

Maths S
083751
Z3-00011



Code épreuve : 297

Nombre de pages : 41

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

$$1) P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt > 0$$

par stricte positivité de l'intégrale

donc $F(a) \neq 0$ donc g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

De plus comme f est strictement positive et $F(a) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \underline{g(x) \geq 0}$

g est continue sauf éventuellement en

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^a \frac{f(x)}{F(a)} dx + \int_a^{\infty} 0 dx$$

$$= \frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$= \frac{P(X \leq a)}{F(a)} = \underline{1}$$

Donc g est une densité d'une variable aléatoire

2.5) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = P(Y \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^x g(t) dt$$

Ainsi si $x \leq a$ on a :

$$G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{F(a)} dt$$

$$= \frac{F(x)}{F(a)}$$

• si $x > a$,

$$G(x) = \int_{-\infty}^a \frac{f(t)}{F(a)} dt + \underbrace{\int_a^x \frac{f(t)}{F(a)} dt}_{=0}$$

$$= 1$$

2.6) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P(x \leq a, X \leq x) = \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{P(X \leq a)}$$

$$= \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{F(a)}$$

• Si $x \leq a$,

Soit $\omega \in [X \leq x]$

Alors $X(\omega) \leq x \leq a$

d'où $\omega \in [X \leq a]$

d'où $[X \leq x] \subset [X \leq a]$

d'où $[X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq x]$

Sibien que,

$$\frac{P([X \leq x])}{P([X \leq a])} = \frac{P([X \leq x])}{F(a)} = \underline{G(x)}$$

• Si $x > a$

Soit $\omega \in [X \leq a]$ alors $X(\omega) \leq a < x$

d'où $\omega \in [X \leq x]$

$$\text{d'où } \frac{P([X \leq x])}{P([X \leq a])} = \frac{P([X \leq a])}{F(a)} = 1 = \underline{G(x)}$$

Dans tous les cas, $\underline{G(x) = P([X \leq x])}$

3.a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$G_n(x) = P(M_n \leq x)$$

$$= P([Y_1 \leq x] \cap \dots \cap [Y_n \leq x])$$

$$= \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x)$$

par mutuelle
indépendance des
 $Y_1, \dots, Y_n$

$$= \prod_{i=1}^n P(Y \leq x)$$

car $Y_1, \dots, Y_n$ sont toutes
de même loi que Y

$$= \underline{(G(x))^n}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)} \right)^n & \text{si } x \leq a \quad \text{d'après 2.a)} \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

6) Premier cas ; si $x > a$

$$P(M_n \leq x) = 0 \quad \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Deuxième cas ; si $x \leq a$

$$P(M_n \leq x) = \left(\frac{f(x)}{F(a)} \right)^n$$

$$= \left(\frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} \right)^n \quad \text{d'après 2.b)}$$

$$= \left(\frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{P(X \leq a)} \right)^n$$

$$\text{or } [X \leq a] \cap [X \leq x] \subset [X \leq a]$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $P(X \leq a) \cap (X \leq x) \leq P(X \leq a)$ (car $P(X \leq x) \geq 0$)

donc
$$\frac{P((X \leq a) \cap (X \leq x))}{P(X \leq a)} \leq 1$$

donc
$$\left(\frac{P(X \leq a) \cap (X \leq x)}{P(X \leq a)} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc M_n converge en loi vers une variable suivant la loi nulle

4. a) $M_n(\mathbb{R}) \subset (-\infty; a]$

donc $(-M_n)(\mathbb{R}) \subset (-a; +\infty)$

donc $(a - M_n)(\mathbb{R}) \subset [0; +\infty[$

donc $n(a - M_n)(\mathbb{R}) \subset [0; +\infty[$

Soit $t \geq 0$,

$M_n(t) =$

$P(Z_n \leq t) = P(n(a - M_n) \leq t)$

$= P\left(a - M_n \leq \frac{t}{n}\right) = P\left(M_n \geq a - \frac{t}{n}\right)$

