

Maths 2E
960004
E9-00159



Code épreuve : 287

Nombre de pages : 36

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématiques 2E ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I)

1/a) f_z est continue sur $\mathbb{R}$, on note F_z une de ses primitives, on pose $A \leq z$

$$\text{on a } \int_A^x f_z(t) dt = F_z(x) - F_z(A)$$

$$A \rightarrow +\infty = F_z(x) - 0 = F_z(x)$$

$\int_{-\infty}^x f_z(t) dt$ est bien continue sur $\mathbb{R}$

Donc $\Phi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1/b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_z(x) > 0$ donc puisque f_z est la dérivée de Φ , elle est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) \text{ or } P(Z \leq x) \in]0, 1[\text{ comme probabilité}$$

1/c). Φ est continue, strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$ par théorème de la bijection.

1/d). $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_z(t) dt$$

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(t) dt - \int_{-\infty}^x f_z(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(t) dt + \int_x^{-\infty} f_z(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} f_z(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - \Phi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(t) dt - \int_{-\infty}^x f_z(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(t) dt + \int_x^{-\infty} f_z(t) dt \\
 &= \int_x^{+\infty} f_z(t) dt \quad \text{par Chasles.} \\
 &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt
 \end{aligned}$$

on pose $u = -x$ / changement de variable affine.

① $du = -dt$

② $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

③ $\int_{x \rightarrow -\infty}^{+\infty}$

Par changement de variable affine on a

$$\begin{aligned}
 1 - \Phi(x) &= \int_{-x}^{+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
 &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(-x)
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

(il aurait fallu pose $A > x$ dans le changement de variable puis faire tendre $A \rightarrow +\infty \dots$ de nos allé en sens vite).

2a) $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ est une suite de variable aléatoire, de même loi, indépendantes, de même espérance et de même variances. D'après la loi faible des grands nombres

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2b) soit Z_n une suite de variable aléatoire de même loi, de même espérance, de même variances et indépendantes. Alors, par théorème de limite centrale on a

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} Z \quad \text{ou } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

3) a) $X: (\Omega) = \{0, 2, 5, 10\}$

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0P(X_i=0) + 2P(X_i=2) + 5P(X_i=5) + 10P(X_i=10) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{1}{10} \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 = E(X_i) \end{aligned}$$

3b) $E(X_i^2) = 0^2 P(X_i=0) + 2^2 P(X_i=2) + 5^2 P(X_i=5) + 10^2 P(X_i=10)$
 par théorème du transfert

$$\begin{aligned} &= 4P(X_i=2) + 25P(X_i=5) + 100P(X_i=10) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{1}{5} + 100 \cdot \frac{1}{10} \\ &= 2 + 5 + 10 \\ &= 17 = E(X_i^2) \end{aligned}$$

Par König-Huygens, il vient que:

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 17 - 3^2 = 17 - 9 = 8 = V(X_i)$$

3c) i) $U \sim U_c[0, 1]$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

~~$P(f(U)=2)$ Distributions de cas.~~

~~si $U \in [0, \frac{1}{5}]$ alors $f(U)=0$.~~

$$f(U) = \{0, 2, 5, 10\}$$

$$P(f(U)=0) = P(0 \leq U < \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$$

$$P(f(U)=2) = P(\frac{1}{5} \leq U < \frac{7}{10}) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(f(U)=5) = P(\frac{7}{10} \leq U < \frac{9}{10}) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(f(U)=10) = P(\frac{9}{10} \leq U < 1) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Bilan: $f(U)$ suit la même loi que X

3c) ii)

function $x = X()$

$U = \text{rand}()$

if $U < 1/5$ then

$x = 0$

elseif $1/5 \leq U < 7/10$

$x = 2$

elseif $7/10 \leq U < 9/10$

$x = 5$

elseif $9/10 \leq U < 1$

$x = 10$

end

endfunction.

