



A1-00022
264210
Maths S

Code épreuve : 294

Nombre de pages : 17

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2 :

$$1) F = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \|f(x)\| \leq 0 \} = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \|f(x)\| = 0 \}$$

(par positivité de la norme)

$$= \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ t.q. } f(x) = 0 \} = \boxed{\{ 0_{\mathbb{R}^3} \}} \text{ avec } 0_{\mathbb{R}^3} \text{ l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3$$

par stricte positivité de la norme.

$$2) a/ A^2 = \frac{1}{27^2} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \frac{1}{27 \times 27} \times 3 \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{3}{27} I_3}$$

$$\text{d'où } A^2 - \frac{3}{27} I_3 = 0 \text{ ie } P = X^2 - \frac{3}{27} \text{ est un polynôme annulateur de } A$$

$$X^2 - \frac{3}{27} = X^2 - \frac{1}{9} \text{ ses racines sont } \frac{1}{3} \text{ et } -\frac{1}{3}$$

D'après le cours les deux vp possibles de A sont les racines de P ie $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$

b/ On remarque que $A \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable

$$\text{donc } \text{Tr}(A) = \frac{-9}{27} = \frac{-1}{3} = \underbrace{\dim(\text{Ker}(A + \frac{1}{3} I_3))}_{=\alpha} \left(-\frac{1}{3}\right) + \underbrace{\dim(\text{Ker}(A - \frac{1}{3} I_3))}_{=\beta} \left(\frac{1}{3}\right)$$

avec α, β possiblement égales à 0. et $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\alpha + \beta = 3$ car A est diagonalisable

$$\frac{-1}{3} = \frac{-\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} \text{ ie } \begin{cases} -\alpha + \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(3-\beta)+\beta = -1 \\ \alpha = 3-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta - 3 = -1 \\ \alpha = 3-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

donc $\text{Ker}(A + \frac{1}{3}I_3) \neq \{0\}$ et $\text{Ker}(A - \frac{1}{3}I_3) \neq \{0\}$

$$\boxed{\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{1}{3} \text{ sont les vp de } A}$$

c) par définition: comme A est diagonalisable, ses SEP sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

par définition: comme A est symétrique, ses SEP sont orthogonales dans $\mathbb{R}^3$.

d) ainsi $\mathbb{R}^3 = E_{\frac{1}{3}}(f) \oplus E_{-\frac{1}{3}}(f)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\exists! (y, z) \in \text{Ker}(f - \frac{1}{3}\text{id}) \times \text{Ker}(f + \frac{1}{3}\text{id})$ t.q. $x = y + z$

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \langle f(y+z), f(y+z) \rangle = \langle \frac{1}{3}(y-z), \frac{1}{3}(y-z) \rangle \\ &= \frac{1}{9} \langle y-z, y-z \rangle \end{aligned}$$

inégalité triangulaire

$$\|f(x)\| = \|f(y+z)\| = \left\| \frac{1}{3}(y-z) \right\| = \frac{1}{3} \|y-z\| \leq \frac{1}{3} (\|y\| + \|z\|)$$

$$\leq \frac{1}{3} \|y+z\| = \frac{1}{3} \|x\|$$

On a donc $\boxed{\|f(x)\| \leq \frac{1}{3} \|x\|}$ donc $f \in F$

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}^3$
 $\|id(x)\| = \|x\| \underset{\geq 0}{\geq} \frac{1}{2} \|x\|$ valable pour tout $k \in [0, 1[$

donc $\boxed{id \notin F}$

b) Soit $f, g \in F$ i.e. $\exists k, k' \in [0, 1[$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x)\| \leq k \|x\|$
 et $\|g(x)\| \leq k' \|x\|$

$$\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq k \|x\| + k' \|x\|$$

$$= (k + k') \|x\|$$

Or si f et $g \in F$ sont tels que $k + k' \geq 1$ alors $(f+g) \notin F$

$\exists (f, g) \in F$ t.q. $(f+g) \notin F$ donc F n'est pas stable linéairement donc

