

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

ZS-00200
930566
Maths 2B



Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

i)

a)

i) $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f_2 admet des primitives de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, dont on notera F_2 l'une d'entre elles.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = F_2(x) - 2$, où $2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x)$
Comme F_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'après i, alors ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

ii)

b)

D'après a)ii, F_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = f_2(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \quad \text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) > 0$$

ϕ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1)

c) ϕ est une fonction de répartition, donc, par définition:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 1$$

Or, ϕ est continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

1)

d) $\bullet \forall x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \phi(x) = 1 - \int_{-\infty}^x f_Z(t) dt$$

et comme f_Z est une densité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt = 1$
 D'après la relation de Chasles:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \phi(x) = \int_x^{+\infty} f_Z(t) dt$$

$\bullet t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En posant $t' = -t$ comme changement de variable (changement affine):

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \phi(x) &= - \int_{-\infty}^{-x} f_Z(-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-x} f_Z(-t) dt \end{aligned}$$

et comme f_Z est paire sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}, f_Z(-t) = f_Z(t)$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \Phi(x) = \int_{-\infty}^{-x} f_Z(t) dt$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)}$$

2)

a) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes, de même espérance μ et de même variance σ^2 . D'après la loi faible des grands nombres :

$$\underline{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0}, \text{ où } \bar{X}_n \text{ est définie par l'échantillon.}$$

2)

b) i) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes, de même loi, de même espérance commune μ et de même variance σ^2 strictement positive.

D'après le théorème limite central :

$$\left(\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \mu \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N, \text{ où } N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\text{soit } \underline{(Z_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N.}$$

ii) D'après i, comme Φ (fonction de répartition de la loi - limite) est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)}$$

3/

a/

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ i) $X_i(\Omega) = \{0, 2, 5, 10\}$ donc $E(X_i)$ et $V(X_i)$ existent.

$$\text{ii) } E(X_i) = \sum_{R \in X_i(\Omega)} R P(X_i = R)$$

$$= 2 P(X_i = 2) + 5 P(X_i = 5) + 10 P(X_i = 10)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{5} + 10 \times \frac{1}{10}$$

$$\underline{E(X_i) = 3}$$

3/

b/

D'après Q3a.i. $V(X_i)$ existe donc $E(X_i^2)$ existe et:

$$E(X_i^2) = \sum_{R \in X_i(\Omega)} R^2 P(X_i = R)$$

$$= 2^2 \times \frac{1}{2} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 10^2 \times \frac{1}{10}$$

$$= 2 + 5 + 10$$

$$E(X_i^2) = 17$$

D'après la formule de Koenig - Huygens:

$$\begin{aligned} V(X_i) &= E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 \\ &= 17 - 3^2 = 17 - 9 \end{aligned}$$

$$\underline{V(X_i) = 8}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3)

$$d) i) U(\mathcal{U}) = [0, 1] \quad \text{donc} \quad f(U)(\mathcal{U}) = \{0, 2, 5, 10\}$$

$$\cdot \forall x \in [0, 1], \quad F_U(x) = x.$$

$$\cdot \forall (a, b) \in [0, 1]^2, \quad P(a \leq U \leq b) = P(a < U < b) \text{ car } U \text{ est à densité.}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(f(U) = 0) &= P\left(0 \leq U \leq \frac{1}{5}\right) = P\left(0 < U < \frac{1}{5}\right) \\ &\quad \text{car } U \text{ est à densité} \\ &= F_U\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{et } \frac{1}{5} \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$P(f(U) = 0) = \frac{1}{5}, \quad \text{car } U \hookrightarrow U([0, 1])$$

$$\cdot P(f(U) = 2) = P\left(\frac{1}{5} \leq U < \frac{7}{10}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{5} < U \leq \frac{7}{10}\right)$$

$$= F_U\left(\frac{7}{10}\right) - F_U\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{et } \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{5}\right) \in [0, 1]^2$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{2}{10}$$

$$\cdot P(f(U) = 2) = \frac{5}{10}$$

$$P(f(U) = 5) = P\left(\frac{7}{10} \leq U \leq \frac{9}{10}\right) = P\left(\frac{7}{10} < U \leq \frac{9}{10}\right)$$

$$P(f(U) = 5) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(f(U) = 10) = P\left(\frac{9}{10} \leq U \leq 1\right) = P\left(\frac{9}{10} < U \leq 1\right)$$

$$P(f(U) = 10) = \frac{1}{10}$$

Résumé :

$$X_i(\omega) = (f(U))(\omega)$$

$$\forall R \in X_i(\omega), \quad P(U=R) = P(f(U)=R)$$

X_i et $f(U)$ ont même loi.

