PREPA Option Maths approfondies

Mathématiques approfondies Mathématiques

500760

MATHERON

TANGUY

28/11/2002

Note de délibération : 19.6 / 20

Numéro d'inscription 500760

Né(e) le 28/11/2002

Signature

Nom MATHERON

Prénom (s) TANGUY

19.6 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/05

Numéro de table 057

Exercice 1 :

Partie 1 :

1) a) On a : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b)

~~$Sp(AB) \Leftrightarrow \det(AB - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow$ ...~~

AB et BA sont des matrices triangulaires donc leurs valeurs propres sont leurs coefficients diagonaux

D'où : $Sp(AB) = \{2, -1\}$

$Sp(BA) = \{-1, 2\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$X \in E_2(AB) \Leftrightarrow (AB - 2I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0$

$\Leftrightarrow X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

D'où $E_2(AB) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$X \in E_{-1}(AB) \Leftrightarrow (AB + I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y$

$\Leftrightarrow X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

D'où $E_{-1}(AB) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

$X \in E_{-1}(BA) \Leftrightarrow (BA + I_2)X = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

D'où $\boxed{E_{-1}(BA) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}$

$X \in E_2(BA) \Leftrightarrow (BA - 2I_2)X = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

D'où $\boxed{E_2(BA) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}$

Soient $\lambda \in Sp(AB)$ et $X \in E_\lambda(AB) \mid X \neq O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

2) a) Supposons par l'absurde que $BX = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $ABX = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Or $ABX = \lambda X \neq O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car $\begin{cases}\lambda \neq 0\\ X \neq O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ car c'est un vecteur propre}\end{cases}$

Ce qui est absurde.

Donc $\boxed{BX \neq 0}$

b) On a: $BABX = B\lambda X = \lambda BX$

Or d'après la 2) a) $BX \neq O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Donc BX est un vecteur propre de BA et $\lambda \in Sp(BA)$

3) a) Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$, soit X un vecteur propre associé à 0 de AB

Supposons par l'absurde que $BX = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $B^{-1}BX = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ Alors $I_n X = X = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Ce qui est absurde car X est un vecteur propre de AB donc est non nul.

D'où $\boxed{BX \neq 0}$

Étant donné que $BX \neq 0$ d'après la 2) b) on a:

$\boxed{0 \in Sp(BA)}$

b) ~~Supposons par l'absurde que $rg(BA) \geq n$~~
~~On a aussi que $rg(AB) \leq n$ car $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$~~
~~Donc $rg(AB) =$~~

Or a : $\begin{cases} B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B \text{ n'est pas inversible} \end{cases}$ Donc $rg(B) < n$

Or $Im(BA) \subset Im(B)$

Donc $\dim(Im(BA)) \leq \dim(Im(B)) = rg(B) < n$

Donc $\underline{rg(BA) < n}$

Supposons par l'absurde que $0 \notin Sp(BA)$
Alors $(BA - 0I_n) = BA$ est inversible
Alors $rg(BA) = n$ ce qui est absurde car $rg(BA) < n$
Donc $\underline{0 \in Sp(BA)}$

4) Soit $\lambda \in Sp(AB)$
- Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in Sp(BA)$ d'après la 2)
- Si $\lambda = 0$ alors $\lambda \in Sp(BA)$ d'après la 3)

Donc $Sp(AB) \subset Sp(BA)$

En recommençant le même raisonnement que dans la 2) et 3) avec BA au lieu de AB et AB au lieu de BA on trouverait $Sp(BA) \subset Sp(AB)$

Ainsi $\underline{Sp(AB) = Sp(BA)}$

5) Non AB et BA n'ont pas les même sous espace propre car nous avons le contre-exemple de la question 1) b)

Partie 2 :

6) a) On pose $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$

On a : $\begin{cases} \deg(Q) \leq n-1 \\ Q \neq 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]} \end{cases}$ car $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Or $Q(A) = 0$

Donc A admet un polynôme annulateur Q de degré inférieur ou égal à $n-1$

b) On a : $\begin{cases} Sp(A) = \{\lambda_i \mid i \in [\![1, n]\!]\} \\ Q(A) = 0 \end{cases}$ avec $Q \neq 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ et $\deg(Q) \leq n-1$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = 0$

