)^2}$.
Comme on retrouve bien les mêmes moments d'ordre 1 et 2, on peut conclure que l'on retrouve bien la même espérance et la même variance.

Exercice 3 :

Pile ou Face, discrètes, python.

1) a) Si on obtient Pile au premier lancer alors X prend la valeur 0, et si on n'obtient que des Faces alors il n'y aura jamais "avant la premier Pile", donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit alors $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(F_1 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(F_1) \times ... \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= q^k p.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La loi de } X \text{ est donnée par : } \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = q^k p \end{cases}.}$$

b) Remarquons à l'aide de la question précédente, que la variable aléatoire $T = X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Ainsi, $X = T - 1$ est une combinaison linéaire d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, donc X admet bien une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.}$$

Remarque

On pouvait évidemment faire plus compliqué en calculant à la main...

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$, Supposons l'événement $(Q = k)$ réalisé, alors $X = 3k + R$. Comme R ne prend que trois valeurs (0,1 et 2), on en déduit que $X = 3k$ ou $X = 3k + 1$ ou $X = 3k + 2$, on a donc l'inclusion :

$$(Q = k) \subset (X = 3k) \cup (X = 3k + 1) \cup (X = 3k + 2)$$

Réciproquement, si X prend une des trois valeurs $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ alors d'après le principe de la division euclidienne, on a nécessairement $Q = k$. Finalement,

$$\boxed{(Q = k) = (X = 3k) \cup (X = 3k + 1) \cup (X = 3k + 2).}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q = k) &= \mathbb{P}((X = 3k) \cup (X = 3k + 1) \cup (X = 3k + 2)) \\
&= \mathbb{P}(X = 3k) + \mathbb{P}(X = 3k + 1) + \mathbb{P}(X = 3k + 2) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= q^{3k}p + q^{3k+1}p + q^{3k+2}p && \textit{(par la question 1)a))} \\
&= pq^{3k}(1 + q + q^2) \\
&= (1 - q)q^{3k}\frac{1 - q^3}{1 - q} && (1 + q + q^2 \textit{ est une somme géométrique})
\end{aligned}$$

$$= (1-q^3)(q^3)^k$$
$$= (1-q^3)(1-(1-q^3))^k$$

$$\boxed{Q \text{ suit la loi BN}(1-q^3).}$$

3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R=0) &= \mathbb{P}(X=3Q) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} X=3k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=3k) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k} \\
&= p\frac{1}{1-q^3} \\
&= \frac{1-q}{1-q^3} \\
&= 1+q+q^2
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}(R=1) = \mathbb{P}(X=3Q+1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} X=3k+1\right)$. Donc un raisonnement similaire au précédent donne :

$$\mathbb{P}(R=1) = \frac{q}{1+q+q^2}.$$

Enfin pour $\mathbb{P}(R=2)$, il suffit de remarquer $R(\Omega) = \{0,1,2\}$, donc :

$$\mathbb{P}(R=2) = 1-\mathbb{P}(R=1)-\mathbb{P}(R=0) = 1-\frac{1+q}{1+q+q^2} = \frac{q^2}{1+q+q^2}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R=0) = \frac{1}{1+q+q^2},\ \mathbb{P}(R=1) = \frac{q}{1+q+q^2} \text{ et } \mathbb{P}(R=2) = \frac{q^2}{1+q+q^2}.}$$

4) Soit $i \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \mathbb{P}((R=0)\cap(Q=i)) = \mathbb{P}(X=3i) = pq^{3i} \text{ par 1)}a). \\ \mathbb{P}(R=0)\mathbb{P}(Q=i) = \dfrac{1}{1+q+q^2}(1-q^3)(1-(1-q^3))^i = \dfrac{p}{1-q^3}(1-q^3)q^{3i} = pq^{3i} \end{cases}$

On raisonne de même pour $(R=1)$ et $(R=2)$.

$$\boxed{Q \text{ et } R \text{ sont indépendantes.}}$$

5) **a)** Notons Y une loi géométrique de paramètre p, on remarque :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y-1=k) = \mathbb{P}(Y=k+1) = q^k p.$$

