

ECRICOME PREPA 2023 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

504348

LAMRANI

ABDELHALIM

09/06/2003

Note de délibération : 19.02 / 20

Numéro d'inscription

504348



Né(e) le

09 / 06 / 2003

Signature

Nom

LAMRANI

Prénom (s)

ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement
renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

01

/

☐

02

Numéro de table

☐

75

☐

Exercice 1

Partie 1

1) Import numpy as np
def suite(n, U1):

U = U1

for k in range(2, n+1)

U = (5/12)*U + 1/3

return U

2) a) Résolvons pour $n \in \mathbb{N}$, $n = \frac{5}{12}n + \frac{1}{3}$

$$n = \frac{5}{12}n + \frac{1}{3} \Leftrightarrow n - \frac{5}{12}n = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{12}n = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{4}{7}$$

$$\text{D'où } l = \frac{4}{7}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

$$b) \quad U_{n+1} = U_n + 1 - l \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n - \frac{5}{21}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{5}{12} \left(U_n - \frac{4}{7} \right)$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n$$

D'où $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique
de raison $\frac{5}{12}$

$$c) \quad U_n = U_1 \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} \cdot \cancel{U_1}$$

d) On sait que $U_n = U_n - l$

$$\text{donc } U_n = U_n + l \Leftrightarrow U_n = \left(U_1 + \frac{4}{7} \right) \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow U_n = U_1 \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

Partie 2

$$3) a) A \times X_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times X_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) d'après la question précédente que
 $A \times X_1 = 12 X_1$

donc 12 est une valeur propre de A associée
au X_1 comme vecteur propre (X_1 étant différent
de la matrice nulle)

De plus, on a $A \times X_2 = 5 \times X_2$

Alors 5 est une valeur propre de A associée
au vecteur propre X_2 (X_2 étant différent
de la matrice nulle)

$$4) \text{Det}(P) = 4 - (-3) = 7 \neq 0$$

D'où P est inversible

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q$$

$$5) P D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P D P^{-1} = P D Q = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PDQ = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix}$$

$$PDQ = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A$$

ou bien $A = PDP^{-1}$

6) posons $P(n): "A^n = PD^n P^{-1}"$

pour $n=0$: on a d'une part $A^0 = I$ (par convention)
et d'autre part $PD^0 P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I$

donc $P(0)$ est vérifiée

supposons que, pour un n fixé de $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie

d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente, il vient:

$$A^n \times A = (PD^n P^{-1})(PD P^{-1})$$

$$\text{Donc } A^{n+1} = PD^n P^{-1} P D P^{-1}$$

$$\text{Alors } A^{n+1} = PD^n I D P^{-1}$$

$$\text{D'où } A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

$$\text{on obtient donc } A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

Alors $P(n+1)$ est bien vérifiée

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n): "A^n = PD^n P^{-1}"$ est vraie
 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow \text{a) } P^{-1} X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

504348



Né(e) le

09 / 06 / 2003

Signature

Nom

LAMRANI

Prénom(s)

ABDELHALIM

19.02 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02

02

Numéro de table

75

Commencer à composer dès la première page

$$b) A^n X = P D^n P^{-1} X$$

$$P D^n = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \quad (D \text{ est une matrice diagonale})$$

$$P D^n = \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n & (-1) \times 5^n \\ 3 \times (12)^n & 5^n \end{pmatrix}$$

$$P D^n P^{-1} X = \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n & (-1) \times 5^n \\ 3 \times (12)^n & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n + (-1) \times 5^n \times (-3) \\ 3 \times (12)^n + (-3) \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times (12)^n + (-3) \times 5^n \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

Partie 3:

8) On sait que $P(A_1) = a_1 = 1$
donc $P(B_1) = b_1 = 0$ (Il est impossible qu'il
pleuve au jeu 1)

$a_2 = \frac{3}{4}$ (car il faisait beau au jeu 1, et on

sait que s'il faisait beau au jeu n , il fera beau
au lendemain avec une probabilité de $\frac{3}{4}$)

$$b_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

car: $a_2 + b_2 = 1$ (du fait que $\{A_2, B_2\}$ est un système
complet d'événement)

