

PREPA Option Maths appliquées

Mathématiques appliqués Mathématiques

502182

DU PAYRAT

JUSTINE

07/10/2003

Note de délibération : 17.37 / 20

Numéro d'inscription

502182



Né(e) le

07/10/2003

Signature

Nom

DUPAYRAT

Prénom(s)

JUSTINE

17.37 / 20



Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 / 05

Numéro de table

21

Exercice 1 Avec $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) $X(\omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et comme les boules sont indiscernables au toucher, par équiprobabilité, $X \sim \mathcal{U}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$

$$\text{Donc } \underline{E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

$$\underline{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

- 2) Y est la variable égale au numéro de la deuxième boule tirée. Il y a $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ boules dans la seconde urne et ces boules sont indiscernables au toucher. Donc $Y(\omega) = \llbracket 1; k \rrbracket$ et donc, plus largement, comme les cas extrêmes et intermédiaires sont réalisables, $\underline{Y(\omega) = \llbracket 1; n \rrbracket}$

- 3) soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

sachant que $(X=k)$ est réalisé, on a pioché k boules dans la première urne.

Donc dans la deuxième urne, il y a :

$$1 + 2 + \dots + k \text{ boules.}$$

Donc il y a $\underline{\frac{k(k+1)}{2}}$ boules dans la deuxième urne

b) Sachant que l'événement $(X=k)$ est réalisé, la probabilité de piocher la boule $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$ revient à calculer la loi uniforme sur $\llbracket 1; k \rrbracket$

Donc on a :

$$P_{(X=k)}(Y=j) = \begin{cases} \frac{2j}{k(k+1)} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j \geq k+1 \end{cases}$$

4) a) On remarque que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.

Donc il existe $a=1$ et $b=-1$

tels que $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

formule des probabilités totales associée au

b) D'après le système complet d'événements (SCE) $(X=k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ de probabilités non nulles, on a :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(Y=j) &= \sum_{k=1}^n P(X=k) \cap (Y=j) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X=k) \times P_{(X=k)}(Y=j) \\ &= \sum_{k=1}^j P(X=k) \times P_{(X=k)}(Y=j) + \sum_{k=j+1}^n P(X=k) \times P_{(X=k)}(Y=j) \\ &= \sum_{k=1}^j \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} + \sum_{k=j+1}^n 0 \\ &= \frac{2j}{n} \left(\sum_{k=1}^j \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \text{ d'après 4) a)} \\ &= \frac{2j}{n} \left(1 - \frac{1}{j+1} \right) \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

On admettra le résultat.

5) On remarque que le support de Y est fini donc $E(Y)$ existe telle que :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{j=1}^n j \cdot P(Y=j) = \\
 &= \sum_{j=1}^n j \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{j=1}^n j \times \frac{2}{n} - j^2 \times \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j^2 \\
 &= \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+2)}{6} \\
 &= n+1 - \frac{2n+2}{6} \\
 &= \frac{6(n+1) - (2n+2)}{6} \\
 &= \frac{4n+4}{6} \\
 &= \frac{n+2}{3}
 \end{aligned}$$

Donc $E(Y) = \frac{n+2}{3}$

$$6) P(X=h) \times P(Y=j) = \frac{1}{n} \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n^2(n+1)}$$

$$\text{et } P(X=h) \times P(X=h | Y=j) = \frac{1}{n} \times \frac{2j}{h(h+1)} \neq \frac{2(n+1-j)}{n^2(n+1)}$$

Comme $\forall h \in [1; n]$ et $\forall j \in [1; n]$,
 $P(X=h) \times P(Y=j) \neq P((X=h) \cap (Y=j))$,
 X et Y ne sont pas indépendantes

$$7) a) P(X=k) \times P(Y=j) = \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)}$$