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques 2E ESS EC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$3d). Z_m = \sqrt{m} \left(\frac{\bar{X}_m - \mu}{\sigma} \right)$$

$$\text{Donc } E(S_m) = E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m E(X_i) \text{ par linéarité de l'espérance}$$
$$= 3m$$

$$V(S_m) = V\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes}$$
$$= \sum_{i=1}^m V(X_i) = 8m$$

$$\text{Donc } Z_m = S_m^* = \frac{S_m - E(S_m)}{\sigma(S_m)} = \frac{S_m - 3m}{\sqrt{8m}}$$

$$3e) Z_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$$P(S_{200} \leq 500) = P\left(\frac{S_{200} - 3 \cdot 200}{\sqrt{8 \cdot 200}} \leq \frac{500 - 3 \cdot 200}{\sqrt{8 \cdot 200}}\right)$$
$$= P\left(Z_{200} \leq \frac{500 - 600}{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 200}}\right)$$
$$= P\left(Z_{200} \leq \frac{-100}{2\sqrt{400}}\right) = P\left(Z_{200} \leq \frac{-100}{2 \cdot \sqrt{4} \cdot 100}\right)$$

$$= P\left(Z_{200} \leq \frac{-100}{4\sqrt{100}}\right) = P\left(Z_{200} \leq \frac{-100}{4 \cdot 10}\right)$$

$$= P\left(Z_{200} \leq \frac{-10 \cdot 10}{4 \cdot 10}\right) = P(Z_{200} \leq -2,5) = \Phi(-2,5)$$

puisque pour n suffisamment grand, $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Z$

4/a) Puisque Z_n converge en loi vers $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
 on a par définition de la limite et sachant que
 $\Phi(x_k) = \frac{k}{2N}$
 $\exists n_0$ tel que $n \geq n_0$.

$$\max_{k \in \{0; 2N\}} |P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)| \leq \frac{1}{2N}.$$

4/b)i). $k \in \{1, \dots, 2N\}$ et $x \in \mathbb{R}$
 Soit $n \geq n_0$.

$$x \in]x_{k-1}, x_k[$$

$$\text{Donc } x < x_k.$$

$$\text{Donc } (Z_n \leq x) \subset (Z_n \leq x_k).$$

Par la monotonie de la probabilité on a

$$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$$

ou

$$x \in]x_{k-1}, x_k[$$

$$\text{Donc } x_{k-1} < x$$

Donc $(Z \leq x_{k-1}) \subset (Z \leq x)$ par la monotonie de la proba on a

$$\Phi(x_{k-1}) \leq \Phi(x).$$

$$\Rightarrow \Phi(x_{k-1}) \rightarrow -\Phi(x)$$

Il vient alors que:

$$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$$

$$\Rightarrow P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1})$$

4 b) ii).

$$P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1})$$

par n suffisamment
grand on a:

$$\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})$$

$$= \frac{k}{2N} - \frac{k-1}{2N}$$

$$= \frac{k - k + 1}{2N} = \frac{1}{2N}$$

$$\text{or } \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}.$$

Donc on a bien $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}$

puisque on passe à la limite il est clair que

$$P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1}) \leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})$$

4 b) iii).

Adm. thus $\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{n}$

4c) or suit que, $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\forall n, n_0$

$$\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{n}$$

et $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \frac{1}{n}$.

Ainsi par définition, on a:

$$|P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{n}$$

4d). ~~on peut choisir $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n = \frac{1}{n}$.~~

5a) i) Φ étant continue sur $\mathbb{R}$ on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$$

5a) ii). $|P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

~~Ainsi par~~ → Ainsi on peut écrire

$$|P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| \leq M_n$$

et par théorème d'enclenchement, car $M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| = 0$$

5a) iii) or a bien, d'après ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n) \neq \Phi(x)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques 2E ESJEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$S a) \text{iii) Bilan: } P(Z_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(x)$$

S b)i). $\forall n > 1$.

$$(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \subset (Z_n < x)$$

Par croissance de la probabilité on a :

$$P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \leq P(Z_n < x)$$

$$\text{on } (Z_n < x) \subset P(Z_n \leq x)$$

A nouveau par croissance de la probabilité
 $P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)$

$$\forall n > 1, P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \leq P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)$$

S b)ii). Par théorème d'écrasement, il vient
alors que, puisque $P(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(x)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n < x) = \Phi(x)$$

5c).

