PREPA Option Maths appliquées

Mathématiques appliqués Mathématiques

507241

TEROUANNE

DONATIEN

30/10/2003

Note de délibération : 19.63 / 20

Numéro d'inscription 507241

Né(e) le 30/10/2003

Nom TEROUANNE

Prénom (s) DONATIEN

19.63 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/06.

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. On reconnait que X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

D'où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$ et $E(X) = \frac{n+1}{2}$

et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

2. Y est la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée dans la deuxième urne. Cette urne peut être remplie de tous les numéros dans le cas où la boule numéro n est tirée en premier.

Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

3. Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

a) Si $[X=k]$ réalisé, il y a : $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ boules

dans la seconde urne.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.63 / 20

b) Pour $j \geqslant k+1$, $P_{[X=k]}(Y=j)=0$

car $[X=k] \cap [Y=j] = \emptyset$. On ne peut tirer une boule d'un numéro supérieur à k sachant que la première boule tirée est de numéro k.

Pour $j \in [\![1;k]\!]$, $P_{[X=k]}(Y=j) = \dfrac{2j}{k(k+1)}$

d'après ce qui précède et l'énoncé.

4. a) Pour $a=1$ et $b=-1$

On a $\dfrac{1}{k} + \dfrac{-1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$

b) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènement $([X=k])_{k \in [\![1;n]\!]}$,

Il vient; $\forall j \in Y(\Omega)$, $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X=k)\, P_{[X=k]}(Y=j)$

Or pour $j \geq k+1$, $P_{[X=k]}(Y=j) = 0$

Donc $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)}$

$$= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ d'après 4. a)}$$

$$= \frac{2j}{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=j+1}^{n+1} \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{2j}{n} \left(\frac{n+1-j}{j(n+1)} \right)$$

$$= \boxed{\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5. Y est discrète finie donc Y admet une espérance :

$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \left(n \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \left(\frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= n + 1 - \frac{2n+1}{3} = \frac{3n+3-2n-1}{3} = \boxed{\frac{n+2}{3}}$$

CQFD.

7. a) $E(XY)$ existe car X et Y deux variables aléatoires discrètes finies avec $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

D'après le Théorème du transfert,

$$E(XY) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ j \in Y(\Omega)}} \cdot \quad P([X = \ ] \cap [Y = \ ])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cdot \quad P([X = \ ] \cap [Y = \ ])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{k} j \; P(X=k) \; P_{[X=k]}(Y=j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{2j^2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{nk(k+1)} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n} k(2k+1)$$

$$= \frac{1}{3n}\left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{3}\left(\frac{4n+2}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{(n+1)(4n+5)}{18}}$$ C.Q.F.D.

Numéro d'inscription 507241

Né(e) le 30 / 10 / 2003

Signature

Nom TEROUANNE

Prénom (s) DONATIEN

19.63 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 06

Commencez à composer dès la première page...

7. b) D'après la formule de Koenig Huygens, comme X et Y admettent toutes deux une espérance,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{(n+2)(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n+1}{6} \times \left(\frac{4n+5}{3} - n+2 \right)$$

$$= \frac{n+1}{6} \times \left(\frac{4n-3n+5-6}{3} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}$$ C.Q.FD.