F n'est pas un s.e.v

c) On reprend les notations précédentes

$$\|(f \circ g)(x)\| = \|f(\underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}^3})\| \leq \underbrace{k}_{\geq 0} \|g(x)\| \leq (k \times k') \|x\|$$

Or $k, k' \in [0, 1[$ donc $k \times k' \in [0, 1[$ donc $\boxed{f \circ g \in F}$

F est donc stable par la loi de composition

d) Soit $f \in F$ i.e. $\exists k \in [0, 1[$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x)\| \leq k \|x\|$
 et t.q. $f \circ f^{-1} = \text{id}$. On suppose par l'absurde que $f^{-1} \in F$:

d'après la question précédente $f \circ f^{-1} \in F$ i.e. $\text{id} \in F$ or c'est absurde (question a))

donc $\boxed{f^{-1} \notin F}$

4) a) Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ t.q. $p^2 = p$ et $\forall k \geq 1$ $p^k = p$

On suppose que $p \in F$ i.e. $\exists k \in [0, 1[$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|p(x)\| \leq k \|x\|$

d'après c) $p \circ p \in F$ et $\forall i \geq 1$ $p^i \circ p \in F$

Or d'après c) $\|p \circ p(x)\| \leq (k \times k) \|x\|$

et par récurrence immédiate $\forall i \geq 2 \quad \|(p^i \circ p)(x)\| \leq k^{i+1} \|x\|$

or $k^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ car $k \in [0, 1[$

ie $\exists i \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \|(p^i \circ p)(x)\| \leq 0 \|x\| = 0$ ie $p^i \circ p = 0$ d'après la question 1

or $p^i \circ p = p$ ie $\boxed{p = 0}$

ainsi $p \in F \Rightarrow p = 0$

le seul projecteur appartenant à F est le projecteur nul

b) Soit s une symétrie de $\mathbb{R}^3$ ie $s^2 = \text{id}$ On suppose que $s \in F$

alors d'après c) $s^2 = \text{id} \in F$ or $\text{id} \notin F$ c'est absurde donc $\boxed{s \notin F}$

F ne contient pas de symétries

5) Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$
et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ses 3 valeurs propres non nécessairement non nulles ou distinctes
 $E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus E_{\lambda_3}(f) = \mathbb{R}^3$ (avec $\lambda_3 \text{ t.q. } \lambda_3 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}, \lambda \in S_p(f)\}$)

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \exists! (y, z, d) \in E_{\lambda_1}(f) \times E_{\lambda_2}(f) \times E_{\lambda_3}(f)$

$\forall x \in \mathbb{R}^3$

$\|f(x)\| = \|f(y+z+d)\| = \|f(y) + f(z) + f(d)\| = \|\underbrace{\lambda_1 y}_{\in E_{\lambda_1}(f)} + \underbrace{\lambda_2 z}_{\in E_{\lambda_2}(f)} + \underbrace{\lambda_3 d}_{\in E_{\lambda_3}(f)}\|$

Or ses 3 SEP sont orthogonales car f est symétrique
donc d'après le théorème de Pythagore

$\|f(x)\| = \|\lambda_1 y\| + \|\lambda_2 z\| + \|\lambda_3 d\|$

Copie anonyme - n°anonymat : 264210

Emplacement QR Code	Code épreuve : 299	Nombre de pages : 12	Session : 2022
	Épreuve de : MATHÉMATIQUES SEDHEC		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

b) On suppose qu'il existe une VP de f t.q $\|f\| > 1$

alors selon a) $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x)\| \leq (\max\{\|f\|, \lambda_{\max}(Sp(f))\}) \|x\|$

or $\max\{\|f\|, \lambda_{\max}(Sp(f))\} > 1$ donc $\exists k > 1$ t.q $\|f(x)\| \leq k \|x\|$

donc $f \notin F$

On a donc montré la proposition par contraposée.