3) d) ii)

$$(3) \quad x = 2 * \left(\frac{1}{10} \leq U < \frac{7}{10} \right) + 5 * \left(\frac{7}{10} \leq U < \frac{9}{10} \right) + 10 * \left(\frac{9}{10} \leq U \leq 1 \right)$$

3)

d) Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} Z_n &= \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - E(X_i)}{\sqrt{X_i}} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - 3}{\sqrt{8}} \right) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{S_n}{n} - 3 \right).$$

3)

e) i) D'après 2.2b, et comme $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite vérifiant les conditions d'application du théorème limite central:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

ii) Soit $n = 200$. En considérant que $n = 200$ est une valeur de n assez grande pour appliquer le résultat précédent:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Z_{200} \leq x) &= P\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{200}{2}} \left(\frac{S_{200}}{200} - 3\right) \leq x\right) \\ &= P\left(5 \left(\frac{S_{200}}{200} - 3\right) \leq x\right) \\ &= P\left(S_{200} \leq \left(\frac{x}{5} + 3\right) 200\right) \end{aligned}$$

car $5 > 0$ et $200 > 0$.

$$\text{iii) } 200 \left(\frac{x}{5} + 3\right) = 500 \Leftrightarrow x = \left(\frac{500}{200} - 3\right) 5 = (2,5 - 3) 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Ainsi, d'après le point i et ii :

$$\underline{P(S_{200} \leq 500) = \Phi(-2.5)}$$

4)

a) Soit $R \in \llbracket 0, 2N \rrbracket$, soit $x_R \in \mathbb{R}$.

$$\text{D'après q2b, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x_R) = \Phi(x_R)$$

Ainsi, d'après la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, -\varepsilon \leq P(Z_n \leq x_R) - \Phi(x_R) \leq \varepsilon$$

$$\text{et pour } \varepsilon = \frac{1}{2N} > 0 ;$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, -\frac{1}{2N} \leq P(Z_n \leq x_R) - \Phi(x_R) \leq \frac{1}{2N}$$

soit :

$$\underline{\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |P(Z_n \leq x_R) - \Phi(x_R)| \leq \frac{1}{2N}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3)

b) i) Soit $R \in \llbracket 2, 2N-1 \rrbracket$.

• Par définition, $I_R =]x_{R-1}, x_R]$ donc :

$$\forall x \in I_R, \quad x_{R-1} \leq x \leq x_R$$

donc :

$$[Z_n \leq x] \subset [Z_n \leq x_R]$$

donc par croissance de la probabilité :

$$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_R)$$

• ϕ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\phi(x) \geq \phi(x_{R-1})$$

donc :

$$-\phi(x) \leq -\phi(x_{R-1})$$

Ainsi :

$$\forall R \in \llbracket 2, 2N-1 \rrbracket, \quad P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq P(Z_n \leq x_R) - \phi(x_{R-1})$$

D'après les conventions posées, ce résultat vaut encore
par $R=1$ et par $R=2N$, donc :

$$\underline{\forall R \in \llbracket 1, 2N \rrbracket, \quad P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq P(Z_n \leq x_R) - \phi(x_{R-1})}$$

3)

b)

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x) = \phi(x_R)$ donc, par définition de la limite :

$$P(Z_n \leq x_R) \leq \phi(x_R)$$

Ainsi, d'après Q4b. i)

$$P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \phi(x_R) - \phi(x_{R-1})$$

et comme $\frac{1}{2N} > 0$:

$$\leq \phi(x_R) - \phi(x_{R-1}) + \frac{1}{2N}$$

$$\phi(x_R) - \phi(x_{R-1}) + \frac{1}{2N} = \phi(\phi^{-1}(\frac{R}{2N})) - \phi(\phi^{-1}(\frac{R-1}{2N})) + \frac{1}{2N}$$

$$= \frac{R - R + 1}{2N} + \frac{1}{2N}$$

$$= \frac{2}{2N}$$

$$\phi(x_R) - \phi(x_{R-1}) + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}$$

