

Copie anonyme - n°anonymat : 297617



E8-00341
297617
Maths T

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématique ESU.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

$$1a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 16 \\ 48 & -32 & 48 \\ 16 & 32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^3 = 16 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \underline{2 = 16}$$

b) Si $A^3 = 2A$

Alors, $A^3 A^{-1} = 2A A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = 2I$

Or $A^2 = 16I \Leftrightarrow \frac{1}{16} A^2 = I$

Or $\frac{1}{16} A^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16} A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \neq I$

Donc par l'absurde, A n'est pas inversible

2- @ $A^5 = A^3 \times A^2 = 16A \times A^2 = 16A^3 = 16 \times 16A^2$

Donc $A^5 = 16A^2$ ou $2A$

5) Montrons par récurrence que $A^{2p-1} = 2^{p-1} A$.

* Initialisation : pour $p = 1$

$A^{2-1} = A^1 = A$ } Donc $A^{2p-1} = 2^{p-1} A$.

De même $2^{(1-1)} A = 2^0 A = A$.

* Hérédité : pour p non nul.

Supposons que : $A^{2p-1} = 2^{p-1} A$.

Montrons que : $A^{2(p+1)-1} = 2^p A \Leftrightarrow A^{2p+1} = 2^p A$.

Par hypothèse de récurrence : $A^{2p+1-1} = A^{2p} = A^{2p-1} \times A = 2^{p-1} A \times A = 2^{p-1} A^2$

$A^{2p+1-1} = A^{2p+2-1} = A^{2p+1} = A^{2p} \times A = (A^{2p-1} \times A) \times A =$

$$A^{2(p+1)-1} = d^p A.$$

Par récurrence, d'après le principe de récurrence, pour p non nul $A^{2p-1} = d^{p-1} A$.

c) Si $A^{2p-1} = d^{p-1} A.$

$$A^{2p-1} \times A = d^{p-1} A \times A$$

Donc $A^{2p} \times A^{-1} \times A = d^{p-1} A^2$

Ainsi $A^{2p} = d^{p-1} A^2$

3-a) Selon 1a), $A^3 = dA$

$$\Leftrightarrow A^3 - dA = 0$$

$$\Leftrightarrow A(A^2 - d) = 0$$

Posons P polynôme annulateur de la matrice A que l'on choisira P_1 .

$$P = X(X^2 - d) = 0$$

Or les solutions sont $X = 0$ en 1^{er} rang.

Ensuite, $X^2 - d = 0 \Leftrightarrow X^2 = d$

Les 2 autres solutions sont $X = \sqrt{d}$ et $X = -\sqrt{d}$.

Or les valeurs propres d'une matrice sont parmi les racines de son polynôme annulateur. De ce fait, les valeurs propres possibles de A sont 0, $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$.

b). $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - 2y + 3z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$

$$-4X = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ -4z \end{pmatrix}. \text{ Par système linéaire,}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = -4x \\ 3x - 2y + 3z = -4y \\ x + 2y + z = -4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x + 2y + z} = \\ -4z = -4x \\ 3x - 2y + 3z = -4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 3x - 2y + 3z = -4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 6z = -2y \end{cases}$$

Donc $AX = -4X$ d'incertitude X est équivalent à

$$\begin{cases} y = -3z \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi -4 est une valeur propre de A de vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $AX = 0$ ~~ne~~. En système linéaire :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x = -4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - x = 0 \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Donc, les solutions sont $x = -z$ et $y = 0$.

Posons le vecteur : $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0V_2.$$

Ainsi 0 est une valeur propre de A de vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 297617

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématique ESC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$3-e) A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 4 est une valeur propre de A de vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e). AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 12 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 12 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$f) PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I$$

Puisque $PQ = 8I \Leftrightarrow \frac{1}{8} PQ = I \Leftrightarrow P \left(\frac{1}{8} Q \right) = I$

Selon la formule de l'inversibilité $PP^{-1} = I$, ici $P^{-1} = \frac{1}{8} Q$

et donc P est inversible.

g) Soit $AP = PD$ selon 3-e).