S/41

$$= 1 - P\left(M_n \leq a - \frac{t}{n}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{F\left(a - \frac{t}{n}\right)}{F(a)} \right)^n \quad \text{d'après 3.a)}$$

On a donc montré que :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \right]^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

6) Posons $t : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}$

t admet un développement limité à l'ordre 1 d'après la formule de Taylor Young d-c $\forall x \in \mathbb{R}$

$$t\left(\frac{x}{n}\right) = t(0) + t'(0)\left(\frac{x}{n} - 0\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{F(a)}{F(a)} - \frac{f\left(a - \frac{0}{n}\right)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) Premier cas : $x < 0$

$$H_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Deuxième cas : $x \geq 0$

$$H_n(x) = 1 - \left[\frac{f(a - \frac{x}{n})}{f(a)} \right]^n$$

$$= 1 - \exp\left(n \ln \left(\frac{f(a - \frac{x}{n})}{f(a)} \right)\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \exp\left(n \ln \left(1 - \frac{f(a)}{f(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)\right)$$

$$\text{Or } \ln \left(1 - \frac{f(a)}{f(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(1 - \frac{f(a)}{f(a)} \times \frac{x}{n} \right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{f(a)}{f(a)} \times \frac{x}{n}$$

$$\text{Car } - \frac{f(a)}{f(a)} \times \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Ainsi } n \ln \left(1 - \frac{f(a)}{f(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sim - \frac{f(a)}{f(a)} x$$

Donc par continuité de exp,

$$\left[\frac{F(a - \frac{x}{n})}{f(a)} \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{f(a)}{F(a)} \cdot x\right)$$

donc par opérations

$$H_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{f(a)}{F(a)} x}$$

Donc $H_n \xrightarrow{\text{loi}} W$

avec $W \longmapsto E\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right) \quad \left(\frac{f(a)}{F(a)} > 0\right)$

Exercice 2

1) Pour $k=0$

$$F = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x)\| \leq 0 \right\}$$

$= \emptyset$ car $\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \geq 0$.

$$2) A^2 = \frac{1}{27^2} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{729} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{9} I_3}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi $9A^2 - I_3 = 0$

Donc $P(x) = 9x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A .

Or $P(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

donc $\text{Sp}(A) \subset \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

b). $tA = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} = A$

donc A est symétrique

donc d'après le théorème spectral A est diagonalisable (au moyen d'une matrice orthogonale)

Ainsi A admet au moins une valeur propre. Supposons que A n'admette qu'une valeur propre et supposons, pour fixer les idées qu'il s'agit de $\frac{1}{3}$.

Alors comme A est diagonalisable,

$$A = \frac{1}{3} I_3. \quad \text{Ce qui est absurde donc}$$

A admet au moins deux valeurs propres
Or d'après 2. a) elle en admet au plus
2 donc A admet exactement deux valeurs
propres

$$\text{Donc } Sp(A) = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$\left(\lambda = \frac{1}{3}, \mu = -\frac{1}{3} \right)$$

c) A est diagonalisable donc
en notant E_λ et E_μ les sous
espaces propres de f on a :

$$\underline{\mathbb{R}^3 = E_\lambda \oplus E_\mu}$$

De plus comme B est orthonormée et
que A est symétrique, f est
un endomorphisme symétrique donc d'après
le cours ses sous espaces
orthogonaux sont deux à deux orthogonaux

Donc E_λ et E_μ sont orthogonaux

d) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après c) :
 $\exists (y, z) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}) \times \text{Ker}(f - \mu \text{Id})$

$$x = y + z. \quad \text{donc } f(x) = f(y) + f(z)$$

$$\text{Ainsi } \|f(x)\| = \|f(y) + f(z)\|$$

$$\leq \|f(y)\| + \|f(z)\|$$

~~D'après le théorème de Pythagore~~

~~car E_1 et E_μ sont orthogonaux par f~~

~~donc $f(y) \in E_1$ et $f(z) \in E_\mu$~~

~~et E_1 et E_μ sont orthogonaux~~
~~donc $\langle f(y), f(z) \rangle = 0$~~

Ainsi, $\|f(x)\|^2 \leq \left\| \frac{1}{3} y \right\|^2 + \left\| \frac{1}{3} z \right\|^2$