Donc Q admet n valeurs propres distinctes (d'après l'énoncé) et $\deg(Q) \leq n-1$

Donc $Q = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ ce qui est absurde. ✓

c) D'après la 6) a) et 6) b) $\forall (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$ on a $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre

7) a) Supposons par l'absurde que $\dim(E_\lambda(A)) \geq 2$ Soit $\alpha \mid \lambda = \lambda_\alpha$

Alors $\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(A)) + \dim(E_{\lambda_\alpha}(A))$

$\geq n-1+2 = n+1 > n$ ce qui est absurde

Donc $\dim(E_\lambda(A)) \leq 1$

Or $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$ car $\lambda \in Sp(A)$

Donc $\dim(E_\lambda(A)) = 1$

Or $X \in E_\lambda(A)$ et $X \neq 0$ (car X est un vecteur propre)

Donc $E_\lambda(A) = \text{vect}(X)$

Numéro d'inscription 500760
Né(e) le 28/11/2002
Nom MATHERON
Prénom (s) TANGUY
Signature
19.6 / 20
écricome Épreuve : ..... Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)
Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.
Feuille 02/05
Numéro de table 057

b) On a : $BAX = B\lambda X = \lambda BX$
Or $AB = BA$ D'où $BAX = ABX$

c) D'après la 7) b), $ABX = \lambda BX$
- Si $BX \neq 0$ alors $BX \in E_\lambda(A) = \text{vect}(X)$ (d'après la 7) a)
- Si $BX = 0$ alors $BX \in E_\lambda(A)$ car $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \in E_\lambda(A)$

Donc $BX \in \text{vect}(X)$

8) Soient $\mu \in Sp(A)$ et $X \in E_\mu(A) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$
Alors d'après la 7) a) $E_\mu(A) = \text{vect}(X)$
D'après la 7) b), $BX \in \text{vect}(X)$
Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, BX = \lambda X$ or $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$
Donc X est un vecteur propre de B
Ainsi tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

9) a) On a : $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes.} \end{cases}$
Donc A est diagonalisable.
Donc il existe une base de vecteurs propres $(X_1, \dots, X_n)$ de A de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
(donc de B d'après la 8),

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

De plus : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = 1$
Donc il suffit de prendre pour i-ème vecteur propre de la base $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur propre associé à λ_i pour avoir $AX_i = \lambda_i X_i$

On a construit la base demandée

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

9)b) On a : $ABX_i = A\mu_i X_i = \mu_i AX_i = \mu_i \lambda_i X_i$
Or $X_i \neq 0$ car X_i est un vecteur d'une base.
Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu_i \lambda_i \in Sp(AB)$
Il faudrait montrer que les $\mu_i \lambda_i$ sont 2 à 2 distincts ou encore qu'il n'y a qu'un seul μ_i qui vaut 0.
On aurait $\begin{cases} \#\{\mu_i \lambda_i \mid i \in [\![1,n]\!]\} = n \\ AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ D'où $Sp(AB) = \{\lambda_i \mu_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}$

10)a) Notons $\phi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \in \mathbb{R}^n$
Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$
On a $\phi(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(\lambda_1), \dots, (\lambda P + Q)(\lambda_n))$
$= (\lambda P(\lambda_1), \dots, \lambda P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$
$= \lambda \phi(P) + \phi(Q)$
Donc $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid \phi(P) = 0_{\mathbb{R}^n}$ Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $P(\lambda_i) = 0$
Alors $\begin{cases} P \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes} \\ \deg(P) \leq n-1 \end{cases}$
Donc $P = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ Donc $\ker(\phi) \subset \{0\}$ or $0 \in \ker(\phi)$ donc $\ker \phi = \{0\}$

Donc ϕ est injective

D'après le théorème du rang :

$\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\ker\phi) + \dim(\mathrm{Im}(\phi))$

Donc $n = 0 + \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(\mathrm{Im}(\phi))$

Donc $\begin{cases} \mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = n = \dim(\mathbb{R}^n) \end{cases}$

Donc $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}^n$

Donc ϕ est surjective

Donc ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^n$

f) D'après le 10) a) ϕ est bijectif, or $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$