9) Soit $\{A_n, B_m\}$ un système complet d'événement, donc selon la formule de probabilité totale :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n) \times P(A_n) + P(A_{n+1} | B_m) \times P(B_m)$$

$$P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} \times P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_m)$$

Car on sait que s'il faisait beau au jour n il fera beau au jour $n+1$ avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, et si d'après il fera beau au jour

$(n+1)$ avec une probabilité de $\frac{1}{3}$

$$\text{De même, } P(B_{m+1}) = P(B_{m+1} | B_m) \times P(B_m) + P(B_{m+1} | A_n) \times P(A_n)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times P(B_m) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times P(A_n)$$

$$P(B_{m+1}) = \frac{2}{3} P(B_m) + \frac{1}{4} P(A_n)$$

C'est la même logique que dans $P(A_{n+1})$ sauf qu'ici on se sert de événements contraires $(P(B_{m+1}) + P(A_{n+1})) = 1$ $(P(B_{m+1}) + P(A_{n+1}))$

$$b) \quad M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$$

$$M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$(a_{n+1} = P(A_{n+1}) \text{ et } b_{n+1} = P(B_{n+1}))$$

c) on sait que $\{A_n, B_n\}$ est un système

complet + d'événement :

$$\text{Donc } P(A_n) + P(B_n) = a_n + b_n = 1$$

$$10) a) \text{ posons } P(n) : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } n=1 : \text{ d'one part } \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et d'autre part } M^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $P(1)$ est vraie

Numéro d'inscription

504368



Né(e) le

09 / 06 / 2003

Signature

Nom

L A M R A N I

Prénom(s)

A B D E L H A L I M

19.02 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématique

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

04

Numéro de table

75

Commencez à composer dès la première page

Supposons que, pour un n de $\mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie

D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $P(n+1)$ est vérifiée

Donc selon le raisonnement par récurrence on obtient que $P(n) : \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} b) \quad M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{12} A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{12} \times A^{n-1} \times X \right) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \times (12)^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times (12)^{n-1} + (-3) \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \times \frac{1}{12} \times 4 \times (19)^{n-1} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{12} \times 3 \times (5)^{n-1} \\ \frac{1}{7} \times \frac{1}{12} \times 3 \times (19)^{n-2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{12} \times (-3) \times 5^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{21} \times (19)^{n-1} + \frac{1}{28} \times 5^{n-1} \\ \frac{1}{28} \times (19)^{n-2} + \frac{-1}{28} \times 5^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc, il vient } \begin{cases} a_n = \frac{1}{21} \times (19)^{n-1} + \frac{1}{28} \times 5^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{28} \times (19)^{n-2} + \frac{-1}{28} \times 5^{n-2} \end{cases}$$

$$11) a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} (1 - a_n)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{car selon la question} \\ \text{D.C. } a_n + b_n = 1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{5}{12} a_n + \frac{1}{3}$$

b)

On sait d'après la question (2. d) de la première partie

$$U_n = \left(U_1 + \frac{4}{2} \right) \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{6}{2}$$

on sait que $U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3}$

et $a_{n+1} = \frac{5}{12} a_n + \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } a_{n+1} &= \left(a_1 - \frac{4}{2} \right) \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{2} \\ &= \left(1 - \frac{4}{2} \right) \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{2} \\ a_n &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{2} \end{aligned}$$

c) on sait que $a_n + b_n = 1$

$$\text{D'où } b_n = 1 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} - \frac{4}{2}$$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} - \frac{4}{2} \\ &= \frac{4}{2} \end{aligned}$$

Car on a $\left| \frac{5}{12} \right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= 1 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} - \frac{4}{2} \\ &= 1 - \frac{4}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

13) Poursuivre X une variable aléatoire
qui suit une loi Binomiale de paramètre
 $n=10$ et $P(A_n)$

X compte les jours des 10 jours du séjour
passant bien. ($X \sim B(10, P(A_n))$)

dériver $P(X=9)$:

$$\text{Donc } P(X=k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right)^k \times$$

$$\left(1 - \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right) \right)^{10-k}$$