~~(car $2 \|f(z)\| \|f(y)\| \geq 0$)~~
$$= \frac{1}{3} \|y\|^2 + \frac{1}{3} \|z\|^2$$

$$= \frac{1}{3} (\|y\|^2 + \|z\|^2)$$

$$= \frac{1}{3} (\|y + z\|^2)$$

$$= \frac{1}{3} \|x\|^2$$

d'après le
théorème de
Pythagore car
 E_μ et E_1 sont
orthogonaux

d-c $\|f(x)\| \leq \frac{1}{3} \|x\|$

avec $\frac{1}{3} \in [0; 1[$ donc $f \in F$

3.a) Soit $x \in \mathbb{R}^3$

Supposons que $\text{Id} \in f$
Soit $x \in \mathbb{R}^3$

$\exists k \in [0; 1[$ tel que

$$\|f(x)\| \leq k \|x\| \text{ d-c } \|x\| \leq k \|x\|$$

Donc $\|x\| (1-k) \leq 0$

Donc en particulier

$$\| (1, 0, 0) \| (1-k) \leq 0$$

$$\underbrace{> 0}_{> 0} \text{ car } k < 1$$

donc $1 \leq 0$ Absurde

donc Id $\notin F$

6) Soit $f \in F$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3$,
 $\|f(x)\| \leq \frac{2}{3} \|x\|$

Soit $g \in F$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|g(x)\| \leq \frac{2}{3} \|x\|$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \frac{4}{3} \|x\|$$

$$\underbrace{\phantom{\frac{4}{3}}}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3.c) Soit $(f, g) \in F$

$$\exists k \in [0; 1[, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$$\|f(x)\| \leq k \|x\|$$

$$\exists k' \in [0; 1[, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$$\|g(x)\| \leq k' \|x\|$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$

$$\|g(f(x))\| \leq k' \|f(x)\|$$

$$\leq \underbrace{k k'}_{\in [0; 1[} \|x\|$$

donc F est stable par loi de composition

d) Soit f un automorphisme de F
Alors $\exists k \in [0; 1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\|f(x)\| \leq k \|x\|$$

Supposons que $f^{-1} \in F$

Alors d'après 3.c) $f^{-1} \circ f \in F$

$$\text{Or } f^{-1} \circ f = \text{Id}$$

Donc $\text{Id} \in F$. Absurde d'après 3.ii)

$$\text{Donc } \underline{f^{-1} \notin F}$$

4.a) Soit p un projecteur non nul

Supposons $p \in F$

Alors $\exists k \in [0; 1[\quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\|p(x)\| \leq k \|x\|$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^3$$

$$\|p(p(x))\| \leq k \|p(x)\|$$

$$\text{Or } p(p(x)) = p(x)$$

$$\text{donc } \|p(x)\| \leq k \|p(x)\|$$

$$\text{donc } \|p(x)\| \underbrace{(1-k)}_{>0} \leq 0$$

$$\text{donc } \|p(x)\| \leq 0.$$

$$\text{donc } p(x) = 0$$

Ceci pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, p est un projecteur nul, ce qui est absurde

$$\text{donc } \underline{p \notin F}$$

6) L'endomorphisme nul est une symétrie et l'endomorphisme nul appartient à F donc F contient au moins une symétrie.

De plus, l'endomorphisme f de la question 2 est symétrique et appartient à F .

Donc F contient des symétries.

S.a) Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ la liste des valeurs propres de f .