Donc :

$$\underline{P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \phi(x_R) - \phi(x_{R-1}) + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}}$$

4) b)

ii) De manière analogue :

$$[Z_n \leq x_{h-1}] \subset [Z_n \leq x]$$

Donc par croissance de la probabilité :

$$-P(Z_n \leq x) \leq -P(Z_n \leq x_{h-1})$$

et comme ϕ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \leq x_h$,

$$\phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \phi(x_h) - P(Z_n \leq x_{h-1})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x_{h-1}) = \phi(x_{h-1})$, par définition de la limite :

$$\begin{aligned} \phi(x) - P(Z_n \leq x) &\leq \phi(x_h) - \phi(x_{h-1}) \\ &\leq \phi(x_h) - \phi(x_{h-1}) + \frac{1}{2N} \quad \text{car } \frac{1}{2N} > 0 \\ &\leq \frac{1}{N} \quad \text{d'après Q4b. ii} \end{aligned}$$

Donc $\phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{N}$

4) c) D'après Q4b, lorsque $n \geq n_0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{N} \leq P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \frac{1}{N} \quad (\text{cf ii et iii})$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |P(Z_n \leq x) - \phi(x)| \leq \frac{1}{N}.$$

• soit $x \in \mathbb{I}\mathbb{R}$. Alors, nécessairement, $x \in \mathbb{R}$.

soit $x \in \mathbb{R}$. $\exists h \in \llbracket 1, 2N \rrbracket$ / $x \in \mathbb{I}\mathbb{R}$

Ainsi, $x \in \mathbb{I}\mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, |P(Z_n \leq x) - \phi(x)| \leq \frac{1}{N}$

4)

$$d) \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0$$

Or, n_0 dépend de N donc d'après Q4c, comme
 $\forall n \geq n_0, |P(Z_n \leq x) - \phi(x)| \leq \frac{1}{N}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0$, alors
on peut choisir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0, \text{ car } n_0 \text{ dépend de } N.$$

5)

a) i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et ϕ est continue sur $\mathbb{R}$,
 donc, par composition de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$$

5) a) ii)

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESEEL

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) a)

i) D'après ii, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P(Z_n \leq x_n) - \phi(x_n)) = 0$

Donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x_n) = \phi(x)$$

5) b)

i)

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \geq 1$, comme $\frac{1}{n} > 0$, alors :

$$\forall n \geq 1, [Z_n \leq x - \frac{1}{n}] \subset [Z_n \leq x] \subset [Z_n \leq x]$$

Donc, par croissance de la probabilité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \leq P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x)$$

5) b)

$$\text{ii)} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{n} = x$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x) = \phi(x) \quad \text{d'après } (*)$$

Poser, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x - \frac{1}{n}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$

D'après Q5.a.iii :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x) \end{aligned}$$

et donc, d'après Q5 et (*):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x)$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, et d'après (*):

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x_n) = \phi(x)}$$

5)

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

$$P(Z_n \in [a, b]) = P([Z_n \geq a] \cap [Z_n \leq b])$$

$$= P([Z_n \leq b] \cap \overline{[Z_n < a]})$$

or, $[Z_n < a] \subset [Z_n \leq b]$ car $a < b$ donc :

$$P(Z_n \in [a, b]) = P([Z_n \leq b]) - P([Z_n < a])$$

et d'après le théorème précédent et d'après (*):

$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \in [a, b]) = \phi(b) - \phi(a)}$$

b) on fixe i dans $\mathbb{N}^*$ pour le reste du sujet.

a) $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ donc par définition :

$$\begin{cases} E(X_i) = p \\ V(X_i) = p(1-p) \end{cases}$$

b) Soit $p \in]0,1[$.

$$p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Or, $\forall p \in]0,1[, \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ donc :

$$0 < p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

et donc, comme $v \mapsto \sqrt{v}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sigma \leq \frac{1}{2}$$

b) c) $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes une loi de Bernoulli et admettent la même espérance, donc $E(\bar{X}_n)$ existe.