6) a) $A^2 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -18 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^3 = \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

On cherche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t.q $aA^3 + bA^2 + cA + dI_3 = 0$

en regardant la somme en la case (1,1) : $a \cdot 0 + b \cdot \frac{2}{3} + c \cdot 0 + d = 0$ ie $\boxed{\frac{2}{3}b + d = 0}$

en (3,3) : $\frac{-b}{9} = 0 \Rightarrow b = 0$ et $d = 0$

les racines du polynôme trouvé sont les VP possibles de f

b) f est symétrique, si $\forall \lambda \in Sp(f) \quad \lambda \in \{-1, 1\}$

lecture des VP trouvées

alors $f \in F$ et en prenant $k = \max\{\|f\|, \lambda_{\max}(Sp(f))\}$ on a bien

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq k(x)$

5/90

Exercice 1:

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) \in]0, 1[$ donc F ne s'annule pas donc g est bien définie.

f est continue sur $\mathbb{R}$ F, sa primitive, ne s'annule pas en a
donc $x \mapsto \frac{f(x)}{F(a)}$ est continue sur $] -\infty; a]$

la fonction nulle est continue sur $]a; +\infty[$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$

$\forall x \leq a \quad f(x) \geq 0$ et $F(a) > 0$ donc $\frac{f(x)}{F(a)} \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^a \frac{f(x)}{F(a)} dx = \frac{1}{\lim_{B \rightarrow -\infty} F(a)} [F(x)]_B^a$$

$$= \frac{1}{F(a)} F(a) - \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{F(a)} F(B) = 1 - \frac{1}{F(a)} 0 = \boxed{1} \quad \text{car F est une fonction de}$$

répartition

g est donc bien une densité

2) a)

si $x \leq a$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{F(a)} dt = \boxed{\frac{1}{F(a)} F(x)}$$

$$\text{si } x > a \quad G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^a \frac{f(x)}{F(a)} dx + \int_a^x 0 dt = \boxed{1}$$

b) si $x > a$: $P_{[X \leq a]}(X \leq x) = 1 \stackrel{G(x)}{=} \text{car } [X \leq x] \text{ sachant } [X \leq a] \text{ avec}$

$x > a$ est l'événement certain

$$\text{si } x \leq a \quad P_{[X \leq a]}(X \leq x) = \frac{P((X \leq x) \cap (X \leq a))}{P(X \leq a)} = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \boxed{\frac{F(x)}{F(a)}} = G(x)$$

$$3) \quad a) \quad \text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = P(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [Y_i \leq x]\right) \\ = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) \quad (\text{par indépendance}) = \prod_{i=1}^n G(x) = (G(x))^n$$

$$\boxed{G_n(x) = (G(x))^n} \quad \text{et} \quad G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$b) \quad \text{si } x \geq a \quad G_n(x) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{si } x < a \quad \text{alors } 0 \leq F(x) \leq F(a) \leq 1 \text{ par croissance de } F \quad \text{donc } \frac{F(x)}{F(a)} \in (0, 1[$$

$$\text{donc } G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or si H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire certaine de paramètre a
on remarque que $\forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(x)$

Donc par définition $\boxed{\Pi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} S}$ avec S suit la loi certaine de paramètre a .

$$4) \quad Z_n = n(a - \Pi_n)$$

$$a) \quad \text{si } x < 0 \quad H_n(x) = P(n(a - \Pi_n) \leq x) = P(a - \Pi_n \leq \frac{x}{n}) = P(-\Pi_n \leq \frac{x}{n} - a) \\ = P(\Pi_n \geq a - \frac{x}{n}) = \boxed{0}$$

$$\text{car } \Pi_n(\Omega) \subset]-\infty; a] \quad \text{et si } x < 0 \quad \text{alors } a - \frac{x}{n} > a$$

$$\text{si } x \geq 0 \quad H_n(x) = P(\underbrace{\Pi_n \geq a - \frac{x}{n}}_{\leq a}) = 1 - G_n(a - \frac{x}{n}) = \boxed{1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n}$$

