Code sujet : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emlyon business school

MATHEMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Mercredi 26 avril 2023, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Somme d'une série

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

   b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n}$.

   c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n.

   d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. ***Informatique***.

   a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):
        k=1
        s=1
        while s<a:
                k=k+1
                s=s+1/k
        return k
```

   Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

   b) Le code suivant

```
from numpy import exp
exp(49)
```

   renvoie : `1.9073465724950998e+21`.
   Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

   c) Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

   d) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2

Des variables aléatoires

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivant toutes la loi uniforme sur $]0,1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on pose : $Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$Z_n(\omega) = \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big).$$

On admet que Z_n est bien une variable aléatoire.

1. Soit $n \geqslant 2$ entier.

   a) Démontrer que la fonction de répartition F_n de Z_n est définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

   b) Justifier que la variable aléatoire Z_n est à densité.

   c) Démontrer qu'une densité f_n de Z_n est donnée, pour x réel, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. ***Informatique***. Compléter la fonction suivante en langage Python de manière que l'appel `VarZ(10)` simule la variable aléatoire Z_{10}. On rappelle que, la fonction `random()` ayant été importée, l'appel `random(3)` renvoie un vecteur de trois coordonnées qui simulent des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.

```
def VarZ(n):
        from numpy import min
        from numpy.random import random
        return .........
```

3. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 2}$.

4. Soit $n \geqslant 2$ entier. Lorsque U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$, indépendante des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on admet que $Z_n - U$ est une variable aléatoire à densité g_n donnée par :

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - (-x)^n & \text{pour } x \in [-1,0[\\ (1-x)^n & \text{pour } x \in [0,1] \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}.$$

   On pose : $T_n = Z_n - X_n$.

   a) Démontrer que $P(Z_n = X_n) = \dfrac{1}{n}$.
   On pourra considérer la variable aléatoire $Z_{n-1} = \inf(X_1, \ldots, X_{n-1})$.

   b) La variable aléatoire T_n est-elle à densité ?

   c) ***Informatique***. Écrire une fonction `VarT` en langage Python, d'argument `n`, qui simule la variable aléatoire T_n.

5. La figure 1 présente un histogramme de 2000 rectangles donnant la répartition de 20000 valeurs d'une simulation de la variable aléatoire T_{500} de la question 4. La figure 2 est un zoom de la partie de droite de la figure 1.

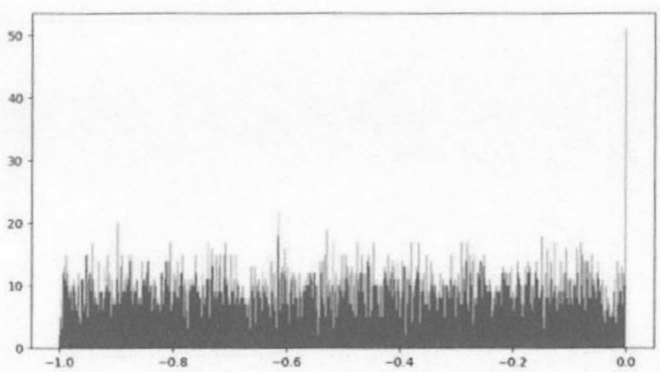

FIGURE 1 – Répartition de 20000 valeurs prises par T_{500}

Tournez la page S.V.P.

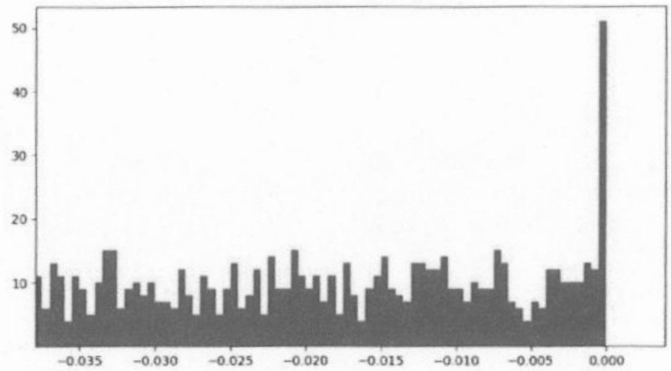

FIGURE 2 – Zoom de la partie droite de la figure 1

a) La variable aléatoire T_{500} vous semble-t-elle discrète ? Justifiez votre avis en une phrase.

b) Le rectangle le plus à droite de la figure 2 est-il cohérent avec le résultat de la question 4a ?

Problème

Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n.

Notations et définition

- On note 0_E le vecteur nul de E.
- Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
- Une ***forme linéaire*** sur E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$.
- On note, dans ce problème, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
- Un ***hyperplan*** de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de l'espace vectoriel E.

Lorsque F est un espace vectoriel de dimension finie, on admettra que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

On admettra aussi qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Enfin, on rappelle le **théorème de la base incomplète** : *toute famille libre de E peut se compléter en une base de E.*

Préliminaire

1. Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.

2. Soit φ un élément de E^*.

   a) Quelles sont les dimensions possibles pour l'image $\operatorname{Im} \varphi$ de φ ?

   b) En déduire que φ est soit nulle, soit surjective.

   c) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**
Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On considère l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie par : $g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.
   a) Démontrer que g est un élément de E^*.
   b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
   c) Pour $k \in \{1, \ldots, p\}$ on considère la fonction polynôme $Q_k : x \mapsto x^k - \dfrac{1}{k+1}$.
   Démontrer que la famille $(Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base du noyau de g.

4. **Second exemple**
Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.
   a) Démontrer que f est un élément de E^*.
   b) Déterminer le noyau de f.

5. Dans cette question, on revient au cadre général.
Soient f et g deux éléments de E^*, non nuls, tels que $\ker f \subset \ker g$.
   a) Démontrer que $\ker f = \ker g$.
   b) Justifier de l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.
   c) Démontrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{vect}(x_0)$, où $\mathrm{vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0.
   d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
   e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. On a vu à la question 2c que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Le but de cette question est de démontrer que ***tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle***.
Soit H un hyperplan de E.
   a) Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. Justifier de l'existence d'un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E.
   b) Soit φ l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ défini par :
   $$\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}.$$
   Justifier que cette définition est correcte et démontrer que $\ker \varphi = H$.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geqslant 2$ et une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de formes linéaires sur E, ainsi que l'application :
$$f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{pmatrix}.$$
On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

7. Démontrer que : $\ker f = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$.

8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.
   a) On note $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f.
   b) Démontrer que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans E^*.

Tournez la page S.V.P.

9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.
   a) Que peut-on dire de la dimension m de $\operatorname{Im} f$?
   b) En complétant une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\operatorname{Im} f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
   c) En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).

10. On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^*.
   a) Justifier que f est surjective.
   b) Démontrer que : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = n - p.$

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
Pour $a \in E$ on note f_a l'application qui à un élément x dans E associe le réel $f_a(x) = \langle a, x\rangle$.

11. Soit $a \in E$.
   a) Démontrer que f_a est un élément de E^*.
   b) Déterminer le noyau de f_a.
   c) Démontrer que si f_a est l'application nulle alors $a = 0_E$.

12. **Théorème de représentation des formes linéaires**
   On considère maintenant l'application $\Phi : E \to E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\Phi(a) = f_a$.
   a) Démontrer que Φ est linéaire.
   b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^*.
   c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que :
   $$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle\,.$$

13. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et on considère $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p.
   a) Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   b) Démontrer que si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on ait :
   $$\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

FIN DE L'ÉNONCÉ

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1107 – D'après documents fournis