

Copie anonyme - n°anonymat : 137679

Maths S
137679
V7-00013



Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S - EN LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2 -

Partie A -

$$1 - c_0 = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = 0! = \boxed{1}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \times 2 = \boxed{1}$$

$$c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times 6 = \boxed{2}$$

2- [P] Soit la proposition P_n : " $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ "

~~[I] - $c_0 = 1$ et $\binom{0}{0} - \binom{0}{1} = 1 - 0 = 1$~~

~~donc l'initialisation est vraie.~~

~~[H] - Soit la proposition P_n vraie à un certain rang n .~~

~~$c_{n+2} =$~~

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{1}{n+2} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+2} \times \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}$$

$$= \frac{1}{n+2} \times \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$\text{et } \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+2} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} - \frac{(2n)!}{(n+2)!(2n-n-2)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{2n!}{(n+2)!(n-2)!}$$

$$= \frac{(2n)!(n+2) - (2n)!n}{(n+2)!n!}$$

$$= \frac{(2n)!(n+2-n)}{(n+2)!n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+2)n!n!} = \frac{1}{n+2} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{1}{n+2} \binom{2n}{n} = c_n$$

b. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n = 0$

$$\Leftrightarrow \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow n! = (n-2)! \quad \text{donc } n \text{ vaut } 1$$

$$\text{or } 1 = \binom{0}{0} \neq \binom{4}{2} = 6$$

donc ce n'est jamais le cas,
par l'absurde on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \neq 0$

$$\begin{aligned}
 3 - \quad C_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)+1} \binom{2(n+1)}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n = \frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+2)} \binom{2n}{n} \\
 &= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
 &= \frac{(2n+2)(2n+1)!}{n+2 (n+1)^2 n! n!} \\
 &= \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+2)(n+1)^2 n! n!} \\
 &= \frac{2(2n+1)!}{(n+2)(n+1)n! n!} \\
 &= \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n
 \end{aligned}$$

4 -

```

function c = catalan(m)
    c = 1 // on initialise à c_0
    for k = 1 : m
        c = 2 * (2 * m + 1) / (n + 2) * c
    end
endfunction

```

$$\begin{aligned}
 5 - a - \quad C_{n+1} - C_n &= \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n - C_n \\
 &= C_n \left(\frac{2(2n+1) - n+2}{n+2} \right) \\
 &= C_n \left(\frac{4n+2 - n+2}{n+2} \right) \\
 &= C_n \left(\frac{3n}{n+2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

et $\frac{2(2n+1)}{n+2} \geq 0$ donc le signe de C_{n+1} dépend

de celui de c_n , or comme $c_0 = 1 \geq 0$, par itération $\forall n, c_n \geq 0$
et ainsi, $c_{n+1} - c_n \geq 0$

$$\text{d'où } c_{n+1} \geq c_n$$

(c_n) est croissante.

b- Supposons que c_n converge, comme elle croît elle est donc majorée d'après le théorème de la limite monotone.

$$6- a \quad \forall k \in \mathbb{N}, \frac{c_{2k+2}}{c_k} = \frac{2(2k+2)}{(2k)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 137679

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S-ER LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

G-b-

Supposons

$$4 \left(\frac{k}{k+2} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+2}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+2}{k+2} \right)^{3/2}$$

par produit on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1} 4 \left(\frac{k}{k+2} \right)^{3/2} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+2}}{c_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} 4 \left(\frac{k+2}{k+2} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+2} \right)^{3/2} \leq \frac{c_n}{c_1} \leq 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+2}{k+2} \right)^{3/2} \quad \text{par télescope}$$

$$\text{et } \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+2} \right)^{3/2} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \right)^{3/2} = \left(\frac{1}{n} \right)^{3/2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\text{et } \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+2}{k+2} \right)^{3/2} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{n+2} \right)^{3/2} = \left(\frac{2}{n+2} \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2} \times 2}{\sqrt{n+2} \times (n+2)}$$

par télescopes.