8. a)

```
def seconde_urne(k):
    U = []
    a = []
    for j in range(1, k+1)
        a = [j for j in range(1, j)]
        U + a
    return U.
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.63 / 20

8. b)
```
import numpy.random as rd
def simulXY(n):
    X = rd.randint(1, n+1)
    urne2 = seconde urne(X)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = X[i]
    return X, Y.
```

c) Ce programme simule 1000 fois Y et à la case de la valeur obtenue rajoute 1/10000. Ainsi, ces éléments de la liste permettent d'estimer la loi de Y.

9. a) Soit $n = 20$.

Le point moyen a pour coordonnée en abscisse et en ordonnées respectivement l'espérance de X et l'espérance de Y.

Ainsi, en abscisse, $x = E(X) = \frac{21}{2} = 10,5$

et en ordonnée, $y = E(Y) = \frac{22}{3} \simeq 7,3$.

Je ne vois pas à quel théorème l'énoncé fait référence.

b) La droite de régression contient nécessairement le point moyen.
Or seule la figure 3 présente une droite de régression contenant le point moyen.
Donc la figure 3 est celle qui correspond à l'expérience.

Exercice 2 :

Soit $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$.

1. a) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dérivable sur $]0;+\infty[$

et $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $]0;+\infty[\subset \mathbb{R}$.

Donc, par produit de fonction dérivable sur $]0;+\infty[$,

f dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\forall x \in]0;+\infty[, \ f'(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{x} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$ CQFD.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) > 0$ car $e^{\frac{x}{2}} > 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$

Ainsi le signe de f' dépend de celui de $x-1$ tel que

$\forall x \in]0;1[$, $f'(x) < 0$
$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$
Pour $x = 1$, $f'(x) = 0$

De plus, $f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{e^x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparées

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par opération sur les limites.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ par opérations sur les limites

Enfin, $f(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Il vient le tableau de variation ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
signe $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Var f	|| $+\infty$	↘	$\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

Numéro d'inscription	507241
Né(e) le	30/10/2003
Nom	TEROUANNE
Prénom (s)	DONATIEN

Signature

19.63 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

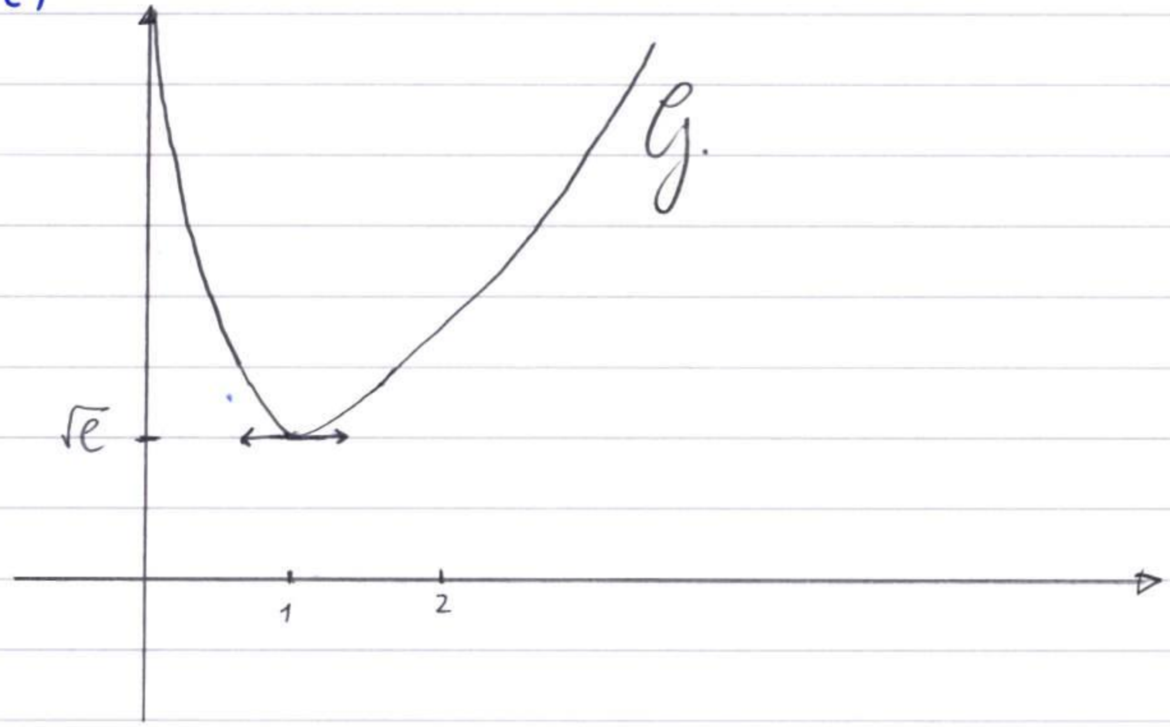
Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 06

Commencez à composer dès la première page...

c)



d) Pour $n \geq 2$, on a $n \in]\sqrt{e} ; +\infty[$ car $2 < e < 3$ donc par stricte croissance de $\sqrt{X}$ sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} < 2$ car $3 < 4$.

f est continue sur $]0;+\infty[$ car dérivable sur $]0;+\infty[$

Or, f étant strictement monotone sur $]0;1[$, telle que $f(]0;1[) =]\sqrt{e};+\infty[$, et $n \in]\sqrt{e};+\infty[$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.63 / 20

On a d'après le théorème de la bijection continue :