Comme les supports de X et Y sont finis,

$E(XY)$ existe et vaut :

$$E(XY) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k jk P(X=k) \cap (Y=j) \quad \text{d'après la formule de transfert}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k jk \frac{1}{n} \frac{2j}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k j^2$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(2k+1)}{6}$$

$$= \frac{4}{6n} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{2}{6n} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{4}{6n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{6n} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{n} + \frac{2(n+1)}{12}$$

$$= \frac{36(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)}{12n}$$

$$= \frac{(n+1)(36n+18+n)}{6n}$$

$$= (n+1)$$

Numéro d'inscription

5 0 2 1 8 2



Né(e) le

0 7 / 1 0 / 2 0 0 3

Signature

Nom

D U P A Y R A T

Prénom (s)

J U S T I N E

17.37 / 20

Ecritome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 2 /

0 5

Numéro de table

2 1

$$\begin{aligned}
 b) \quad \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
 &= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \\
 &= \frac{(n+1)(4n+5) - 3(n+1)(n+2)}{18} \\
 &= \frac{(n+1)(4n+5-3n-6)}{18} \\
 &= \frac{(n+1)(n-1)}{18} \\
 \boxed{\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{18}}
 \end{aligned}$$

8) a) def seconde_urne(k):

L = []

for j in range(1, k+1):

L = j * [j] + L

return L

b) import numpy as rd

def simulate_XY(n):

X = n

urne2 = seconde_urne(n)

nb = len(urne2)

i = rd.randint(0, nb)

Y = i / nb

return X, Y

c) Cette liste permet d'estimer $E(XY)$ avec $n = 9999$.

9) a) $\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} x_k$ et $\bar{y} = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} y_k$ d'après le théorème de transfert.

Donc les coordonnées de (x, y) sont en moyenne

Exercice 2

1) a) la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme polynôme et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $x \mapsto e^{x/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$ dont le dénominateur est non nul, f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_*^+, f'(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{x/2} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{x/2}}{\sqrt{x}^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{x/2} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x}^2}$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{e^{x/2} (x - 1)}{2\sqrt{x} x}}$$

b) Comme $x = o(e^x)$, $x^{1/2} = o(e^{x/2})$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/2}}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x/2} = +\infty \quad \text{Donc } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3/2}}{\sqrt{x}} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{3/2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

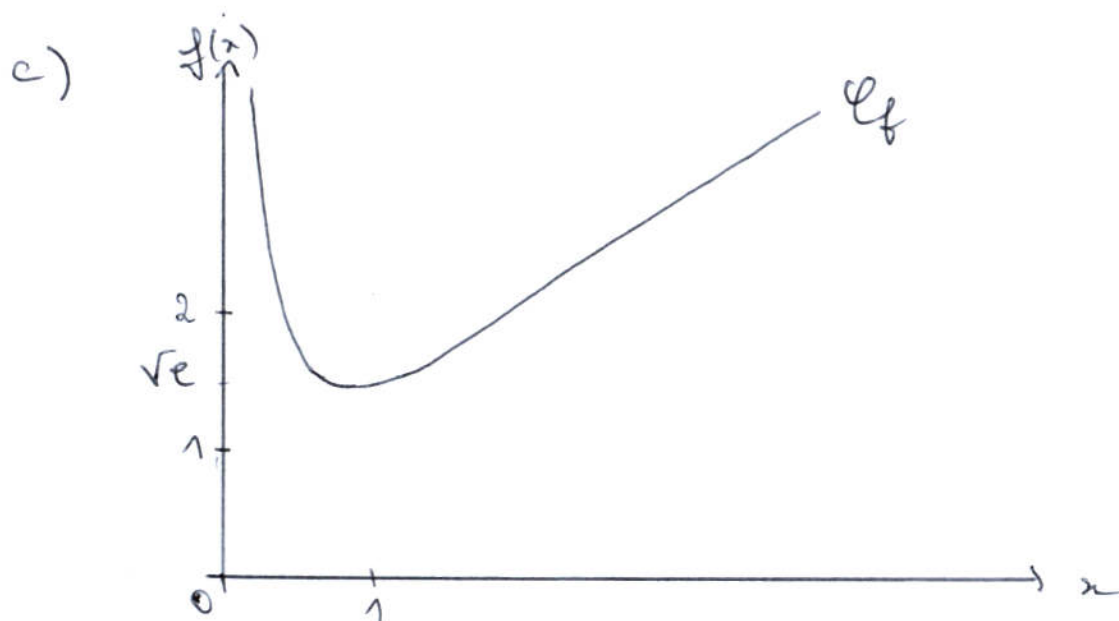
De plus, $f'(x) = \frac{e^{3/2}(x-1)}{2\sqrt{x}}$ qui est du signe de $x-1$ car les autres termes sont strictement positifs sur $\mathbb{R}_+^*$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1.$$

