PREPA Option Maths approfondies

Mathématiques approfondies Mathématiques

500429

VALLENAS

CARLOS FELIPE

07/09/2002

Note de délibération : 18.81 / 20

Numéro d'inscription 500429

Né(e) le 07/09/2002

Signature

Nom VALLENAS

Prénom (s) CARLOS FELIPE

18.81 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/06

Numéro de table 038

Exercice 1 :

Partie 1 :

Q1) a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de AB si et seulement si $\det(AB - \lambda I_2) = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.81 / 20

$\det(AB - \lambda I_2) = (2-\lambda)(-1-\lambda)$

Donc $\det(AB - \lambda I_2) = 0 \iff \lambda \in \{-1, 2\}$.

D'où $\underline{Sp(AB) = \{-1, 2\}}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})^*$.

$(AB + I)X = 0 \iff 3x_1 + 3x_2 = 0$

$\iff x_1 = -x_2$

$\iff X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

D'où $\underline{E_{-1}(AB) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$.

$(AB - 2I)X = 0 \iff \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ -3x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff x_2 = 0$

$\iff X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

D'où $\underline{E_2(AB) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

De même, $\lambda \in Sp(BA) \iff \det(BA - \lambda I_2) = 0$
et $\det(BA - \lambda I_2) = (-1-\lambda)(2-\lambda) = \det(AB - \lambda I_2)$.
D'où $Sp(BA) = Sp(AB) = \{-1, 2\}$.

$$(BA + I)X = 0 \iff \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_2 = 0$$

$$\iff X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

D'où $E_{-1}(BA) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$(BA - 2I)X = 0 \iff -3x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\iff x_1 = -x_2$$

$$\iff X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

D'où $E_2(BA) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$,

Q2) a) Si $BX = 0$, alors $ABX = 0$
Donc $\lambda X = 0$.
Or $\lambda \neq 0$ et X est un vecteur propre donc $X \neq 0_{n,1}$,
donc $\lambda X = 0$ est absurde.
D'où $BX \neq 0$.

b) On a $(BA)(BX) = B(ABX) = B \times (\lambda X) = \lambda BX$.

Or $BX \neq 0_{n,1}$ d'après (Q2-a), donc (*) BX est vecteur propre pour BA associé à la valeur propre λ.

(*) $\lambda \in Sp(BA)$ et

Q3) a)

Si $BX = 0$ alors $B^{-1}BX = X = 0$, or X est vecteur propre donc c'est absurde.

D'où $BX \neq 0_{n,1}$

On a $(BA)(BX) = B(ABX) = B \times 0 = 0$, or $BX \neq 0_{n,1}$
donc $0 \in Sp(BA)$ et BX est vecteur propre pour BA associé à la valeur propre 0.

b)

Soit $Y \in \operatorname{Im}(BA)$.
Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(BA)X = Y$.
Donc $B(AX) = Y$.
D'où $Y \in \operatorname{Im}(B)$. D'où $\operatorname{Im}(BA) \subseteq \operatorname{Im}(B)$.
Or B n'est pas inversible donc $\operatorname{Im}(B) \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
D'où $\operatorname{Im}(BA) \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi, BA n'est pas inversible : $rg(BA) < n$.

D'où finalement $0 \in Sp(BA)$.

Numéro d'inscription 500419

Né(e) le 07/09/2002

Nom VALLENAS

Prénom (s) CARLOS FELIPE

18.81 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/06

Numéro de table 038

Q4) En (Q2) et en (Q3) nous avons montré que si λ est valeur propre de AB, qu'elle soit nulle ou pas, alors λ est valeur propre de BA.

Ainsi $Sp(AB) \subseteq Sp(BA)$.

On a une symétrie des rôles entre A et B ce qui conclut : $Sp(BA) \subseteq Sp(AB)$.

D'où $Sp(BA) = Sp(AB)$.