$\forall y \in]\sqrt{e}; +\infty[, \exists! x \in]0;1[, f(x) = y$.

Or $n \in]\sqrt{e}; +\infty[$ donc il existe un unique

$u_n \in]0;1[$ tel que $f(u_n) = 1$

De même, f étant strictement croissante et continue sur $]1;+\infty[$,

et $f(]1;+\infty[) =]\sqrt{e};+\infty[$

D'après le théorème de la bijection continue :

$\forall y \in]\sqrt{e}; +\infty[, \exists! x \in]1;+\infty[, f(x) = y$

Ainsi, pour $n \in]\sqrt{e};+\infty[$, il existe un unique

$v_n \in]1;+\infty[$ tel que $f(v_n) = 1$

Enfin, l'équation $f(x) = n$ d'inconnue x dans $]0;+\infty[$ possède exactement deux solutions u_n et v_n avec :

$\boxed{0 < u_n < 1 < v_n}$ CQFD.

2. a) Pour $n \geqslant 2$, on a $f(v_n) = n$ et
$f(v_{n+1}) = n+1$ avec $v_n \in]1;+\infty[$ et $v_{n+1} \in]1;+\infty[$.

Ainsi $f(v_n) \leq f(v_{n+1})$

$\Leftrightarrow$ $v_n \leqslant v_{n+1}$ en composant par la réciproque de f, f étant strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Ainsi, $\boxed{(v_n)_{n \geqslant 2} \text{ croissante}}$.

b) Supposons que v_n majorée par $M \in \mathbb{R}$.

On a $f(v_n) \leqslant M$ pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$.

Or, M étant fini, il existe un $N^{\in [\![2;+\infty[\![}$ tel que

$f(v_n) \leqslant M < N$

avec N ayant v_N comme antécédent. M n'est donc pas un majorant. C'est absurde.

$(v_n)_{n \geqslant 2}$ est donc croissante non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

3\. a) $\forall n \geqslant 2$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ avec $u_n \in]0;1[$ et $u_{n+1} \in]0;1[$

$\iff$ $u_n \geqslant u_{n+1}$ par stricte décroissance de f sur $]0;1[$.

Ainsi $\underline{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante}}$.

b) Or $(u_n)_{n \geqslant 2}$ minorée par 0

Donc u_n décroissante minorée converge vers $\ell \geqslant 0$ d'après le théorème de la limite monotone.

CQFD.

c) Si $\ell > 0$,

$f(\ell) = L \in \mathbb{R}$. Or il existe un $N \in [\![2;+\infty[\![$

tel que $L < N$ avec $N = f(u_N)$

Ainsi, $f(\ell) < f(u_N)$

$\iff$ $\ell > u_N$ ce qui est absurde car

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et ℓ décroissante.

Ainsi, ℓ ne peut être strictement supérieur à 0.

Il vient : $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 0}$ CQFD.

Numéro d'inscription 507241
Né(e) le 30/10/2003
Nom TEROUANNE
Prénom (s) DONATIEN
Signature

19.63 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/06

Commencez à composer dès la première page...

3)d) On a $\forall n \geqslant 2$:

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = n \times e^{\frac{1}{2n^2}} \sim_{+\infty} n = f(u_n)$$

Hwient $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} f(u_n)$

Or $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2} \in]0;1[$ et $u_n \in]0;1[$

et f est strictement croissante et continue

Donc $\frac{1}{n^2} = u_n + o_{+\infty}(n)$ pour n au voisinage de $+\infty$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} - u_n = o_{+\infty}(n)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 u_n = 1$ et $u_n \sim_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$

4. a)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.63 / 20

4. a) Soient $n \geq 2$ et $\epsilon > 0$.