Alors $\Leftrightarrow AP \times P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$.

Ainsi, A est composée d'une matrice diagonale D et.

d'une matrice de passage P et de son inverse $\frac{1}{8}D$.

Donc A est bien diagonalisable

Prouvons alors par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$.

* Initialisation : pour $n = 0$.

$$A^0 = I$$

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I \quad \left| \begin{array}{l} \text{Donc } A^0 = PD^0P^{-1}. \end{array} \right.$$

* Montrons que : pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que : $A^n = PD^nP^{-1}$

Montrons que : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Or $A^{n+1} = A^n \times A$ et par hypothèse de récurrence,
 $\Rightarrow A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times A$.

Or selon 3. g) $A = PDP^{-1}$.

$$\text{Donc } A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}.$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^nIDP^{-1}.$$

$$\Rightarrow A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Donc, par principe de récurrence, pour tout n non nul :

$$\underline{A^n = PD^nP^{-1}}.$$

Ainsi, si $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 4^n \\ -3(-4)^n & 0 & 4^n \\ (-4)^n & 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (-4)^n + 3(4)^n & -2(-4)^n + 2(4)^n & (-4)^n + 3(4)^n \\ -3(-4)^n + 3(4)^n & 6(-4)^n + 2(4)^n & -3(-4)^n + 3(4)^n \\ (-4)^n + 3(4)^n & -2(-4)^n + 2(4)^n & (-4)^n + 3(4)^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } f'' = \begin{pmatrix} \frac{t^4 + 3(4)^2}{8} & \frac{-2(-4)^n + 2(4)^2}{8} & \frac{(-4)^n + 3(4)^2}{8} \\ \frac{-3(-4)^2 + 2(4)^2}{8} & \frac{6(-4)^n + 2(4)^2}{8} & \frac{-3(-4)^n + 2(4)^2}{8} \\ \frac{(-4)^2 + 3(4)^2}{8} & \frac{-2(-4)^n + 2(4)^2}{8} & \frac{(-4)^2 + 3(4)^2}{8} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1- a) pour $t \in [0; a]$, puisque $t \geq 0$ et $a^2 > a > 0$, $\frac{t}{a^2} \geq 0$ et donc $f(t) \geq 0$ sur cet intervalle.

pour $t \in]a; 2a]$, puisque $t \leq 2a \Leftrightarrow 2a - t \leq 0$ mais aussi $a^2 > a > 0$. Donc $f(t) \geq 0$ sur cet intervalle.

pour $t < 0$ ou $t > 2a$, $f(t) = 0$

Donc pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

$$\lim_{t \rightarrow a^-} \frac{t}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{2a - t}{a^2} = \frac{2a - a}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 2a^-} \frac{2a - t}{a^2} = \frac{2a - 2a}{a^2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 2a^+} f(t) = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{a^2} = 0.$$

Tous les résultats étant différents, f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

$$3 \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{2a}^{\infty} f(t) dt = 0 \text{ car } f \text{ est nulle pour } t < 0 \text{ et } t > 2a$$

$$\text{pour } t \in [0; a], \int_0^a \frac{t}{a^2} dt = \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{a^2} \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{pour } t \in]a; 2a], \int_a^{2a} \frac{2a - t}{a^2} dt &= \frac{1}{a^2} \left[2at - \frac{t^2}{2} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{a^2} \left((2a)^2 - \frac{(2a)^2}{2} - 2a^2 + \frac{a^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_a^{2a} f(t) dt &= \frac{1}{a^2} \left((2a)^2 - \frac{(2a)^2}{2} - 2a^2 + \frac{a^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(2a^2 - \frac{3a^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{4a^2 - 3a^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{a^2} \times \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