on a alors :

$$\frac{4^n}{4} \times \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq 4^{n-1} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+2}}$$

$$= \frac{4^n}{\sqrt{2}}$$

$$\text{et } \prod_{k=0}^{n-2} c_k = \frac{c_{n-1}}{c_0} = c_{n-1} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-2} 4 \left(\frac{k+2}{k+2} \right)^{3/2} = \left(\frac{n}{n} \right)^{3/2} \times 4^n = \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

$$7-a- \quad T_n = \sum_{k=0}^m k c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^m k \times \frac{1}{(k+2)} \binom{2k}{k} \times \frac{1}{m-k+2} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

$$\text{et } \frac{m}{2} S_n = \frac{m}{2} \sum_{k=0}^m c_k c_{m-k}$$

$$= \frac{m}{2} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+2} \binom{2k}{k} \times \frac{1}{m-k+2} \binom{2m-2k}{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{(2k)!}{(k+2)k!(k!)} \times \frac{m}{2} \times \frac{(2(n-k))!}{(m-k+2)(m-k)!(m-k)!}$$

2

$$T_n = \sum_{k=0}^m k c_k c_{n-k}$$

$$\text{soit } i = m - k \\ \text{d'où } k = m - i$$

$$= \sum_{k=0}^m (m-i) c_{m-i} c_i$$

$$= m \sum_{i=0}^n c_{m-i} c_i - \sum_{i=0}^m i c_{n-i} c_i$$

$$T_n = m S_n - T_n$$

$$\Leftrightarrow 2 T_n = m S_n$$

$$\Leftrightarrow T_n = \frac{m}{2} S_n$$

$$b- \quad T_{n+2} + S_{n+2} = \frac{(n+2)}{2} S_{n+2} + S_{n+2}$$

$$= S_{n+2} \left(\frac{n+2}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{n+3}{2} S_{n+2}$$

$$= \frac{n+3}{2} \sum_{k=0}^{n+2} c_k c_{n+2-k}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}c_{n+2} + 4T_n + 2S_n &= \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n + 4\left(\frac{n}{2} S_n\right) + 2S_n \\&= \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n + (2n+2)S_n \\&= \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n + (2n+2) \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\end{aligned}$$

c- PL Soit la proposition P_n : " $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+2}$ "
II - P_0 : $S_0 = \sum_{k=0}^0 c_k c_{0-k} = c_0 \times c_0 = 1$

$$\text{et } c_{0+2} = 1$$

donc P_0 est vraie.

III - Soit la proposition P_n vraie
en admettant la $\forall b$ vraie:

$$\frac{n+3}{2} S_{n+2} = c_{n+2} + 4T_n + 2S_n$$

$$\Leftrightarrow S_{n+2} = \frac{2}{n+3} (c_{n+2} + 4\left(\frac{n}{2} S_n\right) + 2S_n) \quad \text{or } S_n = c_{n+2} \text{ par hypothèse}$$

$$= \frac{2}{n+3} (c_{n+2} + 2n c_{n+2} + 2c_{n+2})$$

$$= \frac{2(2n+3)}{n+3} c_{n+2} = c_{n+2} \text{ d'après la 3}$$

donc P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$, par le principe de récurrence.

$$8-a- \sum_{n=0}^N c_n x^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} \binom{2n}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+2} \frac{(2n)!}{n!n!} x^n$$

$$b- f_m'(x) = \left(\sum_{k=0}^{2N} c_k x^k \right) \left(\sum_{i=0}^{2N} g_i x^i \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{2N} \left(c_{n+1} x^n \right) \quad \text{avec } i = n+2$$

$$= \sum_{n=1}^{2N+1} c_i x^{i-1} \quad n = i-1$$

et en passant à la limite on a bien

$$f^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$$

$$c- g^2(x) = 2^2 x^2 f^2(x)$$

$$= 4 x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n+1}$$

$$\text{et } 2g(x) - 4x = 2 \times 2x f(x) - 4x$$

$$= 4x f(x) - 4x$$

$$= 4x \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - 4x$$

$$= 4 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1} - x \right)$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n+1} = g^2(x) \quad \text{car } c_0 x^0 = 1$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S-EN LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B -

9-a- $t \mapsto \cos^2(t)$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et donc intégrable.