On a : $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \lambda_i \in \{1, -1\}$, $\lambda_i \neq 0$
 $\exists c \in \{1, 2, 3\}, \lambda_c = 1$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, si existe, $(y, z, w) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times E_{\lambda_3}$ / $x = y + z + w$

De plus $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ et E_{λ_3} sont

donc à deux orthogonaux car f est
symétrique.

$$\|f(x)\| = \|f(y+z+w)\|$$

$$= \|f(y) + f(z) + \cancel{f(z)} + f(w)\|$$

$$\leq \|f(y)\| + \|f(z) + f(w)\|$$

$$\leq \|f(y)\| + \|f(z)\| + \|f(w)\|$$

$$= (\lambda_1 \|f(y)\| + \lambda_2 \|f(z)\| + \lambda_3 \|f(w)\|)$$

$$\leq k (\|y\| + \|z\| + \|w\|)$$

$$= \|\lambda_1 y + \lambda_2 z + \lambda_3 w\|$$

$$\leq \|\lambda_1 y\| + \|\lambda_2 z\| + \|\lambda_3 w\|$$

$$= |\lambda_1| \|y\| + |\lambda_2| \|z\| + |\lambda_3| \|w\|$$

$$\leq k (\|y\| + \|z\| + \|w\|)$$

$$\text{donc } \|f(x)\|^2 \leq k^2 (\|y\| + \|z\| + \|w\|)^2$$

$$\leq k^2 (\|y\|^2 + \|z\|^2 + \|w\|^2)$$

$$= k^2 (\|y+z+w\|^2)$$

car les sous
espaces propres
sont

$$\text{donc } \|f(x)\| \leq k \|x\|$$

deux à deux
orthogonaux

16/11

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 5 EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5.b) • Supposons que $f \in F$
 Supposons qu'il existe $\lambda / \|\lambda\| \geq 1$
 et $x \neq 0 / f(x) = \lambda x$.

Or d'après 5.a) $\|f(x)\| \leq h \|x\|$ avec $h < 1$

donc ~~$\|f(x)\| \geq \|\lambda x\|$~~ $\|\lambda\| \|x\| \leq h \|x\|$

donc $\|\lambda\| \leq h$ car $x \neq 0$.

Absurde

donc $\lambda \in]-1; 1[$

• Supposons que toutes les valeurs propres
 de A appartiennent à $]-1; 1[$ alors
 d'après 5.a), comme $h \in [0; 1[$,
 $f \in F$

$$6.a) \quad A^2 = \frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$A^3 = \frac{1}{6^3} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 0 & -12 & 18 \\ -18 & -9 & 8 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 0 & -12 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot \frac{1}{6} A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{8}{36} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{36} \left[\begin{pmatrix} 0 & -16 & 16 \\ -16 & 8 & 0 \\ 16 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & -14 & 18 \\ -14 & 13 & 8 \\ 18 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Donc $A^3 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A.$

donc $P(X) = 4X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A

Or
$$P(X) = X(4X^2 - 1)$$
$$= X(2X - 1)(2X + 1)$$

Donc $Sp(A) \in \left\{ -\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2} \right\}$

6.6) Toutes les valeurs propres appartiennent à $[-1; 1]$ donc comme B est orthonormée et A est symétrique, f est symétrique donc d'après S.6), $f \in F$!

D'après S.6) $k = \frac{1}{2}$ convient

$$c) A = [0, -2, 2; -2, -1, 0; 2, 0, 1] / 6$$

$$K = \max_{\text{desp}(K)} (0, -0.5, 0.5)$$

Exercice 3

$$1.a) S(\Omega) = N(\Omega) \cap \{0\}$$

car il se peut que toutes les variables X_i prennent la valeur 0.

$$\text{Donc } \underline{S(\Omega) = \{0\}}$$

$$1.b) \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket,$$

X_i admet une espérance dans S
admet une espérance.

$$2) \text{ soit } K \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$P(S_n = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) \quad \text{par mutuelle indépendance}$$

$$= \underline{(1-p)^n}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques J EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Par mutuelle indépendance de la loi
binomiale $X_1, \dots, X_n \subset B(n, p)$

donc $S_n \subset B(n, p)$

et $E(S_n) = np$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(S=k) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [N=n] \cap \left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left([N=n] \cap \left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left([N=n] \cap \left[\sum_{i=1}^n X_i = k\right]\right)$$

par incompatibilité (N ne peut pas
valoir 3 et 18 par exemple).