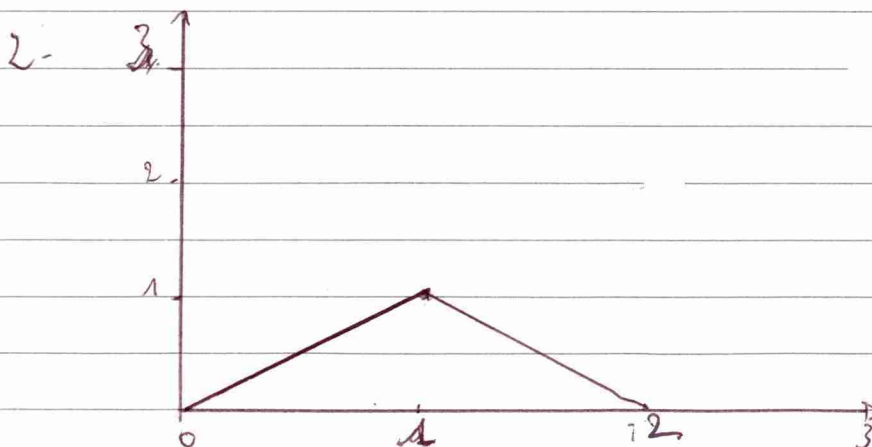
Donc $\int_a^{2a} f(t) dt = \frac{1}{2}$.

Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt + \int_a^{2a} f(t) dt + \int_{2a}^{+\infty} f(t) dt \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= 1.
 \end{aligned}$$

Donc l'intégrale converge et vaut 1.

Ici ce fait 1 et bien vu



Copie anonyme - n°anonymat : 297617

Emplacement QR Code	Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématique ES/L.		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

3-b) (*) pour $t \in [0; a]$, puisque $t \geq 0$ et $a^2 \geq a > 0$, $\frac{t}{a^2} \geq 0$ et donc $f(t) \geq 0$ sur cet intervalle.

+ pour $t \in [a; 2a]$, puisque $t \leq 2a \Rightarrow 2a - t \leq 0$ mais aussi $a^2 \geq a \geq 0$. Donc $f(t) \geq 0$ sur cet intervalle.

+ pour $t < 0$ ou $t > 2a$, $f(t) = 0$

$\rightarrow$ Donc pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

(f) f est continue par morceaux selon 1.

(*) $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = \int_{2a}^{+\infty} f(t) dt = 0$ car f est nulle pour $t < 0$ et $t \geq 2a$.

Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{2a} f(t) dt + \int_{2a}^{+\infty} f(t) dt \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'intégrale converge et vaut 1.

Donc f est bien une densité de probabilité.

9 /

$$2a) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt.$$

$$E(X) = \int_0^a t \times \frac{t}{a^2} dt + \int_a^{2a} t \times \left(\frac{2a-t}{a^2} \right) dt \text{ car } f \text{ est nulle pour } t < 0 \text{ et } t > 2a.$$

$$\text{Ainsi } E(X) = \frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{t^2}{1} dt + \frac{1}{a^2} \int_a^{2a} (2at - t^2) dt.$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^a + \frac{1}{a^2} \left[\frac{2a t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_a^{2a}$$

$$= \frac{1}{a^2} \times \frac{a^3}{3} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{(2a)^3}{2} - \frac{(2a)^3}{3} - \frac{2a^3}{2} + \frac{a^3}{3} \right)$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{8a^3 - 2a^3}{2} + \left(-\frac{8a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{6a^3}{2} - \frac{7a^3}{3} \right)$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{18a^3 - 14a^3}{6} \right)$$

$$= \frac{a}{3} + \left(\frac{1}{a^2} \times \frac{4a^3}{6} \right)$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{2a}{3}$$

Donc $E(X) = a$, l'espérance existe.

$$4-b). \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt.$$

$$\text{De même, } E(X^2) = \int_0^a \frac{t^3}{a^2} dt + \int_a^{2a} \frac{2at^2 - t^3}{a^2} dt.$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^a + \frac{1}{a^2} \left[\frac{2a t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_a^{2a}$$

$$= \frac{1}{a^2} \times \frac{a^4}{4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{(2a)^4}{3} - \frac{(2a)^4}{4} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4} \right)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{16a^4 - 2a^4}{3} + \left(\frac{16a^4 + a^4}{4} \right) \right)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{14a^4}{3} - \frac{15a^4}{4} \right)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{56a^4 - 45a^4}{12} \right)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{9a^4}{12} \right)$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{12}$$

$$= \frac{3a^2 + 9a^2}{12} = \frac{12a^2}{12}$$

Donc $E(X^2) = a^2$ | Faux mais je l'admetts.
La variance existe

c). Selon Koenig Huygens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

La variance existe car $E(X^4)$ converge et vaut $\frac{7a^2}{6}$.