```
import numpy as np
def approx_v(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while b - a > c:
        c = (a + b) / 2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a + b) / 2.
```

b)

```
def sp(N, eps):
    U = [approx_v(k, eps) for k in range(1, n+1)]
    return np.sum(U)
```

Exercice 3 :

Partie 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. a) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 4 scalaires réels,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (v_1, v_2, v_3, v_4) famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4. Ainsi, v_1, v_2, v_3, v_4 base de $\mathbb{R}^4$.

b) $f(u_1) = (0,0,0,0)$ soit $u_1 \in \ker(f)$

$f(u_2) = (0,0,0,0)$

$f(u_3) = (0,2,2,0)$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et 2 valeur propre de A.
$= 2(0,1,1,0) = 2u_3$

$f(u_4) = (2,1,1,2) = 2u_4 + u_3$

Ainsi, soit B matrice de f dans $\mathcal{B}$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) On a $A = PBP^{-1}$ avec P matrice de passage

de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

étant donné que A matrice de f dans la base canonique et B dans la nouvelle base.

Enfin B triangulaire supérieure donc pour $T = B$

On a $\boxed{A = PTP^{-1}}$ C.Q.F.D.

Numéro d'inscription 5 0 7 2 4 1

Né(e) le 30 / 10 / 2003

Signature

Nom TEROUANNE

Prénom (s) DONATIEN

19.63 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Commencez à composer dès la première page...

2. a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{On } 4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{A^3} \quad \text{CQFD.}$$

b) <u>Initialisation:</u> pour $n = 1$,

$$A = a_1 A^2 + b_1 A \text{ avec } \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

<u>Hérédité:</u>

Supposons qu'il existe a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

$$\Rightarrow A^{n+1} = a_n A^3 + b_n A^2$$

$$= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2$$

$$= (4a_n + b_n)A^2 - 4b_n A$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$,

on a $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}, A^n = a_n A^2 + b_n A}$$

CQFD.

3. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$

$\Rightarrow a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1}$

$= 4a_{n+1} - 4a_n$ d'après ce qui précède.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec $a_1 = 0$
et $a_2 = 1$ car $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$.

Soit le polynôme $X^2 - 4X + 4$, qui admet un discriminant nul donc une seule racine $x_0 = 2$

On a donc : $\begin{cases} 2(\alpha + \beta) = a_1 \\ 4(\alpha + 2\beta) = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_n = (n-1)\, 2^{n-2}}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = -4a_n = -(n-1)\,2^n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{b_n = -(n-2)\,2^{n-1}}$