De plus N est indépendante des variables
 X_i donc par lemme des coalitions
 N et $\sum_{i=1}^n X_i$ sont indépendants

$$\begin{aligned}
 P(S=h) &= \sum_{n=h}^{+\infty} P(N=n) P\left(\sum_{i=1}^n X_i = h\right) \\
 &= \sum_{n=h}^{+\infty} P(N=n) P(S_n = h)
 \end{aligned}$$

Or S_n n'est définie que pour $h \leq n$ d'où

$$P(S=h) = \sum_{n=h}^{+\infty} P(N=n) P(S_n=h)$$

$$h.a) \quad (N-1)(X) \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } N(X) \in \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \geq 1, \quad P(N=k)$$

$$= P(N-1 = k-1)$$

$$= \frac{e^{-1} (1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

6) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k) \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{\lambda^{n-k+(k-1)}}{(n-1)!}$$

$$= p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(q \lambda)^{n-k}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n (q \lambda)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)(q \lambda)^n}{n!} \quad \text{en posant } n = n' - k$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda} \lambda q}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k) (q \lambda)^n e^{-\lambda q}}{n!}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda} e^{\lambda q}}{k!} E(V + k) \quad \text{par théorème de transfert avec } V \subset P(\lambda q)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} e^{-\lambda + \lambda(1-p)} \cdot (\lambda q + k)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

$$c) S(\mathcal{X}) = \mathbb{N}$$

donc comme, $(S=k)_{k \geq 0}$ est un système complet d'événements,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k) = 1$$

$$\text{donc } P(S=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(q (1 - e^{\lambda p}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^{k+1} \lambda^k}{k!} \right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(q (1 - e^{\lambda p}) + p e^{\lambda p} \right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(q + e^{\lambda p} (p - (1-p)) \right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= 1 - e^{-2p} (1 - p + e^{2p} (2p - 1))$$

$$= 1 - qe^{-2p} + (2p - 1)$$

d) La variable conditionnelle S sachant $N=n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p

$$\text{Ainsi } E(S | N=n) = np$$

D'après la formule de l'espérance totale

$$E(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(S | N=n) \cdot P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} E(S | N=n) \cdot P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} np \cdot \frac{e^{-1} 1^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-1} 1^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) e^{-1} 1^n}{n!}$$

$$= p \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) P(N-1=n)$$

$$= p E(N-1+1) \quad \text{par théorème de transfert}$$

$$= p E(N)$$

$$= \underline{E(X) E(N)} \quad \text{car } X \hookrightarrow B(p)$$

S. fonction $y = S(\text{lambda}, p)$
 $N = \text{grand}(1, 1, 'poi', \text{lambda}) + 1$.
 $y = \text{grand}(1, 1, 'bin', N, p)$
 end fonction

Problème :

$$1) \quad f(x) \underset{x \rightarrow 10^+}{\sim} x$$

donc par substitution

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 10^+}{\sim} \ln(x)$$

Partie I

2. a) $\sinh x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

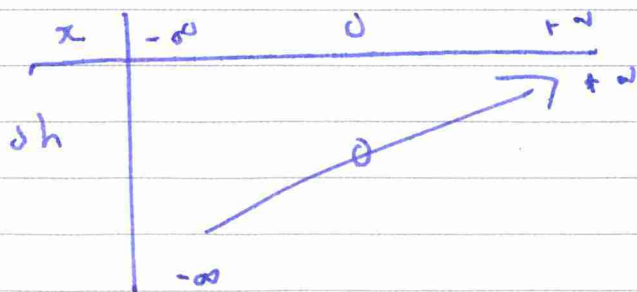
$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= -\sinh(x)\end{aligned}$$

donc $\sinh$ est impaire

b) $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

donc $\sinh$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



c) Soit v un voisinage de 0

Soit $x \in v \setminus \{0\}$.