Donc $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid \phi(P) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad BX_i = P(\lambda_i) X_i$

c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

On a : $P(A)X_i = P(\lambda_i) X_i$ car X_i est un vecteur propre de A associé à λ_i

$= BX_i$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad BX_i = P(A) X_i$

Or $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Donc $B = P(A)$

11) a) . On a : $A \times O_n = O_n = O_n \times A$ Donc $O_n \in \mathcal{C}(A)$

. Soit $(\lambda, B, C) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(A)^2$

Alors $A(\lambda B + C) = A\lambda B + AC = \lambda AB + AC = \lambda BA + CA$

$= (\lambda B + C)A$

Donc $\lambda B + C \in \mathcal{C}(A)$, De plus $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) Soit $B \in \mathcal{C}(A)$, alors $\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $B = P(A)$
Donc $\mathcal{C}(A) \subset \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$
On a $P(A) A = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k\right) \times A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^{k+1} = A \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$
$= A P(A)$
Donc $P(A) \in \mathcal{C}(A)$
Donc $\{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} \subset \mathcal{C}(A)$

D'où (par double inclusion) : $\underline{\mathcal{C}(A) = \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}}$

c) D'après la 6)a), $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.
D'où $\dim(\text{vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})) = n$
On $\mathcal{C}(A) = \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} = \text{vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$

Donc $\underline{\dim(\mathcal{C}(A)) = n}$

Numéro d'inscription 500760

Né(e) le 28/11/2002

Signature

Nom MATHERON

Prénom (s) TANGUY

19.6 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/05

Numéro de table 057

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

Exercice 2:

1) D'après l'énoncé $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, f est symétrique donc diagonalisable:
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de f respectivement associé à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
Soit $x \in \ker(f)$ alors $\exists ! (\mu_1, \dots, \mu_n) / x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$
Alors $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i x_i = 0 \end{cases}$

Or $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ donc est libre
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \mu_i = 0$ Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = 0$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i > 0$ i.e $\lambda_i \neq 0$
Donc $x = 0$
Donc $\ker(f) \subset \{0\}$ or $0 \in \ker(f)$
Donc $\ker(f) = \{0\}$ donc f est injective
Donc $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ f \text{ est injective} \end{cases}$ par théorème du cours f est bijective

Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$

2) a) f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

b) On a : f est symétrique et $A = Mat_B(f)$ où B est la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Donc $Mat_B(f) = A$ est symétrique

Donc $\boxed{{}^tA = A}$

c) A est symétrique donc diagonalisable en base orthonormée

Donc $\begin{cases} P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P \text{ est orthogonale (inversible) telle que } {}^tPAP = D \\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid D \text{ est diagonale} \end{cases}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ (les x_i sont définis dans la c))

On a : $\langle f(x), x \rangle = \langle f(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i), x \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i), \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \rangle$

$= \langle \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_i \|x_i\|^2$ car $\forall i \neq j$ $\langle x_i, x_j \rangle = 0$

On $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

Etant donné que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i^2 \|x_i\|^2 \geq 0$ on a :

$\langle f(x), x \rangle \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_n \|x_i\|^2 = \lambda_n \|\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\|^2$

$= \lambda_n \|x\|^2$

$\langle f(x), x \rangle \geq \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_1 \|x_i\|^2 = \lambda_1 \|\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2}$

e) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

- Si $\langle f(x), x \rangle = 0$ alors $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle = 0$ (d'après 1.2) d)
  alors $\lambda_1 \|x\|^2 \leq 0$
  alors $\|x\|^2 \leq 0$ car $\lambda_1 > 0$

Or $\|x\|^2 \geq 0$ donc $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$

- Si $x = 0$ alors $\langle f(x), x \rangle = \langle f(x), 0 \rangle = 0$

Donc $\langle f(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$

3) a)

Or a : $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle = \frac{1}{2}\, {}^t\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - (u_1 \cdots u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\, {}^t\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{n,i} x_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n u_i x_i$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i x_j\right) - \sum_{i=1}^n u_i x_i$

b) g est polynomiale donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$g(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i x_j\right) - \sum_{i=1}^n u_i x_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^n a_{j,i} x_i x_j + \sum_{j=1}^n a_{j,1} x_1 x_j\right) - \sum_{i=1}^n u_i x_i$