Soit $u(t) = \cos(t)$

$u'(t) = -\sin(t)$

$v(t) = \cos(t)$

$v(t) = \sin(t)$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ donc on peut intégrer par parties.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \left[\cos(t) \sin(t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) \, dt$$

$$= 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) \, dt$$

$$\cos^2(t) = \frac{\cos(2t) + 1}{2} \quad \text{d'où } \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right)' = \frac{\cos(2t)}{2}$$

$$\text{ainsi } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\sin \pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

b- Soit $x = 2 \sin(t)$ changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant.

$$x = 2 \sin(t) \quad \text{d'où} \quad dx = 2 \cos(t) \, dt \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{et} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{donc} \quad 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

$$\text{et} \quad \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - 2\sin^2(t)} \times 2 \cos(t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 - 2\sin^2(t)} \times \cos(t) dt$$

$$\text{et } \sqrt{4 - 2\sin^2(t)} = \sqrt{4 - 2(1 - \cos^2(t))}$$

$$= \sqrt{4 - 2 + 2\cos^2(t)}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos^2(t)}$$

- 10 -
- φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$
 - φ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 2 et -2
 - il faudrait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-2}^2 \varphi(x) dx = 1$

11-a - $\forall m \in \mathbb{N}, \quad E(x^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \varphi(x) dx$

$$= \int_{-2}^2 x^m \varphi(x) dx \text{ qui est une intégrale}$$

! définie donc le moment d'ordre m existe.

$$E(x^{2n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \varphi(x) dx \text{ par le théorème de Goursat}$$

$$= \int_{-2}^2 x^{2n+1} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 \frac{x^{2n+1}}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$b-i- \quad u_0 = E(x^0) = E(1) = \underline{1}$$

$$u_{n+2} = E(x^{2n+2}) = E(x^{2n+2})$$

$$= \int_{-2}^2 x^{2n+2} \varphi(x) dx$$

$$\text{if } a(x) = x \\ b(x) = \varphi(x)$$

$$iii- \quad u_{n+2} = \frac{2n+2 \times 4u_n}{3} - \frac{2n+2}{3} u_{n+2}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} \left(\frac{3+2n+2}{3} \right) = \frac{2n+2 \times 4u_n}{3}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 137679

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S ER-LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C -

12-a. Fonction $T = \text{simule}(p)$

$p_i = 0$ // compteur des piles

$j_a = 0$

while $p_i > j_i$ & $p_i > 0$ & $p_i + j_a < 1014$

if $\text{rand}() < p$ then

$p_i = p_i + 1$ else

$j_a = j_a + 1$

end

end

endfunction.

b- le script simule 1000 fois l'expérience avec 3 p différents : $1/4$, $2/4$ et $3/4$ et divise par 1000 pour avoir une idée de l'espérance.

On voit même, au vu des résultats que l'espérance n'existe pas car on obtient des nombres totalement différents quand $p = \frac{1}{2}$, etc. mais existe sinon.

13- il faut, pour que T se réalise qu'il y ait au moins une pile que de j_a , donc nécessairement un nombre pair de lancers, : $\underline{P(T = 2n+1) = 0}$

14- a - si D_n commencerait par un face alors le nombre de face serait supérieur au nombre de pile dès le début, c'est impossible,

De même, on doit finir par pile car sinon avant il y aurait un face au moins que de pile.