$$P(Z_n \in [a, b]) = P(a \leq Z_n \leq b) \\ = P(Z_n \leq b) - P(Z_n \leq a)$$

for passage à la limite on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in [a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Partie II /

$$\text{ou) } X_i(\omega) = \{0, 1\} \\ X_i \hookrightarrow \beta(p)$$

$$E(X_i) = p, \quad V(X_i) = p(1-p) \quad \text{d'après le cours.}$$

Démonstration

$$E(X_i) = 0P(X_i=0) + 1P(X_i=1) = p$$

$$E(X_i^2) = 1P(X_i=1) = p$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p)$$

pr Königshagen

$$6b) \sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

~~Parsons~~~~ou~~

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = t(1-t) = t - t^2$$

y est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = 1 - 2t$$

on résout

$$1 - 2t > 0$$

$$\Rightarrow 1 > 2t \Leftrightarrow \frac{1}{2} > t$$

n	0	$\frac{1}{2}$	1
g	0	$\frac{1}{4}$	0
g	0	$\rightarrow$	$\rightarrow$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{R}^+, n(1-n) \leq \frac{1}{4}$

Par application de $n \rightarrow \sqrt{n}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

on a $\boxed{\sqrt{n(1-n)} \leq \frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{R}^+.$

Donc $\boxed{\sigma = \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}}$

b) c). $E(\bar{X}_m) = E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right)$ par linéarité de l'espérance
on a.

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(X_i)$$

$$= \frac{1}{m} p \cdot m = \boxed{p = E(\bar{X}_m)}$$

b) d). $V(\bar{X}_m) = V\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right) = \frac{1}{m^2} V\left(\sum_{i=1}^m X_i\right)$

• par la forme quadratique de la variance
- car les X_i sont indépendantes

Donc $V(\bar{X}_m) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m V(X_i) = \frac{1}{m^2} m \cdot p(1-p)$

$$= \frac{1}{m} p(1-p) = \boxed{\frac{1}{m} \sigma^2 = V(\bar{X}_m)}$$

7) a) $\forall a > 0$.

$$\text{on note } \overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)}$$

$$= \frac{\overline{X}_n - \rho}{\sqrt{\frac{1}{n} \sigma^2}} = \left(\frac{\overline{X}_n - \rho}{\sigma} \right) (\sqrt{n})$$

car $\overline{X}_n$ est une suite de variable aléatoire indépendante, de même loi, de même variance, par théorème limite central.

où $Z_n \rightarrow N(0, 1)$. Donc :

$$\overline{X}_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z_n$$

$$P(\overline{X}_n^* \in [-a, a])$$

$$= P\left(\sqrt{n} \left(\frac{\overline{X}_n - \rho}{\sigma} \right) \in [-a, a]\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} \left(\frac{\overline{X}_n - \rho}{\sigma} \right) \in [-a, a]\right) = \Phi(a) - \Phi(-a).$$

on travaille dans la probabilité; pour n suffisamment grand 7b).

$$P(-a \leq \sqrt{n} \left(\frac{\overline{X}_n - \rho}{\sigma} \right) \leq a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a))$$

$$\Rightarrow P(-a\sigma \leq \sqrt{n}(\overline{X}_n - \rho) \leq \sigma a) = 2\Phi(a) - 1 \quad \text{car } \sigma > 0.$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-a\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n - \rho \leq \frac{\sigma a}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(a) - 1 \quad \sqrt{n} > 0.$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-a\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}_n \leq -\rho \leq \frac{\sigma a}{\sqrt{n}} - \overline{X}_n\right) = 2\Phi(a) - 1.$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{X}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \rho \leq \overline{X}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(a) - 1.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques LE ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\rho \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 2\Phi(a) - 1$$

7c). on remarque que $2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$
Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$P\left(\rho \in \left[\bar{X}_n - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0,95$$

7d). on sait que $\sigma \leq \frac{1}{2}$, donc $1,96\sigma \leq 0,98$

Ainsi, il vient que.

$$\left(\rho \in \left[\bar{X}_n - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \subset \left(\rho \in \left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Par croissance de la probabilité.

$$0,95 \leq P\left(\rho \in \left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
 & 8) \quad \forall m \geq 1, \\
 a) \quad \widehat{V}_m - \sigma^2 &= \frac{1}{n} \\
 &= \overline{X}_m (1 - \overline{X}_m) + \frac{1}{n} - p(1-p) - \frac{1}{n} \\
 &= \overline{X}_m (1 - \overline{X}_m) - p(1-p) \\
 &= \overline{X}_m - \overline{X}_m^2 - p + p^2
 \end{aligned}$$