Donc $g(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n a_{j,i} x_i x_j + \sum_{i=2}^n a_{1,i} x_i x_1 + \sum_{j=2}^n a_{j,1} x_1 x_j + a_{1,1} x_1^2\right) - u_1 x_1 - \sum_{i=2}^n u_i x_i$

Donc $\partial_1(g)(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^n a_{1,i} x_i + \sum_{j=2}^n a_{j,1} x_j + 2a_{1,1} x_1\right) - u_1$

$= \sum_{i=2}^n a_{1,i} x_i + a_{1,1} x_1 - u_1$ (car ${}^t A = A$ donc $\forall (j,i) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$)

$= \sum_{i=1}^n a_{1,i} x_i - u_1$

c) On a : $f(x) - u = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j\right) - (u_1, \dots, u_n)$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j - u_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j - u_n\right)$$

Avec le même raisonnement (calcul) que dans la 3)f) on trouve $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\partial_i(g)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - u_j$

D'où $\boxed{\nabla(g)(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j - u_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j - u_n\right) = f(x) - u}$

4) Soit $m \in \mathbb{R}^n$

$\nabla g(m) = 0 \iff f(m) - u = 0 \iff f(m) = u$

$\iff m = f^{-1}(u)$ (car f est un automorphisme d'après la 1)

Donc g admet un unique point critique $m = f^{-1}(u)$

5) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle f(x) - f(m), x-m\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle - \langle f(x), m\rangle - \langle f(m), x\rangle + \langle f(m), m\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle - \langle f(x), f^{-1}(u)\rangle - \langle f\circ f^{-1}(u), x\rangle + \langle f\circ f^{-1}(u), m\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle - \langle x, f\circ f^{-1}(u)\rangle - \langle u, x\rangle + \langle u, m\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle - \langle x, u\rangle - \langle u, x\rangle + \langle u, m\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle - 2\langle u, x\rangle + \langle u, m\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle + \frac{1}{2}\langle u, m\rangle$$

$$= g(x) - \left(\frac{1}{2}\langle u, m\rangle - \langle u, m\rangle\right)$$

$$= g(x) - \left(\frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle - \langle u, m\rangle\right) \quad \text{car } f(m) = f\circ f^{-1}(u) = u$$

$$= g(x) - g(m)$$

Donc $\boxed{\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle = g(x) - g(m)}$

Numéro d'inscription 500760
Né(e) le 28/11/2002
Signature
Nom MATHERON
Prénom (s) TANGUY
19.6 / 20
Ecricome Épreuve : Mathématiques Approfondies
Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)
Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.
Feuille 04/05
Numéro de table 057

6) D'après 2)d), $g(x) - g(m) = \frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle \geq \lambda_1 \|x-m\|^2$
≥ 0 car $\lambda_1 > 0$ et $\|x-m\|^2 \geq 0$.

Donc $g(x) \geq g(m)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \geq g(m)$,

Donc **g atteint un minimum global en m**

7) a) Soit $(a, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$

On a : $\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a)+f(h), a+h\rangle$
$= \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle f(h), a\rangle + \langle f(h), h\rangle$
(car f est symétrique) $= \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle h, f(a)\rangle + \langle f(h), h\rangle$
$= \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle$
$= \langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle$

Donc $\forall (a, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$ **$\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle$**

β) On a : $g(a+h) = \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle - \langle u, a+h\rangle$
$= \frac{1}{2}\langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle - \langle u, a\rangle - \langle u, h\rangle$
$= \frac{1}{2}\langle f(a), a\rangle - \langle u, a\rangle - \langle u, h\rangle + \langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle$
$= g(a) + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle - \langle u, h\rangle + \langle f(a), h\rangle$

De plus $\langle \nabla g(a), h\rangle = \langle f(a) - u, h\rangle = \langle f(a), h\rangle - \langle u, h\rangle$ (d'après 3)c))

Donc **$g(a+h) = g(a) + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle + \langle \nabla g(a), h\rangle$**

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

8) a) On passe la question et on admet le résultat.

b) //

9) a) On a d'après la 8) b)

$\forall p \in \mathbb{N},\ g(m_{p+1}) - g(m_p) \leq -\alpha\left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2$