$$\text{Donc } V(X) = \frac{7a^2}{6} - a^2$$

$$= \frac{7a^2 - 6a^2}{6}$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{a^2}{6}$$

$$5 - a) E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^n E(X_k) = n \times E(X)$$

$$\text{Donc } E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \times n E(X) = E(X) = \frac{1}{n} \times n E(X)$$

$$E(\bar{X}_n) = E(X) = a$$

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \text{ car les V.A sont}$$

mutuellement indépendantes.

$$\text{Donc } V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \times n V(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\frac{a^2}{6}}{n} = \frac{a^2}{6n}$$

b) La formule du biais se définit par: $b_f(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n) - a$.

$$\text{De ce fait } b(\bar{X}_n) = E(x) - a = a - a = 0$$

Donc $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de a .

Puisque $b(\bar{X}_n) = 0$ alors le risque quadratique, dont la formule est $V(\bar{X}_n) - b(\bar{X}_n)$ est égale à la variance.

$$\text{De ce fait, } r(\bar{X}_n) = \frac{7a^2}{6}$$

b - d) L'inégalité de Bienaymé Tchebichev se définit par:

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Ici } E(\bar{X}_n) = E(x) = a. \text{ Donc,}$$

$$P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{7a^2}{6}}{\varepsilon^2} = \frac{7a^2}{6\varepsilon^2}$$

$$\text{Donc } P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{a^2}{6n\varepsilon^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Puisque } P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) &= P(\varepsilon \leq \bar{X}_n - a \leq -\varepsilon) \\ &= P(-\bar{X}_n + \varepsilon \leq -a \leq -\bar{X}_n - \varepsilon) \\ &= P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq a \leq +\bar{X}_n + \varepsilon) \text{ par} \end{aligned}$$

inversion des signes.

$$\text{Or } P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon)$$

$$\text{Mais } P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) = P(1 - P(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon))$$

$$\text{De ce fait } 1 - P(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{6n\varepsilon^2} \text{ selon (a) et donc}$$

$$P(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 297617

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématique ES (B)

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Mais aussi $P(\bar{X}_n - a \geq \varepsilon) \geq P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) = 1 - P(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon)$.
~~Mais $P(|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon)$.~~

Or $P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - a| \leq -\varepsilon)$.

Mais aussi $P(|\bar{X}_n - a| \leq -\varepsilon) \geq P(|\bar{X}_n - a| < -\varepsilon) \geq 1 - P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon)$

Or selon inégalité Tchebitchéve,

c).

$$1 - P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

Et puisque $P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq a \leq \bar{X}_n + \varepsilon)$ démontré précédemment,

$$1 - P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq a \leq \bar{X}_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$

c) Cet intervalle se démontre par :

$$\bar{X}_{1000} - \frac{1}{\sqrt{600}} \leq a \leq \bar{X}_{1000} + \frac{1}{\sqrt{600}}$$

A ce fait, $P(\bar{X}_{1000} - \frac{1}{\sqrt{600}} \leq a \leq \bar{X}_{1000} + \frac{1}{\sqrt{600}})$.

$$P(|\bar{X}_{1000} - a| \geq \frac{1}{\sqrt{600}}) \geq 1 - \frac{1}{6n \times (\frac{1}{\sqrt{600}})^2}$$

$$\text{Or } 1 - \frac{1}{6n \times (\frac{1}{\sqrt{600}})^2} = 1 - \frac{1}{6n \times 10\sqrt{6}}$$

Donc l'intervalle de confiance est : $1 - \frac{1}{6n \times 10\sqrt{6}}$.

Le niveau de confiance est plutôt faible. élimé

Exercice 3.