b) quand $n \rightarrow +\infty$ $a - \frac{x}{n} \rightarrow a$ or F est $\mathcal{C}^1$ en a
et comme $\frac{-x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On peut donc appliquer la formule de Taylor Young pour avoir un DL₁ de F en a
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F\left(-\frac{x}{n} + a\right) = F(a) + F'(a)\left(-\frac{x}{n}\right) + o\left(\frac{-x}{n}\right) \quad (\text{avec } F' = f)$$

alors $\boxed{\frac{F(-\frac{x}{n} + a)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$ car $-x \in \mathbb{R}$

c) si $x < 0$ $H_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

si $x \geq 0$ $H_n(x) = 1 - \frac{\left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n}{\underbrace{\frac{f(a)}{F(a)}}_{\in \mathbb{R}}} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$H_n(x) = 1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right) \sim -\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}$$

$$n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right) \sim -\frac{f(a)}{F(a)} \times x$$

par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ $H_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \exp\left(-\frac{f(a)}{F(a)} x\right)$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable suivant la loi exponentielle
de paramètre $\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)$

Ainsi $\boxed{Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Z}$ avec $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)}$

Exercice 3:

1) a) $N(n) = \mathbb{N}^*$ les X_i suivant la loi de Bernoulli ne peuvent
prendre que les valeurs 0 et 1

mais N pouvant prendre toute valeur de $\mathbb{N}^*$ la somme des X_i jusqu'à la
valeur prise aléatoirement par N appartient à $\mathbb{N}$ (0 est possible car tous les

Copie anonyme - n°anonymat : 264210

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 12	Session : 2022
	Épreuve de : MATHÉMATIQUES SEDHEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

X_i : peut être nulle donc $S(\omega) = \text{IN}$

$$b) \forall \omega \in \Omega \quad |S(\omega)| = \left| \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \right| \leq N(\omega) \text{ car les } X_i \in \{0,1\}$$

d'où $|S| \leq N$ or N admet une espérance donc par domination S admet

également une espérance

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \subset \mathcal{B}(n, p)$ par stabilité de loi binomiale
car $\forall i \in \{1, \dots, n\} X_i \subset \mathcal{B}(1, p)$
et d'après le cours $E(S_n) = np$

3) $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $\{[N=k] / k \in \mathbb{N}^*\}$ forme un s.c.e
on applique alors le F.P.T à S avec ce s.c.e

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \in \mathbb{N}^* \quad P(S=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n | S=k) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) \cdot P(S=k | N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) P(S_n = k) \end{aligned}$$

$S \leq N$ donc $P(N=n) \cdot P(S=k) = 0$ si $n < k$, la somme des commence donc à $n=k$

$$\text{On a bien } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k) P(N=n)$$

4) $N-1 \in \mathcal{P}(I)$

a) ie $(N-1)(\omega) \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(N-1 = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

ie $P(N = k+1) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

d'où $\underline{N(\omega) \in \mathbb{N}^*}$ et $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* P(N=k) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}}$

$$b) \forall k \in \mathbb{N}^* P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k | P(N=n)) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} (p^k) (q^{n-k}) \frac{n!}{(n-1)!} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} e^{-\lambda} \lambda^{n-k+k-1}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n (1q)^{n-k}}{(n-k)!} = P(S=k)$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k) (1q)^n}{n!}$$

c) $S(\omega) \in \mathbb{N}$ donc $\{[S=k] \cup [S=0] / k \in \mathbb{N}^*\}$ forme un s.c.e

$$d'où $P(S=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (1q+k) e^{-\lambda} P$$$

car $P_{[N=n]}(S=k) = 0$ si $k > n$

$$d) E(S | [N=n]) = \sum_{k=0}^n k P(S=k | [N=n]) = \sum_{k \in S_n(\omega)} k P(S_n=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-k-1}$$

$$= E(S_n) = \boxed{np} = E(S | [N=n])$$

$$E(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}(2)} E(S|N=n) P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} np P(N=n)$$

$$= p \sum_{n \in \mathbb{N}(2)} n P(N=n) = \boxed{p E(N)} = \boxed{E(X) E(N)} \text{ car } X \sim \mathcal{B}(1, p)$$