car on remarque que

$$\begin{aligned}
 (\overline{X}_m - p)(1 - \overline{X}_m - p) &= \overline{X}_m - p\overline{X}_m - \overline{X}_m^2 - p + p\overline{X}_m \\
 &\quad + p^2 \\
 &= \overline{X}_m - \overline{X}_m^2 - p + p^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Duc } \widehat{V}_m - \sigma^2 - \frac{1}{n} = (\overline{X}_m - p)(1 - \overline{X}_m - p)$$

$$8b) \quad \widehat{V}_m - \sigma^2 = (\overline{X}_m - p)(1 - \overline{X}_m - p) + \frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow \widehat{V}_m - \sigma^2 = (\overline{X}_m - p)(1 - \overline{X}_m - p) + \frac{1}{n}.$$

Prove que:

$$4(\overline{X}_m - p) + \frac{1}{n} \geq (\overline{X}_m - p)(1 - \overline{X}_m - p) + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 4\overline{X}_m - 4p \geq \overline{X}_m - \overline{X}_m^2 - p + p^2$$

$$\Rightarrow \overline{X}_m^2 + 3\overline{X}_m - 3p - p^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \overline{X}_m^2 - p^2 + 3\overline{X}_m - 3p \geq 0.$$

$$\Rightarrow (\overline{X}_m - p)(\overline{X}_m + p) + 3(\overline{X}_m - p) \geq 0.$$

$$(\bar{X}_n - p)(\bar{X}_n + p + 3) \geq 0$$

$$\bar{X}_n - p \geq 0 \quad ?$$

Admettons $|V_n - \sigma^2| \leq 2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n}$

$$8c). (|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \subset 2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon$$

Par raisonnement de la probabilité on a:

$$P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leq P(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon)$$

$$\Rightarrow P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leq P(2|\bar{X}_n - p| > \varepsilon - \frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leq P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n})$$

$$8)d). \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2n}$$

Il vient alors que pour n assez grand.

$$(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}) \subset (|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2n})$$

Par raisonnement de la probabilité.

$$P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}) \leq P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2n})$$

pour n assez grand $\frac{1}{2n} \xrightarrow{+\infty} 0$

on a alors

$$P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}) \leq P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{4})$$

8) e). $\forall \varepsilon > 0$.

on sait que $P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

par la loi faible des grands nombres, $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers son espérance p .

(ce théorème s'applique car $\bar{X}_n$ est une suite de variable aléatoires, indépendantes, de même loi, de même espérance et variance).

$$\text{or } 0 \leq P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leq P(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{n})$$

car c'est une probabilité

Donc par théorème d'encachement.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) = 0$$

$$g) \quad a) \cdot e). \quad W_n = \frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} Z_n.$$

$$P(W_n \leq n) = P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} Z_n \leq n\right).$$

$$\text{on } Z_n \leq (1 + \varepsilon)n$$

$$\text{et } \frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1 + \varepsilon \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} < \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad \text{par stricte croissance de l'inverse sur } \mathbb{R}_+^*.$$

il vient alors que.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} Z_n \leq \frac{(1 + \varepsilon)n}{(1 + \varepsilon)} = n.$$

$$\Leftrightarrow (W_n \leq n)$$

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématiques 2E ESSE

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi on a :

$$\left((Z_m \leq (1+\varepsilon)n) \cap \left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon} \right) \right) \Rightarrow (W_m \leq n)$$

car si $Z_m \leq (1+\varepsilon)n$ et si $\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon}$ sont réalisées alors $W_m \leq n$ l'est.

on $P((Z_m \leq (1+\varepsilon)n) \cup (\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon}))$ par la formule de l'addition on a :

$$= P(Z_m \leq (1+\varepsilon)n) + P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right) - \underbrace{P((Z_m \leq (1+\varepsilon)n) \cap (\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon}))}_{= P(W_m \leq n)}$$

et puisque il s'agit d'une probabilité on peut écrire :

$$0 \leq P(Z_m \leq (1+\varepsilon)n) + P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right) - P(W_m \leq n)$$

$$\Rightarrow P(W_m \leq n) \leq P(Z_m \leq (1+\varepsilon)n) + P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_m}} < \frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow P(W_m \leq n) \leq P(Z_m \leq (1+\varepsilon)n) + P\left(\frac{\sqrt{V_m}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right)$$

$\rightarrow$ de croissance σ de l'échantillon

$\mathbb{R}^{+*}$.

g) a) ii).