Donc dériver

$$P(X=9) = \binom{10}{9} \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right)^9$$

$$\times \left(1 - \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right) \right)$$

$$10 \times \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right)^9 \times \left(1 - \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right) \right)$$

b) dériver $P(X=0)$

Numéro d'inscription

S 0 4 3 4 8



Né(e) le

09 / 06 / 2003

Signature

Nom

LAMRANI

Prénom(s)

ABDELHALIM

19.02 / 20



Épreuve :

math

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 /

07

Numéro de table

25

Commencez à composer dès la première page :

Exercice 2

Partie 1

$$1) \text{ on sait } Df = \left\{ n \mid \underbrace{1 + e^n}_{\text{vrai } \forall n \in \mathbb{R}} > 0 \right\}$$

$$\text{Donc } Df = \mathbb{R}$$

$$2) \text{ on a } f'(x) = \left(\ln(e^x + 1) \right)'$$

$$= \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\frac{e^x}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ donc } f' \text{ est positive sur } \mathbb{R}$$

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ par croissance comparée} \right)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

Donc (ℓ) admet ~~admet~~ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x = +\infty \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$$

$$b) \cancel{f(n) = \ln(1 + e^n) = \ln}$$

$$\begin{aligned} n + \ln(1 + e^{-n}) &= \ln(e^n) + \ln(1 + e^{-n}) \\ &= \ln(e^n(1 + e^{-n})) \end{aligned}$$

$$n + \ln(1 + e^{-n}) = \ln(e^n + 1) = f(n)$$

$$\begin{aligned} c) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - y &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n + \ln(1 + e^{-n}) - n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et } \ln(1 + 0) = 0$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est

asymptote (oblique) à la courbe (ℓ_f) en $+\infty$

$$a) \quad f(n) - n \stackrel{?}{=} \ln(1 + e^n) - n$$

$$\ln(1 + e^n) - n > -\epsilon \Leftrightarrow \ln(1 + e^n) - \ln e^n$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1 + e^n}{e^n}\right) > 0$$

(par croissance de la fonction logarithmique) $\frac{1 + e^n}{e^n} > 1 \quad (1 + e^n > e^n)$

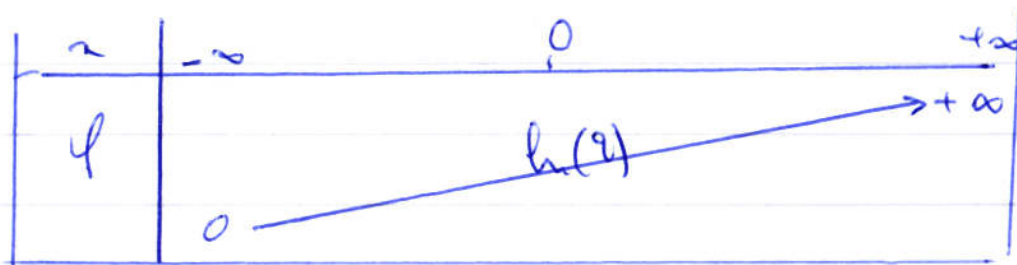
Donc $f(n) - n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