(E.N) contient alors l'ensemble D_n plus les situations d'égalité, ainsi en $n+2$, D_n contient. En cas les égalités deviennent strictes,

on a donc bien $d_{n+2} = e_n$, soit $\underline{d_n = e_{n-1}}$.

b - i - [P] Soit la proposition de récurrence $P_n: " \forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k} "$

[I] - $e_0 = 1$ et $d_0 = 1$ et $e_1 = 1$ | et $d_0 e_1 = 1$
 ↳ par définition car $D_1 = \{PF\} = E_1$ | donc P_1 vraie

[H] - Soit P_n vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$

$$e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}$$

$$e_{n+2} = d_{n+2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii- } e_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+2} d_k e_{(n+1)-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+2} d_k e_{n+2-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+2} e_{k-1} e_{n+2-k} \quad \text{soit } j = k-2 \\
 &\quad \quad \quad k = j+1 \\
 &= \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j-1+1} \\
 &= \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j}
 \end{aligned}$$

$$\text{iii- } b_n, e_n = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k} \quad \text{or } e_0 = c_0$$

$$\text{donc par itération } b_n, e_n = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}$$

et donc d'après la question I, c $e_n = c_n$

$$\text{c- } P(T = 2n) = P(T = 2n \cap D_n) + P(T = 2n \cap \bar{D}_n)$$

d'après la formule des probabilités totales et car $\{D_n, \bar{D}_n\}$ forme un système complet d'événements.

$$\begin{aligned}
 &= P(T = 2n \cap D_n) \quad \text{car } P(T = 2n \cap \bar{D}_n) = P_{\bar{D}_n}(T = 2n) \\
 &= \frac{P(T = 2n) \times P(D_n)}{P(D_n)} \quad \times P(\bar{D}_n) = 0
 \end{aligned}$$

car T est déjà réalisé on

$$\text{et } P(D_n) = d_n \leq e_{n-1} = c_{n-1}$$

le sera plus tard mais se peut
pas l'être maintenant.

$$\text{et } P_{D_n}(T = 2n) = (P(F_{2n}) \times P(D_{2n}))^n = p^n (1-p)^n$$

$$\text{donc } \underline{P(T = 2n) = c_{n-1} p^n (1-p)^n}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 137679

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 205

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S-ER LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 -

1-a- A comporte une ligne formée de 0, elle n'est donc pas inversible.

Soit c_i la i ème colonne de la matrice.

c_1 et c_2 sont non colinéaires et $c_3 = c_2 - c_1$

On a $\text{rg}(A) = 2$

$$b- A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

c- $P(x) = x^3 - x^2 + x$ est polynôme annulateur de A

$$\text{et } P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x + 1 = 0$$

racines de $x^2 - x + 2$:

$\Delta = 1 - 4 = -3$ donc il n'y a pas d'autre racine de P que 0
 donc $\text{Spec}(A) = \{0\}$

or le sous-espace propre associé est $\text{Ker}(A)$

$$\text{et dim Ker } A = \dim M_3(\mathbb{R}) - \text{rg}(A) \quad (\text{Théorème du rang}) \\ = 3 - 2 = 1$$

donc 0 est bien valeur propre $\text{sp}(A) = \{0\}$

mais la somme des dimensions de ses sous-espaces propres
 est inférieure à 3, donc A n'est pas diagonalisable.

$$2 - a - b = {}^t A A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(B - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-(\lambda-1)(2-\lambda) \end{pmatrix} \quad l_3 \leftarrow -l_3 - (\lambda-1)l_1$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad l_3 \leftarrow l_2 + l_3$$

$$\alpha = 1 + 1 - (1-\lambda)(2-\lambda) \\ = 2 - (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2) \\ = 3\lambda - \lambda^2$$

λ est valeur propre de $B \Leftrightarrow$

$$3 - \lambda^2 = 0 \text{ ou } 1 - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(3 - \lambda) = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 1$$

$$\text{donc } \underline{Sp(B) = \{0, 3, 1\}}$$

B possède trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}_3(\mathbb{R})$
 B est diagonalisable.

b - i - inverser R grâce aux pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3}/\sqrt{6} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3}/\sqrt{6} & 2\sqrt{2}/\sqrt{6} & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ l_2 \leftarrow l_1 + l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2\sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & \sqrt{6} & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{array} \right) \begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_2 + 2l_1 \\ \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{array} \right) \begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_1 + l_3 \\ \\ \end{array}$$

le résultat est faux

ii- admettons que R soit orthogonale.

$${}^t R B = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/\sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{6} & -\sqrt{2}/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & 6/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/\sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t R B R = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & 6/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/\sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{6} & -\sqrt{2}/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{12}{6} & \frac{-3\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6} & \frac{-3\sqrt{2}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{6} + \frac{6\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est bien diagonale.