Q5) On a vu en (Q1-b) que $E_{-1}(AB) \neq E_{-1}(BA)$ dans ce cas précis donc AB et BA n'ont a priori pas les mêmes espaces propres associés aux mêmes valeurs propres.

Partie 2 :

Q6) a) En posant $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$, où $\deg(Q) \leq n-1$ on obtient $Q(A) = 0_n$ et $Q \neq 0$ car il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_k \neq 0$.

Ainsi A admet un polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.81 / 20

b) Q est annulateur de A donc toute valeur propre de A est racine de Q.
Or A admet n valeurs propres distinctes.
Donc Q admet au moins n racines distinctes.
Comme $\deg(Q) \leq n-1$, $Q = 0$; ce qui est absurde.

c) On peut conclure grâce à (Q6) que la seule combinaison linéaire nulle de la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est celle à coefficients nuls.
Donc la famille est libre.

Q7) a) $A \in \mathcal{M}_n$ admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$\dim(E_{\lambda_k}(A)) = 1$.
Or $X \neq 0$ et $X \in E_\lambda(A)$.
Donc $E_\lambda(A) = \mathrm{vect}(X)$.

b) $BAX = B(AX) = \lambda BX$
et $BAX = (BA)X = (AB)X = A(BX)$.

c) Donc $A(BX) = \lambda BX$
Ainsi $BX \in E_\lambda(A) = \mathrm{vect}(X)$.

Q8) Soit $\lambda \in Sp(A)$, et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^*$ tel que $AX = \lambda X$.
Alors $BX \in \text{vect}(X) = E_\lambda(X)$ d'après (Q7-c).
Si $BX = 0$, alors comme $X \neq 0_{n,1}$, X est vecteur propre pour B (associé à la valeur propre 0).
Si $BX \neq 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $BX = \mu X$, donc X est vecteur propre pour B (associé à la valeur μ).

Q9) a) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable, donc il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A, tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$.
D'après (Q8), ces vecteurs propres de A sont également vecteurs propres de B.

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
On a $(AB)X_i = A(BX_i) = A(\mu_i X_i) = \mu_i (AX_i) = \lambda_i \mu_i X_i$
et X_i est un vecteur propre (pour A) donc $X_i \neq 0_{n,1}$.
Ainsi $\lambda_i \mu_i \in Sp(AB)$.

Donc $\{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1, n]\!]\} \subset Sp(AB)$.
Donc $n \leqslant \text{card}(Sp(AB))$.
Comme $\text{card}(Sp(AB)) \leqslant n$ (puisque $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$),
$Sp(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$.

Q10) a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^2$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
On a $\varphi(P + \mu Q) = ((P+\mu Q)(\lambda_1), \dots, (P+\mu Q)(\lambda_n))$
$= (P(\lambda_1) + \mu Q(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n) + \mu Q(\lambda_n))$
$= (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) + \mu (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$
$\varphi(P + \mu Q) = \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$

Donc $\underline{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[x], \mathbb{R}^n)}$.

Soit maintenant $P \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.

$\varphi(P) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_k) = 0$.

Donc P admet au moins n racines distinctes.

Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $\deg(P) \leq n-1$, d'où $P = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[x]}$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[x]}\}$.

Comme $\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[x]}\} \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$, $\underline{\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[x]}\}}$.

Ainsi $\underline{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ dans } \mathbb{R}^n}$.

b) D'après (Q10-a), le <u>n-uplet</u> $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ admet <u>un unique antécédent par φ</u>,

c'est-à-dire qu'il existe un <u>unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$</u>

tel que $(\mu_1, \dots, \mu_n) = \varphi(P) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

Ainsi, <u>pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $BX_i = P(\lambda_i) X_i$</u>.

c) Notons $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\underline{P(A) X_i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k X_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k X_i = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k\right) X_i \underline{= P(\lambda_i) X_i}.$$

Ainsi, <u>par l'unicité de P, on obtient $B = P(A)$</u>.