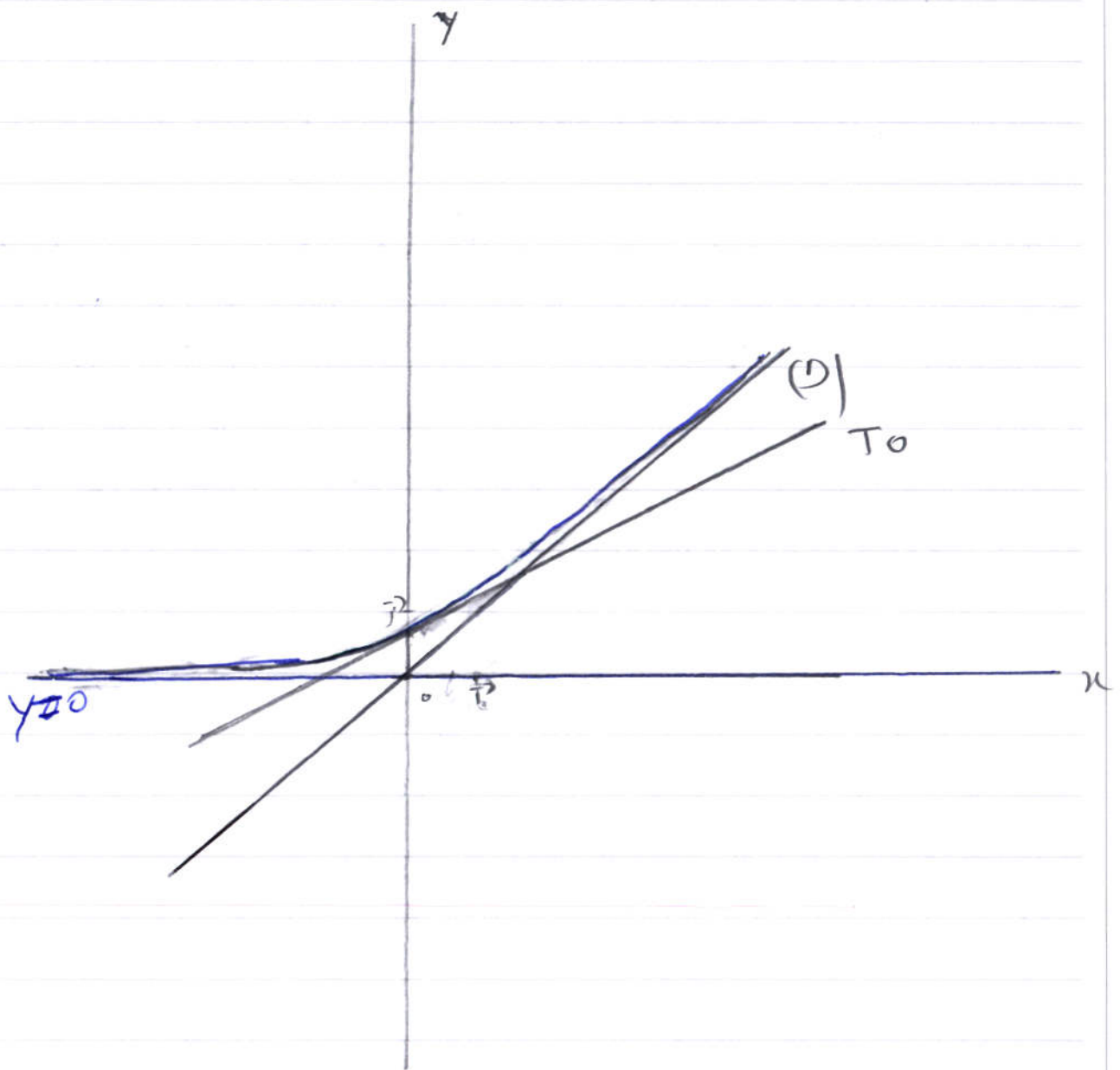
alors $\mathcal{D}$ est en-dessous de ℓ_f sur $\mathbb{N}$

$$s)(T_0): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{1}{2} x + \ln(2)$$

6) a)





Partie 3:

$$7) a) \quad g_{n+1}(x) - g_n(x) = \ln(1 + e^{-(n+1)x}) - \ln(1 + e^{-nx})$$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-nx}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{-nx} \times e^{-x}}{1 + e^{-nx}}\right)$$

$$= \ln(1 + e^{-nx}) + \ln(e^{-x}) - \ln(1 + e^{-nx}) = -x$$

Numéro d'inscription

50115

Né(e) le

09 / 06 / 2003

Signature



Nom

CAMRANS

Prénom(s)

ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricone

Épreuve :

math

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05

/ 07

Numéro de table

75

or, $n \in [0, 1]$ donc $-n \leq 0$ d'où $g_{n+1}(n) \leq g_n(n)$
 b) en en déduit : $\int_0^1 g_{n+1}(n) dn \leq \int_0^1 g_n(n) dn$
 (par croissance de l'intégrale)

d'où $I_{n+1} \leq I_n$

Ainsi $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante
 c) $g_n(n) = \ln(1 + e^{-nn})$