1-a) Cette probabilité est égale à $\frac{1}{5}$ car on a 20% de chance de tirer une balle rouge et qui porte le numéro 1.

b) Il n'y a que les ~~balles rouges~~ certaines balles rouges qui portent le numéro 1 et elles composent 20% des. balls. Donc la probabilité de tirer une balle numérotée 2 est: $1 - P(\text{Balle rouge et 1})$
 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$

c) Cette probabilité s'exprime par la probabilité conditionnelle qui est: $P(\text{balle numérotée 2} | \text{balle rouge})$.

Or cette probabilité s'exprime par: $\frac{P(\text{balle numérotée 2 et rouge})}{P(\text{balle numérotée 2})}$

Ne ce pas $P(\text{Balle 2}) = \frac{P(\text{balle 2} \cap R)}{P(R)}$

~~$P(\text{Balle 2}) = 0,1 \times 0,8$~~

~~$P(\text{Balle 2}) = \frac{1/10}{4/5} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$~~

Ainsi $P(R) = 0,2 + 0,08 = 0,28$

par la formule de la probabilité totale.

2-a) $G(\Omega) = [-1, 1, 2]$

$P(G=1) = \frac{1}{5}$

$P(G=2) = 0,08$

~~$P(G=-1) = 1 - \frac{1}{5} - 0,08 = 1 - 0,2 - 0,08 = 1 - 0,28 = 0,72$~~
 ~~$1 - 0,2 - 0,08 =$~~

Donc la loi est

x	-1	1	2
$P(G=x)$	0,52	0,2	0,28

$$\begin{aligned}
 5) \quad E(G) &= -1 \times 0,52 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,28 \\
 &= -0,52 + 0,2 + 0,56 \\
 &= 0,2 + 0,04 \\
 &= 0,24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(G^2) &= 0,52 + 0,2 + 4 \times 0,28 \\
 &= 0,52 + 0,2 + 1,12 \\
 &= 1,84
 \end{aligned}$$

Selon Kœnig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Donc: $V(X) = 1,84 - (0,24)^2 = 1,84 - 0,0576 = 1,7824$

3-a) Il y a plusieurs expériences de Bernoulli de paramètre "avoir une balle rouge" par n de succès.

a) Toutes les V_n , R_n , V_n , V_n et D_n suivent la loi binomiale car elles comptent tous le nombre de succès qui le var pas le même.

Reprenons: $P(G=-1) = 1 - 0,2 - 0,28 = 1 - 0,48 = 0,52$.

Donc la loi de G est:

x	-1	1	2
$P(G=x)$	0,62	0,2	0,18

$$5) \quad E(G) = -0,62 + 0,2 + 0,36 = -0,42 + 0,36 = -0,06$$

$$\begin{aligned}
 V(G) &= E(G^2) - (E(G))^2 \text{ selon Kœnig-Huygens.} \\
 &= (0,62 + 0,2 + 0,72) - (-0,06)^2 \\
 &= (0,82 + 0,72) - 0,0036 \\
 &= 1,54 - 0,0036 = 1,5364
 \end{aligned}$$

3-a) Toutes les 4, suivent la loi binomiale jusqu'à compter le nombre de succès mais les paramètres sont différents.

* pour R_n : ~~$P(R_n = k)$~~ la probabilité du succès vaut $\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{8+8}{40} = \frac{16}{40}$ ou 0,4 selon la c).

Donc $E(R_n) = \frac{16n}{40} = 0,4n$

* pour V_m : La probabilité du succès vaut: $0,8 \times 0,9 = 0,72$.

Donc $E(V_m) = 0,72m$.

* pour U_n : La probabilité du succès vaut: ~~$0,4 \times 0,8$~~ ~~$0,2$~~ $0,2$.

et $E(U_n) = 0,2n$.

* pour D_m : La probabilité du succès vaut: 0,8.

$E(D_m) = 0,8m$.

b). $R_n + V_m = n$ ou le nombre de boules total.

~~$\text{Cov}(R_n, V_m) \neq 0$~~ . Les deux v.a. ^{ne pas} ~~ne sont pas~~ indépendantes.