Q11) a) On a <u>$\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</u> et <u>$0_n \in \mathcal{C}(A)$</u>,

puisque $A \times 0 = 0 = 0 \times A$.

Numéro d'inscription 500429

Né(e) le 07/09/2002

Signature

Nom VALLENAS

Prénom (s) CARLOS FELIPE

18.81 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/06

Numéro de table 038

Soit $(B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (Q11)a) - suite)

$A(B+\lambda C) = AB + \lambda AC = BA + \lambda CA = (B+\lambda C)A$

Donc $B+\lambda C \in \mathcal{C}(A)$.

Ainsi, $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) On sait que les polynômes en A commutent avec A donc $\{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\} \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Et en (Q10-c) nous avons montré que si $AB = BA$, alors $B = P(A)$, d'où $\mathcal{C}(A) \subseteq \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.

Donc $\mathcal{C}(A) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.81 / 20

Exercice 2 :

Q1) On a $0 \notin Sp(f)$ donc f est bijectif.
Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Q2) a)
Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que φ est un endomorphisme symétrique de E si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

b) A représente un endomorphisme symétrique dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est une base orthonormée, donc A est symétrique
i.e. ${}^tA = A$.

c) A est symétrique donc par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale * P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$.
* donc inversible.
Ainsi, ${}^tPAP = D$ est diagonale.

e) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
Si $x = 0$, $\langle f(x), x \rangle = \langle f(x), 0 \rangle = 0$.
Si $\langle f(x), x \rangle = 0$ alors $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant 0$ (d'après (Q2-d))
Or $\lambda_1 > 0$, donc $\|x\|^2 \leqslant 0$, d'où $\|x\|^2 = 0$, i.e. $x = 0$.

Ainsi, $\langle f(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Numéro d'inscription 50042 9

Né(e) le 07/09/2002

Nom VALLENAS

Prénom (s) CARLOS

18.81 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet □ 1 ou □ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 038

Problème :

Partie 1 :

Q1)
```
def F(x) :
        return np.exp(x) / (1+ np.exp(x)).
```

Q2) F est un quotient de deux fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $F \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

donc $$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.81 / 20

Q3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(1+e^{x})^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $e^x(1-e^x)$, i.e. celui de $1-e^x$

Alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$f(x)$			$+$		
F	0		$\nearrow$		1

Q4) Soit $x \in \mathbb{R}$.

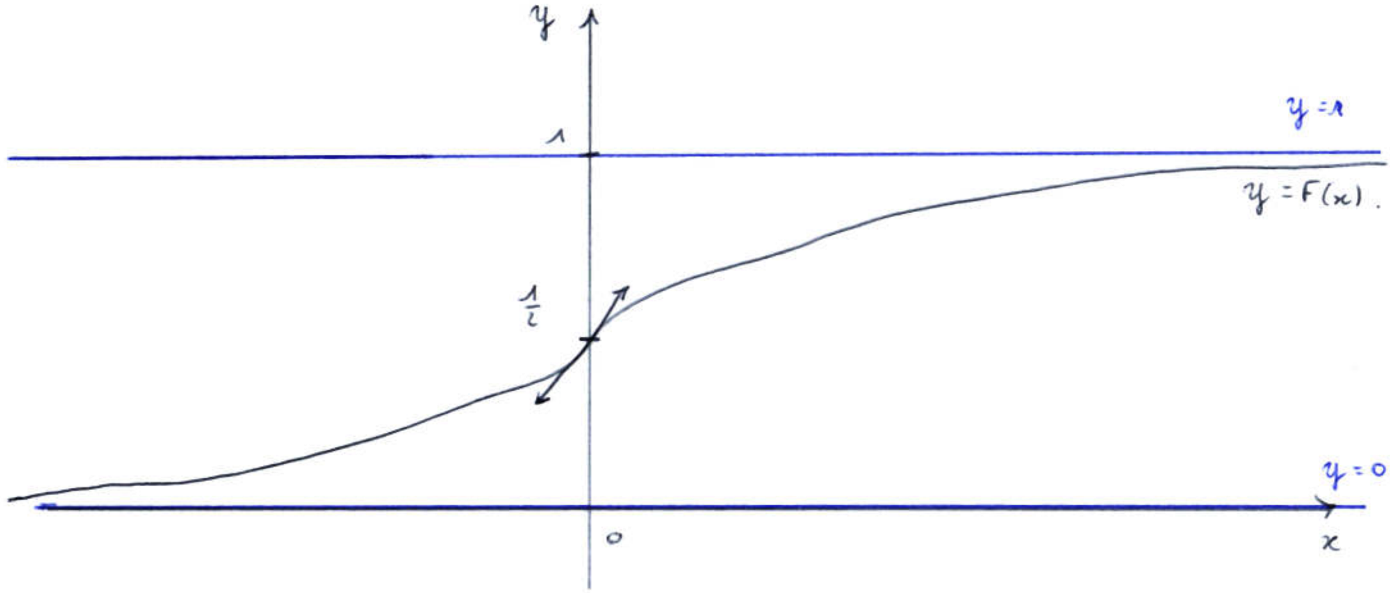
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{x}}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = f(x)$$