Donc $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow +\infty$

Donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.



$$2 < e < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3} \text{ par croissance de la racine sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Rightarrow 1 < \sqrt{e} < 2$$

$]0, 1[$

d) • la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et est dérivable donc continue sur $]0, 1[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{e}$ (continuité)

Donc la restriction de f à $]0, 1[$ réalise une bijection de $]0, 1[$ vers $] \sqrt{e}; +\infty[$.

Comme $n \geq 2 > \sqrt{e}$, $n \in] \sqrt{e}; +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n sur $]0, 1[$. Donc $0 < u_n < 1$

• la restriction de f à $]1; +\infty[$ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et est dérivable donc continue sur $]1; +\infty[$.

On a $f(1) = \sqrt{e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc la restriction de f à $]1; +\infty[$ réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers $] \sqrt{e}; +\infty[$.

Comme $n \in] \sqrt{e}; +\infty[$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution v_n sur $]1; +\infty[$. Donc $1 < v_n$

• Comme $f(1) = \sqrt{e} \neq n$ car $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que $0 < u_n < 1 < v_n$

2) a) soit $n \geq 2$

$$n+1 \geq n$$

$$\Rightarrow f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} \geq v_n \text{ car } f \text{ est croissante sur }]1; +\infty[\text{ et } v_n > 1.$$

Donc $(v_n)_{n \geq 2}$ est bien croissante

b) On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l > 1$ car $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante. Par continuité et unicité de limite,
 $l = f(l) \Rightarrow l = \frac{e^{l/2}}{\sqrt{e}} \Rightarrow l\sqrt{e} = e^{l/2} \Rightarrow \ln(l\sqrt{e}) = \frac{l}{2}$

Numéro d'inscription

502182



Né(e) le

07 / 10 / 2003

Signature

Nom

DU PAXRAT

Prénom(s)

JUSTINE

17.37 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 /

05

Numéro de table

21

~~On reprend le calcul de la 2. b) :~~

Si $(V_n)_{n \geq 2}$ converge vers l alors $V_{n+1} = f^{-1}(V_n)$ converge aussi vers l .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ d'après 1. b) et 1. d)
Comme $l \in \mathbb{R}$, c'est absurde.

Donc $(V_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$

3) a) Soit $n \geq 2$.

$$n+1 \geq n$$

$$\Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$

$$\Rightarrow u_n \geq u_{n+1} \text{ par décroissance de } f \text{ sur }]0; 1] \text{ et } u_n \in]0; 1[$$

Donc $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

b) Comme $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la convergence monotone, $(u_n)_{n \geq 2}$ converge

c) Comme $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers l et $1 > u_n > 0$, par passage à la limite, $1 \geq l \geq 0$.
supposons que $l > 0$:

Par unicité de limite, $l = f(l)$ par continuité de f en $l \in]0, 1[$.

$$\text{Donc } l = \frac{e^{l/2}}{\sqrt{l}} \Rightarrow l\sqrt{l} - e^{l/2} = 0.$$

$$\text{Posons } \forall x \in]0, 1[\quad g(x) = x\sqrt{x} - e^{x/2}$$

g est dérivable sur $]0, 1[$ comme somme de telles fonctions. Donc $\forall x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \frac{1}{2}e^{x/2} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}e^{x/2} \\ &= \frac{3\sqrt{x} - e^{x/2}}{2} \end{aligned}$$