~~$V(R_n + V_m) = V(R_n + V_m)$~~

~~$\text{Cov}(R_n, V_m) = E(R_n V_m)$~~

La formule de la variance est:

$V(R_n + V_m) = V(R_n) + V(V_m) + 2\text{Cov}(R_n, V_m)$.

~~Or comme R_n et V_m sont indépendantes.~~

$V(n) = V(R_n) + V(V_m) + 2\text{Cov}(R_n, V_m)$.

$0 = \frac{V(R_n)}{2} - \frac{V(V_m)}{2} = \text{Cov}(R_n, V_m)$.

$- 0,28m(0,72) - 0,016m = \text{Cov}(R_n, V_m)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 297617

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques ESP		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

3-c). $U_m + D_m = n$ ou nombre de boules totales, car soit les boules sont numérotées 1, soit elles sont numérotées 2, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, de ce fait.

Puisque $U_m + D_m = n$, alors $U_m = D_m - n$.

$$\text{Donc } \text{Cov}(D_m, D_m - n) = -\text{Cov}(D_m, n) + \underbrace{\text{Cov}(D_m, n)}_0$$

$$\text{Cov}(D_m, U_m) = -V(D_m) = 0,8m \times 0,2$$

$$\text{Cov}(D_m, U_m) = -0,16m$$

$$\text{Donc } \text{Cov}(D_m, U_m) = -0,16m$$

4-a) Puisque on gagne 1 euro en tirant la boule 1^{re}, donc il y a $U_m \times 1 = U_m$
 De même on gagne 2 euro en tirant la boule 2 et on gagne, donc on a $U_m \times 2 = 2U_m$.
 Mais si on ne tire ni boule rouge et 1, ni boule rouge et verte², alors.

$$\begin{aligned}
 b) \quad E(G_m) &= E(U_m) + E(2D_m) - E(3V_m) \\
 &= 0,2m + 2 \times 0,8m - 3E(V_m) \\
 &= 0,36m - 3 \times 0,12 = 1,86m
 \end{aligned}$$

Exercice 4

1- Initialisation : pour $n=0$.

$$\begin{array}{l} a_0 = 1 > 0 \\ b_0 = 2 > 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Donc } a_0 \text{ et } b_0 \text{ sont strictement positifs.} \end{array} \right.$$

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que : $a_n > 0$ et $b_n > 0$

Montrons que : $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$.

Or $a_{n+1} > 0$

$\Leftrightarrow a_n + b_n > 0$ par hypothèse de récurrence

$$\Leftrightarrow \frac{a_n + b_n}{2} > 0$$

Et donc $\Leftrightarrow a_{n+1} > 0$.

Mais aussi $b_n > 0$

Comme $\Leftrightarrow a_{n+1} > 0$ comme on l'a montré précédemment,

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1} + b_n}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} > 0.$$

Pour conclure, par principe de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,
 $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

2- $a = (a+b)/2$

$c = a$

$b = \frac{a+b}{2}$ (surtout $(c+b)$).

3- $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\text{et } b_1 = \sqrt{a_1 \times b_0} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 4a) \quad b_{n+1} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1} b_n} - \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) \\ &= \frac{2 \sqrt{a_{n+1} b_n} - (a_n + b_n)}{2} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} \times b_n} - (a_n + b_n)}{2} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{a_n b_n + b_n^2}{2}} - (a_n + b_n)}{2}. \end{aligned}$$

4-b). Initialisation: pour $n=0$
 $a_0 = 1 < 2 = b_0$ | Vrai pour $n=0$

Hérédité: pour $n \in \mathbb{N}$.
 Supposons que: $a_n < b_n$.
 Montrons que: $a_{n+1} < b_{n+1}$ ou $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$.

$$\text{Or selon 4a) } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n} (b_n - a_n)}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})}$$

Mais comme $\sqrt{a_n} > 0$ et $2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}) > 0$ car les racines sont positives, mais avec l'hypothèse de récurrence, $b_n - a_n > 0$ car $b_n > a_n$.