$$P\left(\frac{\sqrt{V_m}}{\sigma} > 1 + \varepsilon\right)$$

g) a) iii). (Z_n) est une suite de variable aléatoire indépendante, de même loi, même variance, même espérance.
Par théorème de limite centrée
 $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z$ ou $Z \hookrightarrow N(b, 1)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq (1 + \varepsilon)\sigma) = \Phi((1 + \varepsilon)\sigma)$

g) a) iv). Par définition de la limite.
 $\exists n_\varepsilon$ tel que $n \geq n_\varepsilon$.

$$|P(W_n \leq x) - P(Z_n \leq (1 + \varepsilon)\sigma)| \leq \varepsilon + 0 = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |P(W_n \leq x) - \Phi((1 + \varepsilon)\sigma)| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow P(W_n \leq x) \leq \varepsilon + \Phi((1 + \varepsilon)\sigma)$$

g) b). Ainsi on peut écrire, d'après ce qui est admis.
 $\exists n_\varepsilon > n_0$ tel que:
 $|P(W_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \varepsilon.$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \leq x) = \Phi(x)$

10) $\forall n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 & P\left(\rho > \bar{X}_n - n \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) \\
 &= P\left(\rho > \bar{X}_n - n \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \rho)}{\sqrt{n} W_n}\right) \\
 &= P\left(\rho > \bar{X}_n - \frac{n(\bar{X}_n - \rho)}{W_n}\right) \\
 &= P\left(\rho > \frac{W_n \bar{X}_n - n(\bar{X}_n - \rho)}{W_n}\right) \\
 &= P\left(\rho > \frac{W_n \bar{X}_n - n \bar{X}_n + n\rho}{W_n}\right) \\
 &= P\left(W_n > \frac{W_n \bar{X}_n - n \bar{X}_n + n\rho}{\rho}\right) \\
 &\Rightarrow P\left(W_n > \frac{\bar{X}_n(W_n - n)}{\rho} + n\right)
 \end{aligned}$$

10) a)

$$\begin{aligned}
 & P\left(\rho > \bar{X}_n - n \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) \\
 &= P\left(n \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} > \bar{X}_n - \rho\right)
 \end{aligned}$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\bar{X}_n - \rho}\right) \quad \text{par décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}^+$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{n}{\bar{X}_n - \rho}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}(\bar{X}_n - \rho) \leq n\right)$$

$$= P(W_n \leq n) \xrightarrow{+\infty} \Phi(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{R} \text{ on a bien } P\left(\rho > \bar{X}_n - n \frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{+\infty} \Phi(n)$$

$$10b). W_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z_1$$

$$\text{où } Z \sim N(0,1)$$

Donc on sait que $p > \frac{1}{2}$ et $n = 1000$,

$$\bar{X}_n = 0,52$$

par n très grand

$$P(W_m \leq z) = \Phi(z).$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} \left(0,52 - p\right)\right)$$

$$\text{car, } p > \frac{1}{2} \text{ et } \bar{X}_n = 0,52$$

$$P(\bar{X}_n \leq z) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}} (\bar{X}_n - p) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}} \left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} (\bar{X}_{1000} - p) \leq \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} \left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow P\left(W_{1000} \leq \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} \left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

par n suffisamment grand :

$$P\left(W_{1000} \leq \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} \left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}} \left(0,52 - \frac{1}{2}\right)\right) \approx 0,9$$

11)

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques 2E ESSE

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$1) a) \cdot y_i(2) = \{0, 1\}$$

~~$y_i = 1$~~ / la personne a déclaré voter pour A.

- Soit, la personne déclare voter pour A et vote A
- Soit la personne déclare voter pour A et vote B.
(elle change d'avis)

$$P(y_i = 1) = P(X_i = 1, T_i = 0) + P(X_i = 0, T_i = 1)$$

$$= P(X_i = 1) P(T_i = 0) + P(X_i = 0) P(T_i = 1)$$

par union disjointe, et indépendante des X_i, T_i ,

$$= p \cdot (1 - q) + (1 - p) \cdot q$$

$$= p - pq + q - pq$$

$$= p + q$$

$$P(y_i = 0) = 1 - P(y_i = 1) = 1 - p - q$$

$$y_i \hookrightarrow B(p + q)$$

$$r = p + q$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11b).