Comme $0 < x < 1$, $0 < 3\sqrt{x} < 3$ et $0 < e^{x/2} < \sqrt{e}$

Donc par soustraction de termes positifs,
 $-e^{x/2} < 3\sqrt{x} - e^{x/2} < 3 - e^{x/2} < 0$ / Comme $0 < x < 1$,

$0 < e^{x/2} < \sqrt{e}$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow 3 - \sqrt{e} < 3 - e^{x/2} < 0$ strictement

Donc $g'(x) < 0$. Donc g est $\searrow$ décroissante

$$\text{Donc } g(1) < g(x) < g(0) \Rightarrow -1 < g(x) < 0.$$

Donc $g(x) = 0$ n'admet aucune solution, ce qui est absurde.

Comme $l \geq 0$ et $l > 0$ est absurde, on a $l = 0$

d) Comme $f(u_n) = n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

On admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$.

Donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$

4) a) $n \geq 2$ et $\varepsilon > 0$

```
import numpy as np
```

```
def approx_u(n, eps):
```

```
    a = 0
```

```
    b = 1
```

```
    while b - a > eps:
```

```
        c = (a + b) / 2
```

```
        if np.exp(c/2) / np.sqrt(c) < n:
```

```
            b = c
```

```
        else:
```

```
            a = c
```

```
    return (a + b) / 2
```

b)

```
def sp(N, eps):
```

```
    S = approx_u(2, eps)
```

```
    for k in range(3, N+1):
```

```
        S = S + approx_u(k, eps)
```

```
    return S
```

Exercice 3

Partie 1

1) a) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + d = 0 \\ a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ a = 0 \\ b = -c \\ a = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = c \\ b = -c \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre et composée de 4 éléments de $\mathbb{R}^4$.

Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \text{Card}(B)$,

B est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Donc B est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$b) A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $A = \text{Mat}_B(f)$, $f(u_1) = 0$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_2) = 0$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_3) = 2u_3.$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_4) = 2u_4 + u_3.$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

502182

Né(e) le

07/10/2003

Signature



Nom

DU PAYRAT

Prénom(s)

JUSTINE

17.37 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04

/ 05

Numéro de table

21

c) Comme la famille B est une base de $\mathbb{R}^4$, $\exists P$ inversible et T une matrice triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$ d'après la formule des changements de base. En effet, comme $\text{Mat}_B(f)$ est triangulaire supérieur, on en déduit que les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de f (les coefficients diagonaux de $\text{Mat}_B(f)$), à savoir 0 et 2.

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) a) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{On remarque que } 4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^3 = 4A^2 - 4A$$

b) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) : "\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_n A^2 + b_n A"$

$$\textcircled{I} \quad A = 1 \times A + 0 \times A^2$$

Donc il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que
 $A = a_1 A^2 + b_1 A$

avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ Donc $P(1)$ vraie.

Hérédité : Soit n fixé tel que $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (a_n A^2 + b_n A) A \quad \text{d'après l'hypothèse} \\ &= a_n A^3 + b_n A^2 \\ &= a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\ &= (4a_n + b_n) A^2 - 4a_n A \end{aligned}$$

Donc il existe $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A = A^{n+1}$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$$

Donc $P(n)$ est vraie.

Conclusion : Donc $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que
 $A^n = a_n A^2 + b_n A$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et d'après l'hérédité,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = \cancel{4a_n + 4b_n} - 4a_n$$

$$\Leftrightarrow \underline{a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n}$$

b) Soit $r^2 - 4r + 4$ l'équation caractéristique de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ récurrente linéaire d'ordre 2.

$$\text{Donc } \Delta = 16 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Donc } a_n = (\alpha + \beta n) (r_0)^n \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\Leftrightarrow a_n = (\alpha + \beta n) 2^n$$

Comme $a_1 = 0$, et $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$, $a_2 = 1$, ce qui revient à :