$$\text{Ainsi, } A^n = \cancel{\begin{pmatrix} (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} \\ 3(n-1)2^{n-2}-(n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} & \leftarrow \text{idem} & (n-1)2^{n-2} \\ 3(n-1)2^{n-2}-(n-2)2^{n-1} & & & \\ (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} & & & \end{pmatrix}}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} \\ 3(n-1)2^{n-2}-(n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} & \leftarrow \text{idem} & (n-1)2^{n-2} \\ 3(n-1)2^{n-2}-(n-2)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} & \leftarrow \text{idem} & (n-1)2^{n-2} \\ (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1}-(n-2)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

CQFD

Partie 2 :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

5. a) Soit M la matrice d'adjacence de G.

$\cancel{M = (a_{i,j})_{0 \le i \le p-1,\ 0 \le j \le p-1}}$ $M = (a_{i,j})_{1 \le i \le p,\ 1 \le j \le p}$ $a_{i,j} = 1$ si une arête relie le sommet s_{i-1} au sommet s_{j-1} par une flèche orientée

et $a_{i,j} = 0$ sinon.

b) Le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est le nombre de chemin de longueur n reliant i à j

Numéro d'inscription 507241

Né(e) le 30/10/2003

Nom TEROVANNE

Prénom (s) DONATIEN

Signature

19.63 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

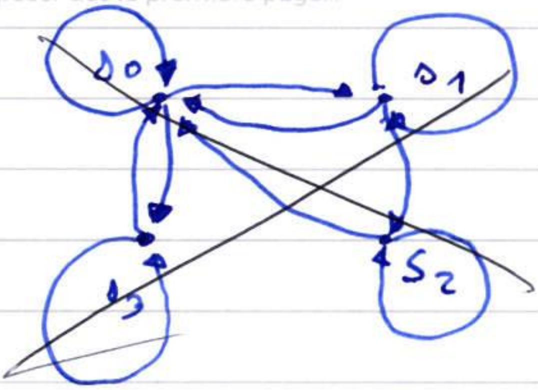
Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

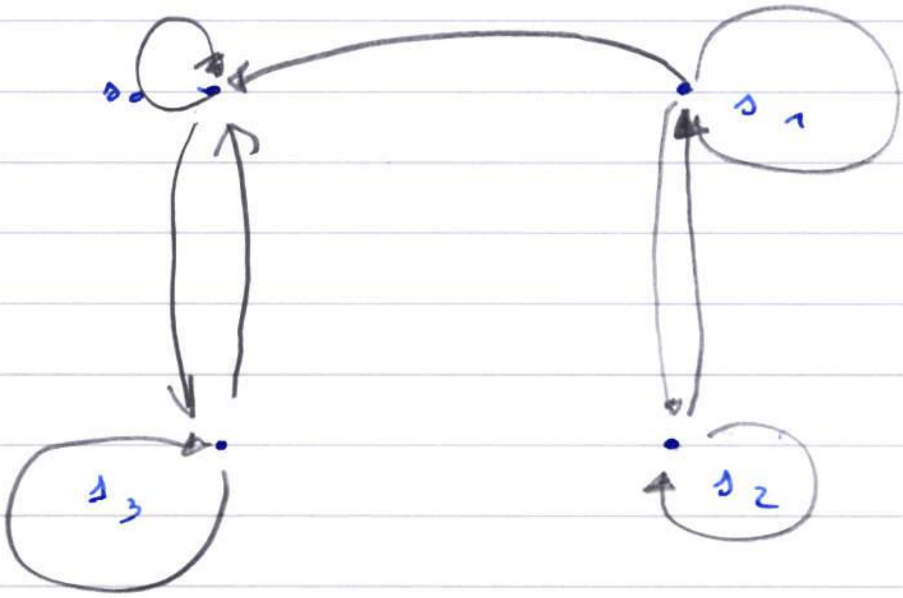
Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Commencez à composer dès la première page...

6. a)





b) G est connexe car la chaine s3 ; s0 ; s1 ; s2 existe et passe par tous les sommet.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.63 / 20

c) D'après la 5) b) et la matrice ci-dessus,

ce nombre est 2^{n-1}.

7) ~~def matrice_vers_liste :~~

```
L = [ ]
```

~~for j in range (0, p-1):~~

~~for i in range (0, p-1):~~

~~if A[j;i] = 1 :~~

7)

```
def matrice_vers_liste(A):
    L = []
    a = [ ]
    for j in range (0, p-1)
        a = [ ]
        for i in range (0; p-1):
            if A[j ; i]== 1 :
                a . append(i)
        L . append (a)
    return L.
```

8. a) À l'issue de cet algorithme, en choisissant s_1 comme départ, on aura :

[1 , 1 , 1 , 2]

b)
```
import numpy as np
def parcours (L, i0):
    p = len (L)
    distances = [ p for k in range (p)]
    distances [i0] = 0
    a_explorer = [ i0 ]
    marques = [ i0 ]
    while a_explorer ! == [ ] :
        s = a_explorer [0]
        del s
        for v in range (0, p)
            if v not in marques :
                marques. append (v)
                a_explorer + [v]
                v = distances [0] + 1
return distances.
```

c) a = [ ] ← On initialise une liste vide qu'on va remplir à chaque boucle le cas échéant

```
    if v not in marques :
        marques. append (v)
        a_explorer + [v]
        a. append (v)
        v = distances [s] + 1
return a
```

FIN