Donc f est paire.

$$F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+e^{x}} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{x}}{2(1+e^{x})} = \frac{1-e^{x}}{2(1+e^{x})} = -\left(F(x)-\frac{1}{2}\right).$$

Donc $F - \frac{1}{2}$ est impaire.

Q5)



Q6) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle $f(x) = F'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

F est continue (car dérivable) donc le théorème de la bijection assure que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]\lim_{x \to -\infty} F(x), \lim_{x \to +\infty} F(x)[=]0, 1[$.

Soit $y \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} y = F(x) &\iff y(1+e^x) = e^x \\ &\iff y + y e^x = e^x \\ &\iff y = e^x (1-y) \\ &\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $F^{-1} :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Partie 2 :

Q7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leqslant \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$ et par critère de Riemann $(2 > 1)$,

$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument donc elle converge.

Q8) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_A^B f(t)\, dt = F(B) - F(A)$$

Or $\lim_{A \to -\infty} F(B) - F(A) = F(B)$ et $\lim_{B \to +\infty} F(B) = 1$.

Donc par passage à la limite lorsque A tend vers $-\infty$ puis lorsque B tend vers $+\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

Ainsi f est une densité, et comme $F' = f$, et $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \end{cases}$
F est la fonction de répartition associée.

Q9) . On a $x \mapsto x^2 f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $x^4 f(x) = \frac{x^4 e^x}{(1+e^x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^4 e^x}{e^{2x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^4}{e^x}$
Donc $\lim_{x \to +\infty} x^4 f(x) = 0$.

Numéro d'inscription: 500419

Né(e) le: 07/09/2002

Nom: VALLENAS

Prénom (s): CARLOS FELIPE

18.81 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Numéro de table 038

Q 9 - suite) Donc $x^2 f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge par critère de Riemann ($2>1$).

Donc par négligeabilité de fonctions positives $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge également.

Par parité de $x \mapsto x^2 f(x)$, $\int^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge également.

Donc par la relation de Chasles $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge.

Alors X admet une variance, donc elle admet une espérance.

Q 10) a) Effectuons le changement de variable $t=-x$, $\mathcal{C}^1$, bijectif de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$, dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx$.