Par linéarité de l'espérance :

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

et comme $\forall i \in [1, n], E(X_i) = p$

$$E(\bar{X}_n) = \frac{n}{n} p = p$$

6)) $X_1 \dots X_n$ sont n variables indépendantes. Comme $V(X_i)$ existe, alors $V(\bar{X}_n)$ existe et:

$$V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \quad \text{car } X_1 \dots X_n \text{ indépendantes}$$

$$\forall i \in [1, n], \quad V(X_i) = \sigma^2 \quad \text{donc:}$$

$$\underline{V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

7) a) i) $X_1 \dots X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, de même loi, de même espérance et variance strictement positive. D'après le théorème limite central:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu) \right)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N, \quad \text{où } N \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ et } \phi \text{ la fonction de répartition.}$$

$$\text{ii) Ainsi, } \forall a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu) \leq a\right) = \phi(a) - \phi(-a)$$

7) b)

$$\forall a > 0, \quad P\left(-a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu) \leq a\right) = P\left(-\frac{a\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}_n \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} > 0.$$

Ainsi, d'après Q7a i)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \phi(a) - \phi(-a)$$

et d'après Q1d):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \phi(a) - \phi(-a) = 2\phi(a) - 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 21

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) i) Poser $a = 1,96 > 0$.

$$\begin{aligned} 2\phi(1,96) - 1 &\approx 2 \times 0,975 - 1 \\ &\approx 1,950 - 1 \\ &\approx 0,95 \end{aligned}$$

Donc, d'après Q7b, pour $a = 1,96$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(p \in [\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1,96, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1,96]) \approx 0,95$

7) ii)

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \frac{1}{2} \text{ donc} \\ 1,96 \sigma &\leq \frac{1,96}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad 1,96 \sigma \leq 0,98$$

$$\bullet \quad \text{et} \quad -1,96 \sigma \geq -0,98$$

Donc :

$$\left[\bar{X}_n - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}} \right]$$

donc par croissance de la probabilité :

$$P(p \in [\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}]) \geq P(p \in [\bar{X}_n - \frac{1,96 \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{1,96 \sigma}{\sqrt{n}}])$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(p \in [\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}]) \geq 2\phi(1,96) - 1$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(p \in [\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}]) \geq 0,95.$$

Donc p a approximativement plus de 95% de chances d'appartenir à l'intervalle $[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}]$.

8) a)

$$\begin{aligned} (\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) &= \bar{X}_n - (\bar{X}_n)^2 - p\bar{X}_n - p + p\bar{X}_n + p^2 \\ &= \bar{X}_n - (\bar{X}_n)(\bar{X}_n) + p(p-1) \\ &= \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) + \frac{1}{n} - \sigma^2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$(\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) = \frac{1}{n} - \sigma^2 - \frac{1}{n}$$

$$8) b) \quad \frac{1}{n} - \sigma^2 = \frac{1}{n} + (\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p)$$

$$\text{Donc } |\frac{1}{n} - \sigma^2| = \left| \frac{1}{n} + (\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) \right|$$

et d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\frac{1}{n} - \sigma^2| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + |(\bar{X}_n - p)(1 - p - \bar{X}_n)|$$

$$\bullet \quad 0 < 1-p < 1$$

$$\bullet \quad -1 \leq -\bar{X}_n \leq 0$$

$$\text{Donc} \quad (1-p - \bar{X}_n) \leq 1 \leq 2$$

et comme $\frac{1}{n} > 0$:

$$\underline{|V_n - T^2| \leq \frac{1}{n} + 2|\bar{X}_n - p|}$$

8) c) Soit $\varepsilon > 0$.