~~$$E(X) E(N) = p \times E(N-1) + 1 \text{ (car } X \sim \mathcal{B}(1, p) \text{ et linéarité de l'espérance)}$$~~

5) fonction $y = S(\text{lambda}, p)$ simule $N-1 \sim \mathcal{P}(1)$

$$N = \overbrace{\text{grand}(1, 1, 'poi', \text{lambda})}^{\text{simule } N-1 \sim \mathcal{P}(1)} + 1 \leftarrow \text{simule } N$$

$$y = \text{sum}(\text{grand}(1, N, 'bin', 1, p)) \leftarrow \text{simule } N \text{ variables } X \sim \mathcal{B}(1, p) \text{ indépendantes et la somme}$$

endfunction

Problème :

1) $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$ ie $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$ ie $f(x) = x + o(x)$

On veut montrer que $\ln(\underbrace{f(x)}_{>0}) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\ln(x + o(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)} + \frac{o(x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{o(x)}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$$

donc $\frac{\ln(f(x))}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$ ie $\boxed{\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} x}$

Partie 1:

2) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -\text{sh}(x)$ Sh est impaire

Or $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sh est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sh}'(x) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{e^{-x}}_{>0} \right) \geq 0 \quad \text{donc sh est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sh}''(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \text{sh}(x)$$

$$\text{sh}(0) = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \quad \text{sh}(1) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$			+		
$\text{sh}(x)$		concave			
$\text{sh}''(x)$		-	0	+	

Graph of $\text{sh}(x)$ showing concave and convex regions. The curve passes through $(0,0)$. At $x=-1$, the slope is $\frac{1}{2e} - \frac{e}{2}$. At $x=1$, the slope is $\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$.

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \quad \text{car } e^x \rightarrow 0 \text{ et } e^{-x} \rightarrow +\infty$$

$$\text{et } \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{car } -e^{-x} \rightarrow 0 \text{ et } e^x \rightarrow +\infty$$

c) par DL: $e^x - e^{-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 2x + o(x^2)$

ie $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{2x + o(x^2)}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

ie $\frac{\text{sh}(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

ie $\boxed{\text{sh}(x) \sim x}$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x) \quad \boxed{\text{ch est pair}}$

b) de même que sh est $\mathcal{C}^2$, ch est $\mathcal{C}^2$ pour les mêmes raisons

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh}(x)$$

ie $\text{ch}'(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$ et $\text{ch}'(x) \leq 0$ lorsque $x \leq 0$

$$\text{ch}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et } \text{ch}''(x) = \text{ch}(x)$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \quad \text{et par parité } \text{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

~~$\left(\text{ch}(1) = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \text{ et par parité } \text{ch}(-1) = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} \right)$~~

Copie anonyme - n°anonymat : 264210

Code épreuve : 299

Nombre de pages : 12

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES SEDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$		-	+
$ch(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$
$ch''(x)$		+	

convexe

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$4) (ch(x))^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x \cdot e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$(sh(x))^2 = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$d'où (ch(x))^2 - (sh(x))^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Partie 2 :

5) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad ch(x) > 1$ donc $ch(x) \neq 0$ (tableau de variation)
et ch et sh sont définis sur $\mathbb{R}$

th est donc bien défini sur $\mathbb{R}$

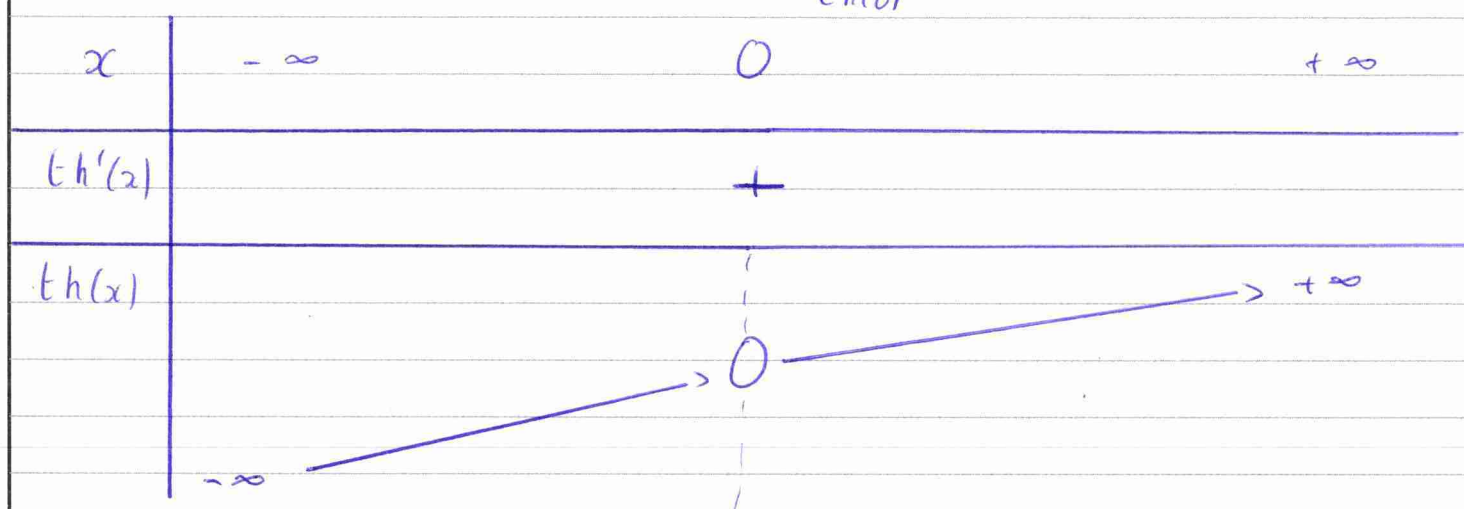
$$b) \forall x \in \mathbb{R} \quad th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$$

car sh est impaire et ch est paire donc th est impaire

c) Comme quotient de deux fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, th est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad th'(x) = \frac{sh'(x)ch(x) - sh(x)ch'(x)}{ch^2(x)} = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} \stackrel{\text{question 4}}{=} \frac{1}{ch^2(x)} \geq 0$$

th est donc croissante sur $\mathbb{R}$. $th(0) = \frac{sh(0)}{ch(0)} = \frac{0}{1} = 0$



$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \quad \text{car } sh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \text{ et } ch(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

$$th \text{ étant impaire } th(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

6) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{ae^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{ae^{-x} + be^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(a+b)}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(a+b)}{1+e^{-x}}$$

$$\text{L'égalité est vraie si } \frac{e^x - e^{-x}}{2} (ae^{-x}(1+e^{-x}) + be^{-x}(1-e^{-x})) = (1-e^{-x})(1+e^{-x})$$

$$\text{si } \frac{e^x - e^{-x}}{2} (ae^{-x} + ae^{-2x} + be^{-x} - be^{-2x}) = 1 - e^{-2x}$$

$$\text{si } \frac{1}{2} (-ae^{-2x} + ae^{-x} - ae^{-3x} + b - be^{-2x} - be^{-x} + be^{-3x}) = 1 - e^{-2x}$$

$$7) \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2} + 1-x+\frac{x^2}{2}}{2} = \frac{2+x^2}{2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{d'où } \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x^2}{8} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \quad \left(\text{car } \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \text{ et } \operatorname{sh}(x) \underset{0}{\sim} x\right)$$