Partie B -

$$3 - \langle x, g(y) \rangle = \langle x, {}^t p y \rangle \\ = \underline{{}^t x {}^t p y} =$$

$$\text{ex } \langle f(x), y \rangle = \langle Mx, y \rangle \\ = {}^t (Mx) y \\ = \underline{{}^t x {}^t M y},$$

on a bien l'égalité

$$\langle x, h(x) \rangle = \langle x, g \circ f(x) \rangle \\ = \langle x, {}^t p p x \rangle \\ = {}^t x {}^t p p x \\ = {}^t (p x) p x = \langle p x, p x \rangle = \underline{\|f(x)\|^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 137679

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES S-ET LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} \text{4 - a - } x \in \text{Ker}(h) &\Leftrightarrow h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow g \circ f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{et } \|f(x)\|^2 = \langle x, h(x) \rangle = 0 \text{ car } h(x) = 0$$

$$\text{mais } \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = 0$$

$$\text{donc } f(x) = 0$$

$$\text{ainsi } \underline{x \in \text{Ker}(f)}, \text{ donc } \text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(f)$$

$$\begin{aligned} \text{b - soit } x \in \text{Ker}(f), \quad f(x) &= 0 \\ \text{et } h(x) &= g \circ f(x) = g(0) = 0 \text{ car } g \text{ est une endomorphisme} \\ \text{donc } x &\in \text{Ker}(h) \\ \text{et } \text{Ker}(f) &\subset \text{Ker}(h) \\ \text{par double inclusion, } \underline{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(h)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \dim \text{Ker}(f) &= \dim \text{Ker}(h) \\ \Leftrightarrow \dim M_3(\mathbb{R}) - \text{rg}(f) &= \dim \mathbb{R}^m - \text{rg}(h) \text{ et } \text{rg}(f) = r \\ \Leftrightarrow \underline{r = \text{rg}(h)} &\quad \text{d'après le théorème du rang.} \end{aligned}$$

5-a-

6- P est orthogonale $(\Leftrightarrow P^{-1} = {}^t P \Leftrightarrow P$ est la matrice de passage vers une base orthonormée

7- les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de ${}^t P P$
 or si P est symétrique ${}^t P = P$ donc ${}^t P P = P^2$

$$g \cdot a = h(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$$

$$\Leftrightarrow g \circ f(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$$

$$\Leftrightarrow f(\xi_i) = g^{-1}(\lambda_i \xi_i) \\ = \lambda_i g^{-1}(\xi_i) \neq 0$$

$$\|f(\xi_i)\| = \sqrt{\langle f(\xi_i), f(\xi_i) \rangle} \\ = \sqrt{\lambda_i^2 \langle g^{-1}(\xi_i), g^{-1}(\xi_i) \rangle}$$

b- il s'agit d'une application de la méthode d'orthonormalisation de Schmidt à une famille déjà orthogonale car $\forall i, f(\xi_i) \neq 0$ donc $\langle f(\xi_i), f(\xi_i) \rangle \neq 0$
il s'agit donc juste de normaliser.

11-

Partie C -

12- Π inversible $\Rightarrow \Pi^{-1} = {}^t \Pi_L$

$$\Pi \Pi^+ = Q \Delta {}^t P P$$

13-a- $\Pi \Pi^+ = Q \Delta {}^t P P \text{ diag } \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0 \right) {}^t Q$

$$= Q \underbrace{\Delta P^{-1} P \text{ diag } \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0 \right) {}^t Q}_{\Delta_2}$$

$$= Q \Delta \Delta_2 {}^t Q$$

et $\Delta \Delta_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_n & \\ 0 & & \sigma_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ & 1/\sigma_n & \\ 0 & & 1/\sigma_n & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi \Pi^+ = Q {}^t Q$$