11d).

$$\mathbb{R} \mid \sqrt{1000}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques ES & EC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3.

12) a) i).

$$\int_0^1 u^3 (1-u)^3 du$$

on pose $u(x) = u^3$

$$u'(x) = 3u^2$$

$u'(x) = 3u^2$

$$v(x) = -\frac{(1-u)^4}{4}$$

on pose $u(x) = (1-u)^3$

$$u'(x) = -3(1-u)^2$$

$u'(x) = 3(-1)(1-u)^2$

$$v(x) = \frac{u^4}{4}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par intégration par parties on a :

$$= \left[(1-u)^3 \frac{u^4}{4} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{3(-1)(1-u)^2}{4} u^4 du$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^1 (1-u)^2 u^4 du.$$

on pose $u(x) = (1-u)^2$

$$u'(x) = -2(1-u)$$

$u'(x) = -2(1-u)$

$$v(x) = \frac{u^5}{5}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par IPP on a:

$$\frac{3}{4} \left[\underbrace{\left[(1-u)^2 \frac{u^5}{5} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -\frac{2u^5}{5} (1-u) du \right]$$

$$= \frac{6}{20} \int_0^1 u^5 (1-u) du$$

on pose $u(x) = 1-u$ $u'(x) = -1$
 $v(x) = u^5$ $v'(x) = \frac{u^6}{5}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par IPP on a:

$$= \frac{6}{20} \left[\underbrace{\left[(1-u) \frac{u^6}{6} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 1 - 1 \frac{u^6}{6} du \right]$$

$$= \frac{6}{20} - \frac{1}{6} \int_0^1 u^6 du$$

$$= \boxed{\frac{1}{20} \int_0^1 u^6 du = \int_0^1 u^3 (1-u)^3 du}$$

$$12) a) ii) \frac{1}{20} \int_0^1 u^6 du = \frac{1}{20} \left[\frac{u^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{20 \cdot 7} = \frac{1}{140}$$

Donc $\boxed{\int_0^1 u^3 (1-u)^3 du = \frac{1}{140}}$

12) b) en 0:

$$140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0 = h(0)$$

Donc h est continue en 0.

$$\text{en 1: } 140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{1}{140} \cdot 140 = 1 = h(1)$$

Donc h est continue en 1.

or $\forall z \in]0, 1[$ $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est une fonction continue qui admet des primitives on note U l'une d'entre elles.

$$140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du = 140(U(z) - U(0))$$

h est continue sur $]0, 1[$ comme fonction différence de fonctions continues.

Il vient alors que h est continue sur $\mathbb{R}$.

12) c). $\forall u \in]0, z[$ où $z \in]0, 1[$.

$$u^3(1-u)^3 > 0.$$

Les fonctions intégrées sont continues, $0 < z$, par croissance et positivité de l'intégrale on a:

$$\int_0^z u^3(1-u)^3 du > 0$$

$$140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du > 0$$

$$= \forall z \in \mathbb{R}, \text{ on a bien } \boxed{0 \leq h(z)}$$

or puisque la fonction $u \mapsto u^3(1-u)^3$ est strictement positive sur $]0,1[$.
on a:

$$\text{or } u \mapsto u^3(1-u)^3 > 0 \text{ sur }]0,1[.$$

$$\text{on a } \int_0^1 u^3(1-u)^3 du \geq \int_0^z u^3(1-u)^3 du.$$

$$\Rightarrow \frac{140}{140} \cdot \frac{1}{140} \geq \frac{1}{140} \int_0^z u^3(1-u)^3 du$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \geq h(z)} \quad \text{or } z \in]0,1[$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{R}, 0 \leq h(z) \leq 1.$$

13) a) i). g_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions continues.

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{R}, 0 \leq h(z) \leq 1.$$

$$z = \frac{1}{an}(z-n)$$

$$\text{or a } 0 \leq h\left(\frac{1}{an}(z-n)\right) \leq 1.$$

$$\Rightarrow 0 \geq -h\left(\frac{1}{an}(z-n)\right) \geq -1. \quad \times (-1).$$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - h\left(\frac{1}{an}(z-n)\right) \geq 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \geq g_n(z) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{R}.}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques 2E ES/EC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13 b) ii)

13 b) i)

• si $z \leq x$

$\Rightarrow z - x \leq 0$.

Alors $\frac{1}{an}(z - x) \leq 0$.