Par conséquent X et $Y-1$ suivent la même loi et comme la commande `rd.geometric(p)-1` renvoie une réalisation de $Y-1$ donc de X :

$$\boxed{\text{La fonction } \texttt{simulX(p)} \text{ renvoie bien une réalisation de } X.}$$

b)
```
import numpy as np
def div(p) :
    X = simulX(p)
    Q = np.floor(X/3)
    R = X - 3*Q
    return X,Q,R
```

Problème :
Fonctions périodiques, algèbre linéaire et bilinéaire, trigonométrie

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$,
$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, car cos est 2π périodique. On vient donc de montrer que pour tout k entier relatif, $h(k+n) = h(k)$. Comme h va de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ on obtient bien :

$$\boxed{h \in F_n.}$$

2) • Par définition de F_n, on a $F_n \subset E$.
• Notons 0_E l'application nulle de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $0_E(k+n) = 0 = 0_E(k)$. Donc $0_E \in F_n$.
• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(h,g) \in F_n^2$, comme h et g sont des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, et que E est un espace vectoriel on sait que $\lambda h + g$ est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$:
$(\lambda h + g)(k+n) = \lambda h(k+n) + g(k+n)$. Mais comme h et g sont dans F_n elle sont n-périodiques, donc : $h(k+n) = h(k)$ et $g(k+n) = g(k)$. On obtient alors :

$$(\lambda h + g)(k+n) = \lambda h(k) + g(k) = (\lambda h + g)(k).$$

Ainsi, la fonction $\lambda h + g$ est n-périodique et appartient à F_n.

$$\boxed{F_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

3) Soit $f \in F_n$. $f(k) = f(nq+r) = f(n + n(q-1) + r) = f(n(q-1)+r)$ car f est $n-$périodique. On en déduit alors par itération successives que $f(n(q-1)+r) = f((n-2)q+r) = ... = f(r)$.

$$\boxed{f(k) = f(r).}$$

Remarque
Pour faire propre il faudrait faire une récurrence pour démontrer que : Si f est n-périodique alors

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ f(pn) = f(p).$$

4) **a)** Soit $k \in \mathbb{Z}$, écrivons alors $k = nq + r$ avec $r \in I_n$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, comme e_i est un élément de F_n la question 3) nous permet d'affirmer :

$$e_i(k) = e_i(r).$$

On en déduit alors : $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(r)$. De plus, par définition de e_i on a aussi :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f(i)e_i(r) = \begin{cases} f(i) \times 1 & \text{si } i = r \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases} = \begin{cases} f(r) & \text{si } i = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On obtient donc $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(r) = 0 + ... + 0 + f(r) \times 1 + 0 + ... + 0 = f(r)$. D'après la question 3) on sait que $f(k) = f(r)$, on peut donc conclure :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i(k).}$$

b) • D'après la question précédente on sait que la famille B_n est génératrice de F_n, en effet on a montré :

$$\forall f \in F_n,\ f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)e_i.$$

• Montrons que B_n est libre dans F_n en considérant des scalaires $a_0, ...a_{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i e_i = 0_E.$$

On a alors : $\forall k \in \mathbb{Z},\ a_0 e_0(k) + ... + a_{n_1} e_{n-1}(k) = 0$. En remplaçant k par 0 l'égalité précédente devient $a_0 \times 1 + 0 + ... + 0 = 0$ donc $a_0 = 0$. En faisant de même en remplaçant k par 1, puis par 2, ... , puis par $n-1$, on obtient successivement : $a_0 = a_1 = .. = a_{n-1} = 0$. La famille est bien libre.

$$\boxed{B_n \text{ est une base de } F_n.}$$

c) D'après la décomposition de la question 4)a) :

$$\boxed{\forall f \in F_n,\ f = (f(0), ..., f(n-1)) \text{ dans la base } B_n.}$$

5) **a)** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g, h) \in F_n^3$.

• Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(k) \in \mathbb{R}$ et $g(k) \in \mathbb{R}$, donc par somme $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$.

• $\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)f(k) = \langle g, f\rangle$. Donc $\langle , \rangle$ est symétrique.

• $\langle \lambda f + g, h\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(k) + g(k))h(k) = \lambda\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$ par linéarité de la somme. donc $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche, puis par symétrie on en déduit que $\langle , \rangle$ est bilinéaire.

• $\langle f, f\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 \geq 0$. Donc $\langle , \rangle$ est positive.