On a : $\alpha > 0$ Donc $-\alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 \leq 0$

De plus $\alpha \leq \frac{1}{\lambda_n}$ Donc $-\frac{\alpha \lambda_n}{2} \geq 0$

Donc $1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2} \geq 0$

Donc $-\alpha\left(1 - \frac{\alpha \lambda_m}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2 \leq 0$

Donc $g(m_{p+1}) - g(m_p) \leq 0$ i.e. $g(m_{p+1}) \leq g(m_p)$

Donc $\begin{cases} (g(m_p))_{p \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ (g(m_p)) \text{ est minorée par } g(m) \text{ d'après la 6)} \end{cases}$

Donc $\underline{(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$

9) b) On passe la question et on admet le résultat.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$

D'après la 9) b) $0 \leq \|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m))$

Or $g(m_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} g(m)$ d'après l'énoncé

Donc $\frac{2}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m)) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

D'après le théorème des gendarmes $\|m_p - m\|^2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

Donc $\underline{\|m_p - m\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$)

10) a) On a : $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec B la base canonique orthonormale de $\mathbb{R}^2$

$Mat_B(f)$ est symétrique

Donc f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$

Problème :

Partie I :

1)
```
import numpy as np
def F(x):
    return (np.exp(x))/(1+np.exp(x))
```

2) $\begin{cases} x \mapsto e^x \\ x \mapsto e^x + 1 \end{cases}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ De plus $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 0$

Donc $F : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

$= \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$

$= \frac{e^x(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3}$

$= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) \geq 0 \iff \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} \geq 0 \iff 1-e^x \geq 0$ car $\frac{e^x}{(1+e^x)^3} > 0$

$\iff 1 \geq e^x$

$\iff x \leq 0$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

On a : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

On a : $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} = \frac{1}{e^{-x}+2+e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0
$F(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1

4) Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} \times e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x+e^x e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$

Donc f est paire.

On a ~~$F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{2e^{-x}}{2(1+e^{-x})} - \frac{1+e^{-x}}{2(1+e^{-x})}$~~

$= \frac{e^{-x}-1}{2(1+e^{-x})}$

On a : ~~$F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2}$~~ $= e^x$

Je n'ai pas montré la parité de $F - \frac{1}{2}$

Numéro d'inscription 500760
Né(e) le 28/11/2002
Nom MATHERON
Prénom (s) TANGUY
Signature

19.6 / 20

ecricome

Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 05

Numéro de table 057

5) X

6) $\begin{cases} F \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ d'après la 2)} \\ F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ d'après la 3)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1 \end{cases}$ d'après la 3.)

D'après le théorème de la bijection monotone, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$

Soit $y \in]0,1[$, soit $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = y \iff \frac{e^x}{1+e^x} = y \iff e^x = e^x y + y$$
$$\iff e^x - e^x y = y$$
$$\iff e^x (1-y) = y$$
$$\iff e^x = \frac{y}{1-y} \quad \text{car } y \neq 1$$
$$\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Donc $F^{-1} : x \in]0,1[\longmapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \in \mathbb{R}$

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME – Tous droits réservés

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.6 / 20

7) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

Or par critère de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge.

8) • D'après la 3), $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

• F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$

Donc f est une densité de probabilité.

De plus $\begin{cases} F \text{ est une primitive de } f \\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \end{cases}$

Donc F est la fonction de répartition associée.

9) Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$, $x^4 f(x) = \frac{x^4 e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{x^4}{e^{-x}+2+e^{2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée

Donc $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (Riemann)

Par comparaison d'intégrale de fonctions positives :

$\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge Donc $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge

Or f est paire donc $x \mapsto x^2 f(x)$ aussi

Donc $\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx$ converge

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge

Donc X admet un moment d'ordre 2, donc aussi un moment d'ordre 1.

Donc X admet une espérance et une variance.

1a)a) f est paire. ~~Donc $x \mapsto x f(x)$ est impaire.~~

Donc $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = \int_{+\infty}^{0} (-u) f(-u)\,du$ avec $x = -u$ en changement de variable C^1

$= -\int_{0}^{+\infty} u f(u)\,du$ car u est paire