Donc $1 - h\left(\frac{1}{an}(z - x)\right) = 1 - 0 = 1 = g_n(z)$

• en revanche si $z > x + an$

$\Rightarrow z - x > an$

$\Rightarrow \frac{1}{an}(z - x) > 1$.

$h\left(\frac{1}{an}(z - x)\right) = 1$.

Donc $1 - h\left(\frac{1}{an}(z - x)\right) = 1 - 1 = 0 = g_n(z)$

13) b)ii) $\forall$ la va X .

14) a).

$$\frac{1}{2} \int_z^{z+v} (z+v-t)^2 g'''(t) dt$$

$$v(t) = (z+v-t)^2 \quad v'(t) = (-1)(2)(z+v-t)$$

$$v'(t) = g'''(t) \quad v(t) g''(t)$$

v et v' sont $\in 1$ sur $\mathbb{R}$, par IIP on a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[(z+v-t)^2 g''(t) \right]_z^{z+v} + \int_z^{z+v} 2(z+v-t) g''(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(-v^2 g''(z) + \int_z^{z+v} 2(z+v-t) g''(t) dt \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} v^2 g''(z) + \frac{1}{2} \int_z^{z+v} 2(z+v-t) g''(t) dt$$

~~$$\text{on pose } = -\frac{1}{2} v^2 g''(z) + \int_z^{z+v} (z+v-t) g''(t) dt$$~~

$$v(t) = (z+v-t) \quad v'(t) = -1$$

$$v''(t) = g''(t) \quad v'(t) = g'(t)$$

v et v' sont $\in 1$ sur $\mathbb{R}^+$, par IIP on a:

$$-\frac{1}{2} v^2 g''(z) + \left[(z+v-t) g'(t) \right]_z^{z+v} + \int_z^{z+v} g'(t) dt$$

$$= -\frac{1}{2} v^2 g''(z) + v g'(z) + [g(t)]_z^{z+v}$$

$$= -\frac{1}{2} v^2 g''(z) - v g'(z) + g(z+v) - g(z)$$

$$= \frac{1}{2} \int_z^{z+v} (z+v-t)^2 g'''(t) dt$$

14) b). on pourrait utiliser la relation de Taylor pour démontrer le résultat, en développant les parties

$z \rightarrow z+v$ et $z \rightarrow z+v \dots$ dans $R(z, v, v)$ et recommencer avec ce qui précède.
? les intégrales.

15) a) i) $y_i \hookrightarrow N(0, 1)$.

$\sum_{i=1}^m y_i$ est encore une loi normale d'après le cas, car la loi normale est stable par la somme.

D'ailleurs $E\left(\sum_{i=1}^m y_i\right) = 0$

$V\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)$ par indépendance des y_i .

$= m$

Donc $\sum_{i=1}^m y_i \hookrightarrow N(0, m)$

$$15) a) ii). \quad T_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m y_i.$$

T_m soit une loi normale d'après le cas

$$E(T_m) = 0.$$

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m y_i\right) = \frac{1}{m} V\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)$$

par la forme quadratique de la variance, par indépendance des y_i etc.

$$V(T_m) = 1$$

$$T_m \hookrightarrow N(0, 1)$$

$$15) b) i) \quad W_k + \frac{1}{\sqrt{m}} y_k = \frac{1}{\sqrt{m}} (y_1 + \dots + \underline{y_k} + X_{k+1} + \dots + X_m)$$

$$\text{or } W_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{m}} (y_1 + \dots + \underline{y_k} + \underline{X_{k+1}} + \dots + X_m)$$

$$\text{Donc } W_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{m}} X_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{m}} (y_1 + \dots + \underline{y_k} + X_{k+1} + \dots + X_m)$$

Donc on a bien.

$$W_k + \frac{1}{\sqrt{m}} y_k = W_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{m}} X_{k+1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématiques 2 E ESIC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15) e) Admettons

$$0 \leq |E(g_m(z_m)) - E(g_m(T_m))| \leq \frac{1}{6\sqrt{m}} M_y^{(4)} (E(|X_1|^3) + E(|Y_1|^3))$$

↑ car valeur absolue toujours ≥ 0 $\xrightarrow{+\infty} 0$

15) f) Par théorème d'uniformement

$$|E(g_m(z_m)) - E(g_m(T_m))| \xrightarrow{+\infty} 0$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