• Si $\langle f, f\rangle = 0$, comme pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ $f(k)^2 \geq 0$, on en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(k) = 0$. La fonction f est donc nulle sur I_n, mais comme elle est dans F_n, on sait aussi que c'est une fonction n-périodique, ainsi elle est nulle sur $\mathbb{Z}$ (car elle est nulle sur un intervalle de longueur sa période). $\langle , \rangle$ est définie positive.

$$\boxed{\langle , \rangle \text{ est un produit scalaire sur } F_n.}$$

Remarque
Ce produit scalaire n'a rien d'extraordinaire en tenant compte de la question 4)*c*), en effet dans ce produit scalaire on somme les produits coordonnées par coordonnées des coefficients des éléments de F_n dans la base B_n, cela ressemble étrangement (ou pas) au produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ ...

b) Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$,

$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)e_j(k) = \begin{cases} 0 + ... + 1 \times 0 + 0 + ... + 0 \times 1 + ... + 0 & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)^2 = 0 + ... + 0 + 1 + 0 + ... + 0 & \text{si } i = j \end{cases}$. Où on utilise simplement la définition des e_i. Ainsi, la famille B_n est une famille orthonormale. La question 4)*b*) nous permet alors de conclure :

$$\boxed{B_n \text{ est une base orthonormale de } F_n \text{ pour ce produit scalaire.}}$$

c) D'après le résultat admis, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) && \textit{(par linéarité)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{i=-1}^{n-2} \sin\left(a + \frac{(2i+1)b}{2}\right) && \textit{(en posant } k = i+1\textit{)} \\ &= \sin\left(a + \frac{(2(n-1)+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(-2+1)b}{2}\right) && \textit{(par téléscopage)} \\ &= \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Comme $b \in]0, 2\pi[$: $\frac{b}{2} \in]0, \pi[$, donc $\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$. L'égalité établie précédemment nous permet alors de conclure :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}}.$$

d) • Posons $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n} \in]0, 2\pi[$ la question précédente donne alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)4\pi}{2n}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{n}2\pi\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad \textit{(car } \sin \textit{ est } 2\pi \textit{ périodique)}$$
$$= 0$$

En raisonnant exactement de la même manière en posant cette fois $a = \frac{2\pi}{n}$ et $b = \frac{4\pi}{n}$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = \frac{\sin(0) - \sin(0)}{\sin\left(2\frac{2\pi}{n}\right)} = 0.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0.}$$

e)

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} h(k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1+\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}{2} && \textit{(car } \cos(2a) = 2(\cos(a))^2 - 1\textit{).} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n}{2} && \textit{(par linéarité et la question précédente)}
\end{aligned}$$

Comme une norme est toujours positive, on obtient :

$$\boxed{\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}.}$$

6) **a)** Soient $f \in F_n$ et $k \in \mathbb{Z}$. Comme f est une application de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$, il est clair que $f(k+1) - f(k) \in \mathbb{R}$ donc $D(f) \in E$.
De plus, $D(f)(k+n) = f(k+1+n) - f(k+n) = f(k+1) - f(k) = D(f)(k)$ car f est $n-$périodique. Ceci étant vrai pour tout k de $\mathbb{Z}$, on obtient que $D(f)$ est n-périodique.

$$\boxed{D(f) \in F_n.}$$

b) La question précédente nous montre que l'application D va de F_n dans F_n.
Considérons alors $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $(f,g) \in F_n^2$:
$D(\lambda f + g)(k) = (\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k) = \lambda(f(k+1) - f(k)) + g(k+1) - g(k) = \lambda D(f)(k) + D(g)(k)$.
Ceci étant vrai pour tout k de $\mathbb{Z}$: D est linéaire.

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } F_n.}$$

c) Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
D(h)(k) &= h(k+1) - h(k) \\
&= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) \\
&= -2\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&= -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité provient de l'égalité :

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$$

qui se justifie à l'aide des formules données dans l'énoncé et en utilisant aussi la parité de cos et l'imparité de sin. Finalement,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ D(h)(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).}$$

d)

$$\begin{aligned}
\|D(h)\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} D(h)(k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)^2 && \textit{(par la question précédente)} \\
&= 4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{4k\pi}{n}\right)}{2} && \textit{(car } \sin(a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}\textit{)} \\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \left(n - \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 (n - 0) && \textit{(par la question 5)d))} \\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 n
\end{aligned}$$