D'après l'inégalité précédente:

$$[|V_n - T^2| > \varepsilon] \subset \left[\left(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} \right) > \varepsilon \right]$$

donc par croissance de la probabilité:

$$P(|V_n - T^2| > \varepsilon) \leq P\left(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon\right)$$

$$P(|V_n - T^2| > \varepsilon) \leq P\left(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \quad \text{car } \frac{1}{2} > 0.$$

$$8) d) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

donc par définition de la limite:

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1, \quad \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{\varepsilon}{2} - \alpha$$

et pour α quelconque, on a:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1, \quad \left[|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} \right] \subset \left[|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$[|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \subset [|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}]$$

donc par croissance de la probabilité:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1, P(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}) \leq P(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4})$$

8)c) D'après Qdc et Qdl:

$$0 \leq P(|V_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq P(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4})$$

Or, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, la même espérance p et la même variance donc d'après la loi faible des grands nombres:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}) = 0$$

et donc d'après le théorème d'encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|V_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2 E ESSEEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9)

$$a) \bullet [W_n \leq x] = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_n \leq x \right] = \left[Z_n \leq x \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right]$$

$$\text{car } \frac{\sqrt{n}}{\sigma} > 0$$

• D'après Qle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([V_n - \sigma^2 > \varepsilon] \cup [V_n - \sigma^2 < -\varepsilon]) = 0$$

9/a)

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad P(|V_n - \sqrt{r}| > \varepsilon) &= P([V_n - \sqrt{r} > \varepsilon] \cup [V_n - \sqrt{r} < -\varepsilon]) \\ &= P\left[\frac{V_n}{\sqrt{r}} > 1 + \varepsilon\right] \cup \left[\frac{V_n}{\sqrt{r}} < 1 - \varepsilon\right] \end{aligned}$$

d'union étant disjointe.

$$= P\left(\frac{V_n}{\sqrt{r}} > 1 + \varepsilon\right) + P\left(\frac{V_n}{\sqrt{r}} < 1 - \varepsilon\right)$$

 $v \mapsto \sqrt{v}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{r}} > \sqrt{1 + \varepsilon}\right)$$

7) a)

(ii) D'après *, comme $(1+\varepsilon)x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) = \Phi((1+\varepsilon)x).$$

9) a) i)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{V}} > 1+\varepsilon\right) = 0 \quad \text{donc:}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1, \alpha \leq P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{V}} > 1+\varepsilon\right) \leq \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) = \Phi((1+\varepsilon)x) \quad \text{donc}$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists n_2 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_2, P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) \leq \Phi((1+\varepsilon)x) + \beta$$

et donc on prend $n_\varepsilon = \max(n_1, n_2)$ et $\varepsilon = \alpha + \beta$:
d'après 9) a) i):

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_\varepsilon, P(W_n \leq x) \leq \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon.$$

9) b) $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$$\phi((1-\varepsilon)x) - \varepsilon \leq P(W_n \leq x) \leq \phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon$$

Pour ε très faible :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 - \varepsilon = 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 + \varepsilon$$

Donc on fait tendre ε vers 0, puis dans un second temps, on fait tendre n , d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq x) = \phi(x)$$

10) a) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P(W_n \leq x) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}(\bar{X}_n - p) \leq x\right)$$

$$= P\left(-p \leq x \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n\right)$$

$$= P\left(p \geq \bar{X}_n - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} x\right)$$

et donc d'après 9) b) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p \geq \bar{X}_n - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} x\right) = \phi(x).$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 29	Session : 2022
	Épreuve de :		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

10)

$$b) \begin{cases} n = 1000 \\ \bar{X}_n = 0,52 \end{cases}, \quad \sqrt{n} = 0,2506$$

$$p \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \bar{X}_n - \frac{x \sqrt{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0,52 - \frac{x \sqrt{0,2506}}{\sqrt{1000}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (0,52 - \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} = x$$

et d'après Q10a, pour $x = (0,52 - \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}}$:

A reporte l'élection avec une probabilité voisinant

$$\phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} \left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