$$\frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{\text{sh}(x) - 0}{x - 0}.$$

or sh est dérivable en 0

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{\text{sh}(x) - 0}{x - 0} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{sh}'(0) = \text{ch}(0) \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\text{sh}(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\text{donc } \frac{\text{sh}(x)}{x} \underset{0}{\sim} x$$

3.2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$= \text{ch}(x)$$

donc ch est paire

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

donc d'après 2.b) ch est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$
d'où le tableau de variations suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$-\infty$	1	$+\infty$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right) \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Partie 2 :

S.a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) > 0$ donc
th est bien définie

S.b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

$$\text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)}$$

$$= -\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \quad \text{d'après 2.a) et 3.a)}$$

$$= -\text{th}(x)$$

donc th est impaire

c) th est dérivable comme quotient
de fonctions dérivables dont le dénominateur
ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{ch}'(x)}{(\text{ch}(x))^2}$$

$$= \frac{(\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \right)^2 = \underline{1 - (\text{th}(x))^2}$$

S. 5()

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad fh'(x) = 1 - \frac{(fh(x))^2}{e^x + e^{-x}}$$
$$= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{e^x + e^{-x}}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} \geq -e^{-x}$

dnc $e^x + e^{-x} \geq e^x - e^{-x}$

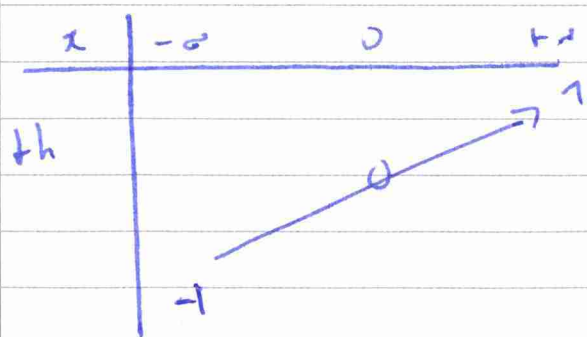
dlc $(e^x + e^{-x})^2 \geq (e^x - e^{-x})^2$

car $t \mapsto t^2$ est
croissante sur $\mathbb{R}_+$
et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}) \in (\mathbb{R}_+^2)$$

dnc $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \geq 1$

dnc $fh'(x) \geq 0$.



avec $fh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{et } fh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sim \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = -1$$

6.a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{sh}(x) \neq 0$$

On a aussi :

$$\frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Or Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{ae^{-x}}{(1-e^{-x})} + \frac{be^{-x}}{(1+e^{-x})} = \frac{ae^{-x} + ae^{-2x} + be^{-x} - be^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$= \frac{(a+b)e^{-x} + (a-b)e^{-2x}}{e^{-x}(e^x - e^{-x})}$$

$$= \frac{(a+b) + (a-b)e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\text{sh}(x)}$$

$$= \frac{ae^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b) + (a-b)e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{2 - (a+b)}{a-b}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 292

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDMEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~b-a~~

pour $a = b = 1$ on a :

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{(1+e^{-x})e^{-x} + e^{-x}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}$$

$$= \frac{e^{-x} + e^{-2x} + e^{-x} - e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x + e^{-x})}$$

$$= \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{\sinh(x)}$$

Donc $a = b = 1$ convient

6) b) Posons $f: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1 - e^{-x}) + \ln(1 + e^{-x})$

Re marquons que $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$e^{-x} < 1 \text{ donc } 1 - e^{-x} > 0$$

Ainsi, f est dérivable par opérations et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

donc f est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$

sur $\mathbb{R}^+$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \ln \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{e^{-x/2} (e^{x/2} - e^{-x/2})}{e^{-x/2} (e^{x/2} + e^{-x/2})} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} \right)$$

$$= \ln \left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$7) \quad \frac{\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \tanh(0)}{x - 0}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \tanh'(0) = 1$$