Soit $n \in [0, 1]$: $0 \leq n \leq 1 \Leftrightarrow -n \leq 0$
 (par croissance de l'exponentielle) $\Leftrightarrow e^{-n} \leq e^{-nn} \leq 1$
 $\Leftrightarrow 1 + e^{-n} \leq 1 + e^{-nn} \leq 2$

$\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-n}) \leq \ln(1 + e^{-nn}) \leq \ln(2)$

par croissance de l'intégrale

$$I_n \geq \int_0^1 \ln(1 + e^{-n}) dn$$

$$I_n \geq \left[n \ln(1 + e^{-n}) \right]_0^1$$

$$I_n \geq \ln(1 + e^{-1}) \times 1$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

I_n est donc minorée par $\ln(1+e^{-n})$
Ainsi $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente (décroissante
d'après la question précédente)

$$\begin{aligned} 8) a) I_n &= \int_0^1 \ln(1+e^{-nx}) x(n)' dx \\ &= [x \ln(1+e^{-nx})]_0^1 - \int_0^1 x \frac{d}{dx} \ln(1+e^{-nx}) dx \\ &= \ln(1+e^{-n}) - \int_0^1 x \frac{-n e^{-nx}}{1+e^{-nx}} dx \\ &= \ln(1+e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{1+e^{-nx}} dx \end{aligned}$$

b)

$$c) \int_0^1 x e^{-nx} dx = \int_0^1 x \left(\frac{-1}{n} e^{-nx} \right)' dx$$

$$= \left[\frac{-1}{n} x e^{-nx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{n} e^{-nx} dx$$

$$= \left[\frac{-e^{-n}}{n} \right] + \frac{1}{n} \left[\frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^1$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{-1}{n} \right) (e^{-n} - 1)$$

$$= \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} * \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

$$= \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1 - e^{-n}}{n^2}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -e^{-n} + \frac{1 - e^{-n}}{n} = 0$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} -e^{-n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{-n}$$

$$\text{Par l'encadrement } 0 < n = \frac{1}{e^n}$$

$$\text{D'encadrement } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{-n} = 0$$

D'encadrement par le théorème d'encadrement
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

9) a) Importez numpy as np
 def gn(n, n):
 return np.log(-1 + np.exp(-1 + n*x))

b) on peut conjecturer que la valeur approchée de I_n à 10^{-2} près est 0,82

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--	--

Né(e) le

		/			/				
--	--	---	--	--	---	--	--	--	--

Signature



Nom

L	A	M	E	A	N	T													
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom (s)

A	B	D	E	C	H	A	L	E	M										
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

19.02 / 20

Ecricone

Épreuve :

Math

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0	6
---	---

0	7
---	---

Numéro de table

2	5	
---	---	--

Exercice 3

f est continue et nulle sur $]-\infty; 0[$
 (fonction nulle) et positive et continue
 sur $[0; +\infty[$ car, $s \geq 0$ (continue comme une
 fonction rationnelle)

D'où $f(x) \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf
 (à $x=0$)

Éventuellement en S

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \frac{2s^2}{x^3} dx \\ &= \frac{2s^2}{-2} \left[x^{-2} \right]_0^{+\infty} \\ &= s^2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \right) = s^2 \times s^{-2} = 1 \end{aligned}$$

D'où f est une densité

2/ Par définition $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

pour $x < 0$: $f(t) = 0$ donc $F(x) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