Une norme étant toujours positive, et comme $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$ on obtient bien :

$$\boxed{\|D(h)\| = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{2n}.}$$

7) **a)** Soit $(f, g) \in F_n^2$.

$$\begin{aligned}
\langle f, \Delta(g)\rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\Delta(g)(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{i=-1}^{n-2} f(i+1)g(i)
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{i=-1}^{n-2} f(i+1)g(i) = f(0)g(-1) + \sum_{i=0}^{n-2} f(i+1)g(i) = f(n)g(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} f(i+1)g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i+1)g(i)$ car f et g sont $n-$périodique. On obtient donc :

$$\langle f, \Delta(g)\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{i=0}^{n-1} f(i+1)g(i)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
-\langle D(f), D(g)\rangle &= -\sum_{k=0}^{n-1} D(f)(k)D(g)(k) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1)-f(k))(g(k+1)-g(k)) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} f(i)g(i) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) \qquad i = k+1
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i)g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)g(i)$ en utilisant que $f(0)g(0) = f(n)g(n)$ par n périodicité de f et g. Ainsi, on a :

$$-\langle D(f), D(g)\rangle = -2\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1).$$

On constate bien que :

$$\boxed{\langle f, \Delta(g) = -\langle D(f), D(g)\rangle.}$$

b) Soit $(f,g) \in F_n^2$,
$\langle \Delta(f), g\rangle = \langle g, \Delta(f)$ par symétrie du produit scalaire. La question précédente nous donne alors :

$$\langle g, \Delta(f) = -\langle D(g), D(f)\rangle.$$

Mais toujours par symétrie du produit scalaire on sait que $\langle D(g), D(f)\rangle = \langle D(f), D(g)\rangle$. On obtient donc :

$$\langle \Delta(f), g\rangle = \langle f, \Delta(g).$$

Ceci étant vrai pour tout f et g de F_n, on a :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$$

c) Comme Δ est un endomorphisme symétrique il admet des valeurs propres. Considérons λ une valeur propre et notons $f \in F_n$ un vecteur propre qui lui est associé. La question 7)a) nous donne :

$$\begin{aligned}
\langle f, \Delta(f)\rangle = -\langle D(f), D(f)\rangle &\iff \langle f, \lambda f\rangle = -\|D(f)\|^2 && \textit{(f vecteur propre)}\\
&\iff \lambda\langle f, f\rangle = -\|D(f)\|^2\\
&\iff \lambda\|f\|^2 = -\|D(f)\|^2\\
&\iff \lambda = -\frac{\|D(f)\|^2}{\|f\|^2} && \textit{(car } f \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Comme une norme est positive, on obtient : $\lambda \leq 0$. Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres de Δ :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \Delta \text{ sont négatives ou nulles.}}$$

8) **a)** $\Delta(\varepsilon_0)(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1) = 1 - 2 + 1 = 0$.

$$\boxed{\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta).}$$

b) Considérons $f \in \mathrm{Ker}(\Delta)$,

$$\begin{aligned}
\Delta(f)(k) = 0 &\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = 0\\
&\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1)\\
&\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ D(f)(k) = D(f)(k-1)\\
&\iff D(f) \text{ est constante sur } \mathbb{Z} && \textit{(notons c sa valeur)}\\
&\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ f(k+1) - f(k) = c\\
&\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) - f(k) = nc\\
&\Longrightarrow f(n) - f(0) = nc\\
&\Longrightarrow 0 = c && \textit{(car f est } n-\textit{périodique et } n \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Comme $c = 0$, on obtient que $D(f)$ est l'application nulle sur $\mathbb{Z}$, d 'où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(k+1) = f(k)$$

Ainsi, une récurrence immédiate montre que f est une fonction constante sur $\mathbb{Z}$, c'est donc une combinaison linéaire de ε_0, et on a :

$$\mathrm{Ker}(\Delta) \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_0).$$

Cette inclusion combinée avec celle que nous offre la question précédente nous donne :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0).}$$