$$\text{d'où } \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x/2}{1+x^2/8} = \frac{x/2}{1+o(x^2)} = \frac{x}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}} \quad \text{d'après la question préliminaire}$$

$$\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{car } \operatorname{th} \text{ est défini et strictement positif sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Partie 3:

$$8) a) \text{ Soit } k \in \mathbb{N}^* \quad \text{Soit } t \in [k; k+1]$$

$$k \leq t \leq k+1 \quad \text{alors } 0 < kx \leq tx \leq (k+1)x \quad \text{car } x > 0$$

$$\text{donc } \operatorname{sh}(0) < \operatorname{sh}(kx) \leq \operatorname{sh}(tx) \leq \operatorname{sh}((k+1)x) \quad \text{car } \operatorname{sh} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{ie } 0 < \operatorname{sh}(kx) \leq \operatorname{sh}(tx) \leq \operatorname{sh}((k+1)x) \quad \text{donc on peut appliquer la fonction inverse}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \geq \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \geq \frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)}$$

On intègre entre k et $k+1$ ce qui donne :

$$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} \underset{\in \mathbb{R}}{\textcircled{2}} \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt \underset{\textcircled{1}}{\leq} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \underset{\in \mathbb{R}}{\textcircled{1}}}$$

b) On somme de k allant de 1 à n dans l'inégalité 1:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt}$$

On somme de k allant de 0 à $n-1$ dans ① :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_0^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt = \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \int_0^1 \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt$$

$$\leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)} \quad \text{en x servant de la primitive trouvée}$$

Ceci est bien valable pour tout $n \geq 1$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

9) a) Soit F la primitive censée avoir été trouvée.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

la série est à termes positifs car $nx > 0$ et $\text{sh}(nx) > 0$
d'où la somme partielle de la série $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)}$ est croissante

$$\text{et } \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)} = (F(n) - F(1)) + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

Admet une limite en $+\infty$ donc S_n est majorée par un réel

$$S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) - F(1) + \frac{1}{\text{sh}(x)} \quad \text{donc } S_n \text{ converge}$$

donc par définition la série $\left(\frac{1}{\text{sh}(nx)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente

10) $n = \text{input}('entrez une valeur pour n:')$

$x = \text{input}('entrez une valeur strictement positive pour x:')$

$S = 0$

for $k = 1:n$

$$S = S + \left(0,5^k (\exp(k^*x) - \exp(-k^*x)) \right)^n (-1)^k$$

le $k^{\text{ème}}$ terme de $(\text{sh}(nx))_{n \in \mathbb{N}}$

end

disp(S)

$$9) c) \quad \frac{\ln(\text{th}(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)} \times \left(\frac{-x}{\ln x} \right) \leq \frac{\ln(\text{th}(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} + \frac{1}{\text{sh}(x)\ln(x)}$$

car $\frac{-x}{\ln x} \geq 0$ quand x est proche de 0^+

$$\text{or } \ln(\text{th}(\frac{x}{2})) \underset{0^+}{\sim} \ln(x) \quad \text{donc } \frac{\ln(\text{th}(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$$

$$\text{et } \frac{1}{\text{sh}(x)\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0 \quad \text{car } \frac{1}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty \text{ et } \frac{1}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} -\infty$$

Copie anonyme - n°anonymat : 264210

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 17

Session : 2029

Emplacement
QR Code

Épreuve de : MATHÉMATIQUES SEDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~car $\ln(x) \rightarrow -\infty$ et $\operatorname{sh}(x) \rightarrow$~~

or $\operatorname{sh}(x) \sim x$ donc $\frac{1}{\operatorname{sh}(x)\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

d'où

$$1 \leq \frac{\ln(\operatorname{th}(x/a))}{\ln(x)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \left(\frac{-x}{\ln x} \right) \leq \frac{\ln(\operatorname{th}(x/a))}{\ln(x)} + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

d'où par théorème d'encadrement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \left(\frac{-x}{\ln x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$

donc par définition :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \sim \frac{-\ln x}{x}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