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) 2 = 0 \\ (\alpha + 2\beta) 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 8\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/4 \\ \beta = 1/4 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{a_n = (-1/4 + n/4) 2^n} \quad (= \cancel{(n-1) 2^{n-2}})$$

c) D'après les questions précédentes,

$$b_{n+1} = -4a_n = \underline{-4(-1/4 + n/4) 2^n =}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = -4a_n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+2} = -4(4a_n + b_n)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+2} = -16(\frac{n}{4} - \frac{1}{4}) 2^n + 4b_n$$

$$\Leftrightarrow b_{n+2} - 4b_{n+1} + 4b_n = 0 \quad \text{car } b_{n+1} = -4a_n = -4(\frac{n}{4} - \frac{1}{4}) 2^n$$

On se retrouve avec la même équation caractéristique qu'en 3) b).

$$\text{Donc } b_n = (\alpha + \beta n) 2^n \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{De plus, } b_1 = 1 \text{ et } b_2 = 0 \quad (A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + \beta) 2 = 1 \\ (\alpha + 2\beta) 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 4\alpha + 8\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 4\beta = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{-n}{2} \times 2^n = -n2^{n-1}$

4) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n): {}^n A_n = \text{énoncé}$
 Initialisation : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $P(1)$ vraie.

Hérédité Soit n fixé tel que $P(n)$ vraie.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{array}{cccc|cccc} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$= (a_n A^2 + b_n A) A$$

$$= (4a_n + b_n) A^2 - 4a_n A$$

$$= \left(4 \times \frac{1}{4} (n-1) 2^n - n 2^{n-1} \right) A^2 - 4 \times \frac{1}{4} (n-1) 2^n A$$

$$= 2^{n-1} (2n - 2 - n) A^2 - (n-1) 2^n A$$

$$= 2^{n-1} (n-2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-1) 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

On admettra le résultat

Numéro d'inscription

502182



Né(e) le

07/10/2003

Signature

Nom

DUPAYRAT

Prénom(s)

JUSTINE

17.37 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05/05

Numéro de table

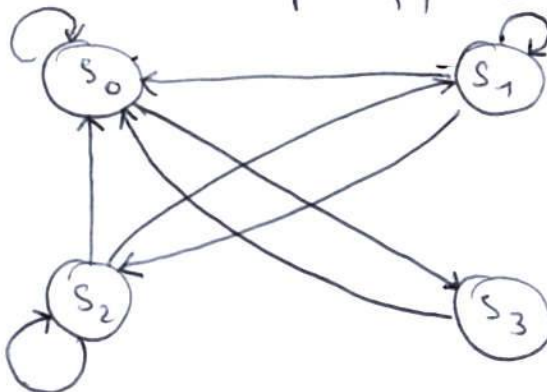
21

Partie 2

5) a) Soit G un graphe non pondéré.
 M est la matrice d'adjacence de G si
 $(m_{i,j})$, son coefficient entre la i -ème ligne
et j -ième colonne, désigne le nombre d'arêtes
qui relient le sommet s_i au sommet s_j .

b) le coefficient situé à la ligne i et à la
colonne j dans la matrice M^n désigne
le nombre de chemins ~~relia~~nt le sommet
de taille n reliant le sommet s_i au sommet
 s_j .

6) a) Comme $p=4$, G possède 4 sommets :



- b) Comme chaque sommet est relié aux autres,
le graphe est connexe.
- c) Comme le coefficient situé à l'intersection
entre la i ième ligne et la j ième colonne
de A^n est 2^{n-1} , il existe 2^{n-1} chemins de
longueur n reliant le sommet s_3 au
sommet s_0
- 7) def matrice_vers_liste(A):
 $L = []$
for k in range(1, (len(A)) * 2 + 1):
if $A[k] == 1$:
 $L = L + [k]$
else:
 $L = L + []$
return L
- 8) a) En prenant s_1 comme sommet de
départ, distances = 1 pour retourner en s_1
distances = 1 pour aller en s_2
distances = 1 pour aller en s_0
distances = 2 pour aller en s_3
(en passant par s_0)

8) b) def parcours (L, i0)

p = len(L)

distances = p

distances[i0] = 0

a_explorer = 0

marques = 0

while

s =

for v in

if v not in marques :

marques.append(v)