9) **a)** On sait que Δ est un endomorphisme symétrique il est donc diagonalisable dans une base orthonormale constituée de vecteurs propres de Δ. De plus, par la question 8)b) on sait que $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) \neq 0$, donc $0 \in \mathrm{Sp}(\Delta)$ avec $E_0(\Delta) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0)$. Ainsi, ε_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Comme $\|\varepsilon_0\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 1^2 = n$ on sait que le vecteur $\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0$ est un vecteur propre orthonormale pour la valeur propre 0. Donc :

$$\boxed{\text{Il existe un b.o.n de } F_n \text{ de la forme } \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\right) \text{ constituée de vecteurs propres.}}$$

Comme $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$, on sait que $f \in \text{Vect}(\varepsilon_0)^\perp$ et on a aussi $\text{Vect}(\varepsilon_0)^\perp = E_0(\Delta)^\perp$.
De plus, Δ étant symétrique, on a le résultat suivant :

$$F_n = E_0(\Delta) \overset{\perp}{\bigoplus} \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\Delta)\setminus\{0\}} E_\lambda(\Delta) \right).$$

Donc : $f \in E_0(\Delta)^\perp \subset \bigoplus\limits_{\lambda \in \text{Sp}(\Delta)\setminus\{0\}} E_\lambda(\Delta)$. Ainsi, f est combinaison linéaire de $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$:

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \text{ des réels tels que } f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i.}$$

b) Utilisons le résultat de la question 7)a) en considérant $g = f$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\|D(f)\|^2 &= -\langle f, \Delta(f) \rangle \\
&= -\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j f(\varepsilon_j) \right\rangle && \textit{(par 9)a) et linéarité de } \Delta) \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i \alpha_j \langle \varepsilon_i, f(\varepsilon_j) \rangle && \textit{(par bilinéarité)} \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \lambda_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle && \textit{(par orthogonalité entre les } \varepsilon_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 |\lambda_i| \|\varepsilon_i\|^2 && \textit{(car les valeurs propres sont négatives)} \\
&\geq c \sum_{i=1}^{n-1} \|\alpha_i \varepsilon_i\|^2 && \textit{(car c est le minimum des } |\lambda|) \\
&\geq c \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i \right\|^2 && \textit{(par le théorème de Pythagore)} \\
&\geq c\|f\|^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\|D(f)\|^2 \geq c\|f\|^2.}$$

10) **a)** Comme $\Delta(e_0) \in F_n$, utilisons le résultat de la question 4)b) :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \Delta(e_0)(k) = \sum_{i=0}^{2} \Delta(e_0)(i) e_i(k).$$

Or, $\Delta(e_0)(0) = e_0(0+1) - 2e_0(0) + e_0(0-1) = -2$.
$\Delta(e_0)(1) = e_0(1+1) - 2e_0(1) + e_0(1-1) = 1$.
$\Delta(e_0)(2) = e_0(2+1) - 2e_0(2) + e_0(2-1) = e_0(3) = e_0(0) = 1$.
On en déduit que les coordonnées de $\Delta(e_0)$ dans la base B_3 sont $(-2, 1, 1)$. Comme A est la matrice représentative de Δ dans la base B_3, on obtient bien :

$$\boxed{\text{La première colonne de } A \text{ est } {}^t(-2\ 1\ 1).}$$

b) On remarque facilement que $A^2 = -3A$ donc $P(x) = x^2 + 3x$ est un polynôme annulateur de A.
Les racines de ce polynôme sont 0 et -3, qui sont donc les seules valeurs propres possibles pour Δ (car A représente Δ dans la base B_3).
Remarquons deux choses :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -3 \times \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs étant non nuls, on vient de montrer que 0 et -3 sont bien des valeurs propres de Δ. Donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \Delta \text{ sont } 0 \text{ et } -3.}$$

Comme -3 est la seule valeur propre non nulle de Δ, on a $c = 3$, on en déduit alors :

$$\boxed{\forall f \in F_3,\ \|D(f)\|^2 \geq 3\|f\|^2.}$$

c) Par les questions 5)e et 6)d on sait que :

$$\|h\|^2 = \frac{3}{2} \text{ et } \|D(h)\|^2 = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

On remarque alors que $\|D(h)\|^2 = 3\|h\|^2$. Or, on sait que pour tout $f \in F_3$, on a :

$$\|D(f)\|^2 \geq 3\|f\|^2.$$

Comme h est un élément de F_3, on peut conclure que

$$\boxed{h \text{ réalise } \min_{f\in F_3}(\|D(f)\|^2 - 3\|f\|^2) \text{ et qu'il vaut } 0.}$$