Donc $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$

donc comme $\tanh$ est strictement
positive d'après 1),

$$\ln \left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$$

partie 3

$$8. a) \quad \forall t \in [k, k+1],$$

$$k \leq t \leq k+1$$

$$\text{donc } kx \leq tx \leq (k+1)x \quad \text{car } x > 0$$

$$\text{donc } \operatorname{sh}((k)x) \leq \operatorname{sh}(tx) \leq \operatorname{sh}((k+1)x)$$

car d'après 2. a) sh est croissante

$$\text{donc } \frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}$$

car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} dt$$

$$\text{donc } \underline{\frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques J ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8.6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

En utilisant le résultat de la 8.a),
en sommant termes à termes de 1 à n
on a :

$$\sum_{h=1}^n \int_h^{h+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \sum_{h=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(hx)}$$

donc d'après la relation de Charles

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \sum_{h=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(hx)}$$

De même on a en sommant de 1 à n-1

$$\sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sh}((h+1)x)} \leq \sum_{h=1}^n \int_h^{h+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}$$

donc d'après la relation de Charles

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \quad \text{en posant } k = h' + 1$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} - \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$

Donc on a bien :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$

$$9.2) \quad \forall t \in [1, n+1]$$

$$tx \geq x(n+1) \quad (x > 0)$$

donc d'après 2.a)

$$\operatorname{sh}(tx) \geq \operatorname{sh}(x(n+1))$$

$$\text{donc } \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(x(n+1))} \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{t}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x > 0$$

$$\left| \frac{1}{\text{sh}(nx)} \right| = \frac{2}{e^{nx} + e^{-nx}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{e^{nx}} = 2e^{-nx}$$

Or la série de terme général e^{-nx} est convergente en tant que série géométrique de raison e^{-x} ($\in]0; 1[$)

Donc par un théorème de comparaison sur les séries à termes positifs.

la série de terme général $\frac{1}{\text{sh}(nx)}$

converge.

b). Soit $x > 0$.

d'après 8.6),

$$\left[\frac{-\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x} \right]_n^{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \left[\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right]_1^{n+1} + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

donc

$$\begin{aligned} & \left(\ln\left(\text{th}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right) \left(\frac{1}{x} \right) \\ & \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq + \frac{1}{x} \left(\ln\left(\text{th}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)} \end{aligned}$$

or $\forall n \geq 1$

$$\ln \left(\text{th} \left(\frac{n+1}{2} x \right) \right) \geq 0$$

donc

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

donc par compression des inégalités
au passage à la limite on a :

$$-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

Soit $x \in V \setminus \{0\}$

$$c) \quad -\frac{x}{\ln(x)} \cdot \left(-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right)$$

$$= \frac{\ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

d'où : γ .

$$-\frac{x}{\ln(x)} \left(-\frac{1}{x} \ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\text{sh}(x)} \right)$$

$$= \frac{\ln \left(\text{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right)}{\ln(x)} - \frac{x}{\text{sh}(x)} \frac{1}{\ln(x)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 83751

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques J EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$or \quad -\frac{x}{\sinh(x)} \quad \frac{1}{\ln(x)} \quad \sim \quad -\frac{1}{\ln(x)} \quad x \rightarrow 0^+$$

$$d = \left(-\frac{1}{x} \ln\left(\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\sinh(x)} \right) \left(-\frac{x}{\ln(x)} \right)$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow 1$$

donc par théorème d'encadrement,

$$-\frac{x}{\ln(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)} \quad x \rightarrow 0^+ \quad 1$$

$$D'où \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)} \quad \sim \quad -\frac{\ln(x)}{x}$$

10) . n = input('entrez une valeur pour n:')

x = input('entrez une valeur strictement positive pour x:')

s = 0

for u = 1:n

s = s + 2/(exp(x) + exp(-x))

end

disp(s)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