$$\text{pour } n \geq 5 \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

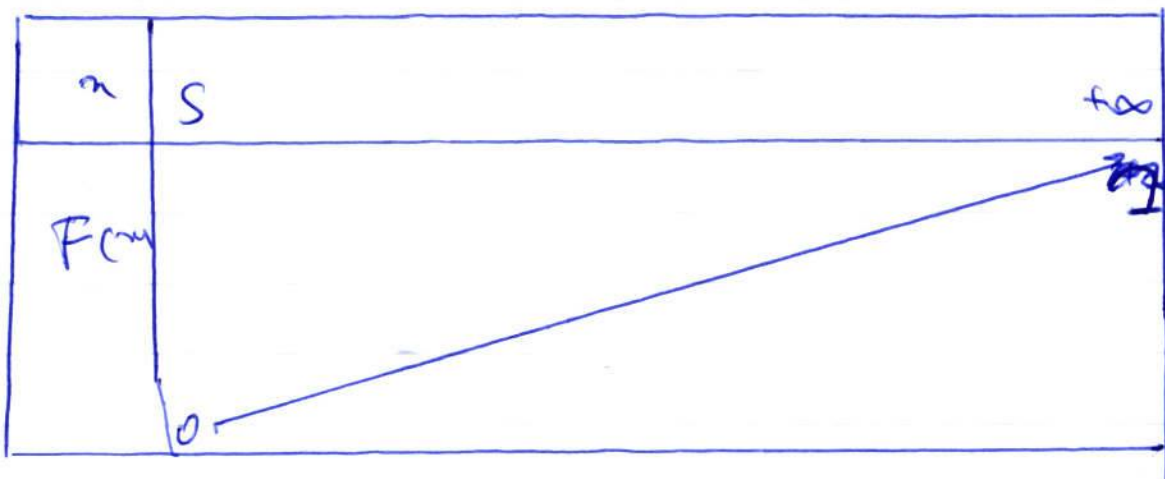
(Chasles)

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\infty} \frac{2s^2}{t^3} dt$$

$$= \frac{2s^2}{-2} \left[t^{-2} \right]_0^{\infty}$$

$$= -s^2 \left(\cancel{0} s^{-2} - \cancel{\infty}^{-2} \right)$$
$$= -1 + \frac{2}{s^2}$$

3)



u) F continue (car dérivable) sur $[0, +\infty[$
et elle y est croissante

Donc F réalise une bijection de $[0, +\infty[$
vers $F([0, +\infty[) = [0, 1[$

$$b) 0 \leq Y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - Y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{\frac{1}{1-Y}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq S \leq \sqrt{\frac{1}{1-Y}}$$

Donc $G(Y) \in [0, +\infty[$.

$$c) F(G(Y)) = \int_0^{G(Y)} 1 - \left(\frac{s}{\sqrt{\frac{1}{1-Y}}} \right)^2 ds$$

$$= \int_0^{G(Y)} 1 - \frac{s^2}{\frac{1}{1-Y}} ds$$

$$F(G(Y)) = Y$$

S) fonction de répartition d'une loi
uniforme sur $[0, 1]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-0}{1-0} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) P(U \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Numéro d'inscription

504348



Né(e) le

09 / 06 / 2003

Signature

Nom

CAMRANI

Prénom (s)

ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome

Épreuve :

Math

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07 /

07

Numéro de table

75

6)

$$S = U$$

7) $E(S)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge

$$E(S) =$$

$$2S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2} dx = 2S^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1} dx \right] = 2S^2 \left(\frac{1}{S} + 0 \right) = 2S$$

$$\text{Donc } E(S) = 2S$$

8)

$$\text{Sachant } \int_{-\infty}^{+\infty} x^a f(x) dx$$

$$2S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Il s'agit d'une série
Intégrale de Riemann
avec $\alpha = 1$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ diverge}$$

alors S n'admet pas de variance

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

$$\begin{aligned} 2) P(S \geq \frac{3 \cdot 5}{2}) &= 1 - P(\frac{3}{2} S) \\ &= 1 - \left(1 - \left(\frac{S}{\frac{3}{2} S}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$10) N_n \rightarrow \left(n, \frac{4}{9}\right)$$

$$11) E(N_n) = n \times \frac{4}{9}$$

$$V(N_n) = n \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{n \cdot 20}{81}$$

$$\begin{aligned} 12) P(N_n \leq 2) &= P(N_n = 1) + P(N_n = 2) \\ &= \binom{n}{1} \left(\frac{4}{9}\right)^1 \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \binom{n}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \\ &= n \left(\frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13) E(M_n) &= E\left(\frac{1}{2n} (S_1 + S_2 + \dots + S_n)\right) \\ \text{par linéarité} &= \frac{1}{2n} \times n \times E(S_1) + E(S_1) + E(S_1) \\ &= \frac{1}{2n} \times n \times 5 \end{aligned}$$