11) a)

$$i) \quad \begin{aligned} X_i(\omega) &= T_i(\omega) = \{0, 1\} \\ \text{donc} \quad Y_i(\omega) &= \{0, 1\}. \end{aligned}$$

ii) $\{[T_i=0], [T_i=1]\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P[Y_i=0] &= P([Y_i=0] \cap [T_i=1]) + P([Y_i=0] \cap [T_i=0]) \\ &= P([X_i+1-X_i=0] \cap [T_i=1]) + P([X_i=0] \cap [T_i=0]) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } [1=0] \cap [T_i=1] = \emptyset \quad \text{donc:}$$

$$= P([X_i=0] \cap [T_i=0])$$

X_i et T_i sont indépendantes:

$$= P([X_i=0]) P([T_i=0])$$

$$= (1-p)(1-q)$$

$$\text{Donc } Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - (1-p)(1-q)\right)$$

$$r = 1 - (1-p)(1-q)$$

$$\begin{aligned} \text{11) b) } P\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{un}} (\bar{Y}_n - r) \leq x\right] &= P\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{un}} (\bar{Y}_n - 1 + (1-p)(1-q)) \leq x\right] \\ &= P\left[1-p \leq \left(x \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \bar{Y}_n + 1\right) \frac{1}{1-q}\right] \quad \begin{aligned} &\text{car } 1-q > 0 \\ &\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > 0 \end{aligned} \\ &= P\left[p \geq \left(-x \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \bar{Y}_n - 1\right) \frac{1}{1-q} + 1\right] \\ &= P\left[p \geq \frac{1}{1-q} \left(\bar{Y}_n - x \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right] \end{aligned}$$

donc d'après le résultat admis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p \geq \frac{1}{1-q} \left(\bar{y}_n - x \frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right) = \phi(x).$$

ii) c)

$$\frac{1}{1-q} \left(\bar{y}_n - x \frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} - q\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-q} \left(\bar{y}_n - \frac{x}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{y}_n(1-\bar{y}_n) + \frac{1}{n}} - q\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (1-q) + \frac{2q}{2} - \bar{y}_n = -\frac{x}{\sqrt{n}} \sqrt{U_n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} (1+q) - \bar{y}_n\right) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}} = -x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}} \left(\bar{y}_n - \frac{1}{2} (1+q)\right)$$

et donc, d'après Q10b, la probabilité que A remporte l'élection vaut

$$\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}} \left(\bar{y}_n - \frac{1}{2} (1+q)\right)\right)$$

(2)a) $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe

i) Prenons, pour tout $u \in [0,1]$:

$$\begin{cases} f(u) = (1-u)^3 \\ g(u) = \frac{u^4}{4} \end{cases}$$

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et par intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^3(1-u)^3 du &= \left[(1-u)^3 \frac{u^4}{4} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{3}{4} (1-u)^2 u^4 du \\ &= \frac{3}{4} \int_0^1 (1-u)^2 u^4 du \end{aligned}$$

et en intégrant par parties successivement, car $u \mapsto u^2$ et $u \mapsto (1-u)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ pour $k \in [5,6]$ et $i \in [1,2]$:

$$= \frac{3}{4} \int_0^1 2(1-u) \frac{u^5}{5} du$$

$$= \frac{3 \times 2}{4 \times 5} \int_0^1 \frac{u^6}{6} du$$

$$\int_0^1 u^3(1-u)^3 du = \frac{1}{20} \int_0^1 u^6 du.$$

$$12)a) ii) \quad \frac{1}{20} \int_0^1 u^6 du = \frac{1}{20 \times 7} \left[u^7 \right]_0^1 = \frac{1}{140}$$

12)b) $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est continue sur $[0,1]$ donc continue sur $[0,2]$ par $z \in]0,1[$. Ainsi, $\int_0^z u^3(1-u)^3 du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

h est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ en tant que fonction constante.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z u^3(1-u)^3 du = 0 = h(0)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \int_0^z u^3(1-u)^3 du = 140 \int_0^1 u^3(1-u)^3 du = \frac{140}{140} = 1 = h(1)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930566

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 29

Session :

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

h est donc continue sur $\mathbb{R}$

12)c) $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est continue positive sur $]0,1[$.

Ainsi ;

$$\forall z \in]0,1[, \quad 140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \leq 140 \int_0^1 u^3(1-u)^3 du \leq 1$$

Ainsi, d'après le résultat précédent, et d'après la définition de h sur les autres intervalles :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq h(z) \leq 1$$

15)a) i) $Y_1, \dots, Y_n$ sont n variables indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, par stabilité de la loi normale, $\sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi normale.