Donc $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > a_{n+1}$

Pour conclure, d'après le principe de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,
 ~~$b_{n+1} - a_{n+1} > 0$~~ , $b_n > a_n$

$$4-c). a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{a_n + b_n - 2a_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Or comme $b_n > a_n$ selon 4b), alors $b_n - a_n > 0$
 et donc a_n est strictement croissante

$$4-d) \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = \frac{(\sqrt{a_n b_n})^2}{a_{n+1}} = \frac{a_n b_n}{a_{n+1}} = b_n$$

$$\text{Donc } b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$$

$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n$. Or comme b_n est composé d'une de b_{n+1}^2 et a_{n+1} , or $b_{n+1}^2 > \sqrt{b_n}$ et $a_{n+1} > \sqrt{a_n}$. Donc, selon la réponse précédente. Donc

$b_{n+1} - b_n < 0$, et elle est strictement
décroissante

5-a) pour $n=0$, comme b_n est décroissante,

$$\cancel{b_n \leq b_0 = 2.}$$

$$\cancel{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{2} + \sqrt{a_n}}$$

$$\cancel{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}$$

~~comme b_n est décroissante et positive 0.~~

$$\cancel{\sqrt{b_{n+1}} > \sqrt{a_n} \quad 0}$$

$$\cancel{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} > \sqrt{b_0} + \sqrt{a_1}}$$

$$\cancel{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}) > 2 \times \sqrt{2}.}$$

$$\cancel{\frac{1}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}}$$

Comme b_n est positif :

$$\sqrt{b_n} > 0$$

$$\sqrt{b_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}} > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}) > 2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\frac{1}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} < \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} \text{ par inversion des signes.}$$

$$\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n) < \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} (b_n - a_n) < \frac{1}{2} (b_n - a_n)$$

$$\text{Donc } b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2} (b_n - a_n)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 297617

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 285.

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématique ECT

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5-a) puisque $b_n - a_n > 0$, et $b_n - a_n > 0$ selon 4-b)
alors $\frac{1}{2}(b_n - a_n) > 0$ en 1 premier temps.
et $(b_n - a_n) > 0$.

Ensuite,

5-b). b_n est décroissante : $b_n < b_0$. Or comme $a_n < b_n$ alors.
 $a_n < b_n < b_0$ et donc $a_n < b_0$.

Mais aussi a_n est croissante, donc $a_n > a_0$ et de
ce fait $b_n > a_n > 0$ et donc $b_n > b_0$

5-c). Comme $a_n < b_0$, et $b_0 = 2$, alors a_n converge
par comparaison.

Mais aussi comme $b_n - a_n < \frac{1}{2^n}$ selon 5-.

Alors $b_n < \frac{1}{2^n} + a_n$ or comme a_n

converge et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ alors par comparai

-son b_n converge aussi.

/

Et elles convergent vers une limite commune, comme $a_n \leq b_n - \frac{1}{2^n}$
et que $b_n \leq \frac{1}{2^n} - a_n$.

d) On sait de ce fait que : $0 < a_0 < a_n < b_0$ mais
aussi, que $b_n > a_0 > 0$ et de ce fait, ~~a_n~~

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ mais aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$.

~~Par le corollaire du Th.~~ Et que $a_n > b_n$, alors
par le théorème de la bijection, il y a une valeur l
pour laquelle $b_n \geq l \geq a_n$.

6- $l = \frac{3}{\pi}$.

7- a) while $b - a \leq 10^{-3}$.
- $a = (a+b)/2$
- $b = \text{sqrt}(a*b)$.
 $n = 241$.

b)- la valeur affichée est la valeur ~~de~~ de n pour laquelle.
 $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$.

8a) les valeurs approchées de l sont b_5 et $b_5 - a_5$

-b) Puisque $\frac{1}{2^n}$ est la valeur supérieure à $b_n - a_n$ c'est à dire que

la limite de $b_n - a_n$ est forcément supérieure à $\frac{1}{2^n}$ ~~et donc~~

~~pe~~ et que si $b_n - a_n \leq 10^{-3}$ alors $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$ et cette

valeur permet de savoir si la valeur l est trop éloigné de

estimations par dichotomie.