Cela donne $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = \int_{+\infty}^{0} -t f(-t)(-dt)$

$= -\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$

d'après (Q4) et la parité de f.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.81 / 20

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x) = - \int_{0}^{+\infty} x f(x)\, dx$

b) $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx$$

$E(X) = 0$

Q11) On a $\displaystyle V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$

$$= 2 \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$ par la parité de $x \mapsto x^2 f(x)$.

$$V(X) = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$$

Q 12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{R}_+$, $x \in [0, A]$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n} \end{cases}$ où $(u,v) \in \mathcal{C}^1([0,A])^2$ et on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-nx} \end{cases}$

Ainsi
$$\int_0^A x\, e^{-nx}\, dx = \left[-\frac{1}{n} x e^{-nx} \right]_0^A + \frac{1}{n} \int_0^A e^{-nx}\, dx.$$
$$= -\frac{1}{n^2} nA\, e^{-nA} + \frac{1}{n} \int_0^A e^{-nx}\, dx$$

Or par croissance comparée $\lim\limits_{A \to +\infty} -\frac{1}{n^2} nA\, e^{-nA} = 0$

et on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n}$.

Donc par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ on obtient la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^2}$.

Q 13) Montrons la propriété souhaitée par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$.

* $N = 1$:
$$4\left(\sum_{n=1}^{1} \left((-1)^{1-1} \int_0^{+\infty} x\, e^{-nx}\, dx \right) + (-1)^1 \int_0^{+\infty} R_1(x)\, dx \right.$$
$$= 4 \int_0^{+\infty} x\, e^{-nx} - x\, e^{-2x} \times \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx.$$
$$= 4 \int_0^{+\infty} \frac{x\, e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx$$
$= V(X)$ d'après (Q12).

Donc la propriété est vraie au rang 1.

* ~~Supposons la propriété vraie pour un entier naturel non nul N fixé.~~

Q14) a) Soit N^*, $x \geqslant 0$.

On a $|R_N(x)| = \left| \dfrac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}} \right|$

$= \dfrac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}$

$\leqslant x e^{-(N+1)x}$ (puisque $1+e^{-x} \geqslant 1$).

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On a par croissance de l'intégrale généralisée (et par l'inégalité triangulaire)

$$\left| \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_n(x)|\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} x e^{-(N+1)x}\,dx$$

$$\leqslant \frac{1}{(N+1)^2} \quad \text{(d'après (Q12))}$$

Donc, comme $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(N+1)^2} = 0$, par encadrement,

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx = 0.$$

Q15) Par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans le résultat obtenu en (Q13),

$V(X) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ puisque $\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^2}$

$= 4 \times \frac{\pi^2}{12}$ et $\lim_{N \to +\infty} (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx = 0.$

$V(X) = \frac{\pi^2}{3}$

(puisque $\left|(-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx\right|$)

Numéro d'inscription 500429

Né(e) le 07/09/2002

Nom VALLENAS

Prénom (s) CARLOS FELIPE

Signature

18.81 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Numéro de table 038

Partie 3 :

Q16) Par théorème on sait que $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ converge en probabilité vers son espérance.

Or $E(V_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{1}{n} \times n \times E(X^2)$ par égalité en loi des $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et X.

$= V(X) + E(X)^2$ par la formule de Koenig-Huygens

$E(V_n) = \frac{\pi^2}{3}$ d'après (Q10-b) et (Q15).

D'où $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{\pi^2}{3}$

Q17) On a $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{\pi^2}{3}$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme V_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{3V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \sqrt{3\times\frac{\pi^2}{3}} = \pi$

On peut donc poser $T_n = \sqrt{3V_n}$ et $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \pi$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.81 / 20

Q18) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_{F^{-1}(U)}(x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \text{ par croissance de } F.$$
$$= F_U(F(x))$$

$F_{F^{-1}(U)}(x) = F(x)$ puisque $F(x) \in]0,1[$

Alors $F^{-1}(U)$ et X ont même loi (puisque X admet F pour fonction de répartition).

Q19)

```
def realisation_X():
    u = rd.random()
    return np.log(u/(1-u))
```

Q20)

```
def estimation_pi(n):
    s = 0
    for k in range(1, n+1):    # décalage
        s = s + (realisation_X())**2
    return np.sqrt(3**s/n).
```