

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

E9-00159
960004
Maths E



Code épreuve : 288

Nombre de pages : 28

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématiques E HEC / ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1)

1) a) $\forall t > 0$

$$P(T > t) = \int_t^{+\infty} f_T(x) dx \quad \text{or par } A > t.$$

or $\forall x > 0, f_T(x) > 0$

la fonction intégrée est continue, $\forall t < A$,
par croissance de l'intégrale on a la positivité de
l'intégrale:

$$\int_t^A f_T(x) dx > 0.$$

$$A \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \int_t^{+\infty} f_T(x) dx > 0$$

$$\text{Donc } P(T > t) > 0$$

1b) $\forall h > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$

$$K_{T,t}(h) = \frac{1}{h} P(T > t) (T \leq t+h)$$

$$k_{T,t}(h) = \frac{1}{h} \frac{P(T \leq t+h | T > t)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{1 - F_T(t)}$$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$= \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \times \frac{1}{1 - F_T(t)}$$

$\nearrow$ taux d'accrondissement. (définition de cours)

Puis par passage à la limite on a quand
 $h \rightarrow 0^+$

$$= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} K_{T,t}(h) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$1c). \quad \forall_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_T(t)} = \frac{1 - F_T(t)}{f_T(t)}$$

application de l'inverse
est est licite
car $f_T > 0$.
 $\forall t \in \mathbb{R}_+^T$.

$$\Rightarrow \frac{f_T(t)}{r_T(t)} = 1 - F_T(t).$$

$$\Rightarrow F_T(t) = 1 - \frac{f_T(t)}{r_T(t)}$$

$$\text{Ainsi: } F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(t) dt$$

$$= \int_0^t f_T(t) dt$$

$$\text{Donc } \frac{1 - f_T(t)}{r_T(t)} = \int_0^t f_T(t) dt.$$

or f_T isolés finalement f_T .

$$r_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$\Rightarrow r_T(t)(1 - F_T(t)) = f_T(t).$$

$$\text{Ainsi } F_T(t) = \int_0^t r_T(t)(1 - F_T(t)) dt$$

1c) $\forall t > 0$. on sait que.

$$r_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}.$$

(F)

Admettons $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t r_T(u) du\right)$

$\forall t > 0, \theta \geq t$

$$P_{(T > t)}(T \leq \theta) = \frac{P(t \leq T \leq \theta)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{P(T \leq \theta) - P(T \leq t)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{P(T \leq \theta) - P(T \leq t)}{1 - P(T \leq t)}$$

$$= \frac{1 - \exp\left(-\int_0^\theta r_T(u) du\right) - (1 - \exp\left(-\int_0^t r_T(u) du\right))}{1 - (1 - \exp\left(-\int_0^t r_T(u) du\right))}$$

$$= \frac{\exp\left(-\int_0^t r_T(u) du\right) - \exp\left(-\int_0^\theta r_T(u) du\right)}{\exp\left(-\int_0^t r_T(u) du\right)}$$

$$= 1 - \frac{\exp\left(-\int_0^\theta r_T(u) du\right)}{\exp\left(-\int_0^t r_T(u) du\right)}$$

$$= 1 - \exp\left(-\int_0^\theta r_T(u) du + \int_0^t r_T(u) du\right)$$

= Charles.

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques E HEC/ELSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1) e sorte

$$= 1 - \exp\left(\int_0^0 x_T(x) dx + \int_0^t r_T(x) dx\right)$$

Chosles

$$= 1 - \exp\left(-\int_0^t r_T(x) dx\right)$$

2) $F_T(t) \in]0, 1[$

$$\Rightarrow 0 < F_T(t) < 1.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1 - F_T(t)} < 1.$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \leq f_T(t) \quad \text{car } f_T > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi, puisque f_T est une densité.

$$\int_0^{+\infty} f_T(t) dt = 1.$$

On a $\frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} > 0$, la fraction est continue sur $\mathbb{R}^+$

Par théorème de comparaison, par les intégrales des fonctions positives et continues.

$$\int_0^{+\infty} \lambda_T(n) dn \quad \underline{\text{converge}}$$

3) • A l'échéance d'une année vient l'organisation W qui a la probabilité la plus faible d'être en défaut de paiement car à $t=1$, son voyage de point est inférieur à tout les autres

• C'est à nouveau l'organisation W qui a la probabilité la plus faible d'être en défaut.

$$4) \lambda_T(n) = \lambda > 0. \quad T(\Omega) = \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda > 0. \\ \text{Ainsi: } F_T(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda dn\right) \\ &= 1 - \underline{e^{-\lambda t}} \quad \text{et si } t \leq 0, f_T(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{T \sim \mathcal{E}(\lambda)}$$

$$\underline{E(T) = \frac{1}{\lambda}}$$

$$S) \quad \forall \lambda > 0. \quad T(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^+_\lambda$$

$$r_T(t) = \lambda t \quad \text{où } \lambda > 0.$$

$$\begin{aligned} a) \quad F_T(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda t \, dt\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \\ &= \underline{1 - e^{-\lambda \frac{t^2}{2}}} \quad \text{et } \forall t \leq 0, F_T(t) = 0 \end{aligned}$$

$\forall \lambda > 0$, f_T est dérivable comme composition de fonction de référence.

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{\lambda t}{2} e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} \\ &= \underline{\lambda t e^{-\lambda \frac{t^2}{2}}} \quad \forall t \geq 0 \\ &\quad \text{et } f_T(t) = 0 \end{aligned}$$

S4) Sous réserve de convergence absolue, Notons :

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) \, dt \quad \text{car } T(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^+_\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} t \lambda t e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \, dt \end{aligned}$$

montrons qu'elle existe :

par croissance comparée $\lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \xrightarrow{+\infty} 0$

Donc $\lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_0^1 \lambda t^2 \exp(-\lambda \frac{t^2}{2}) dt$ converge
comme intégrale de fonction continue
sur un segment fermé.

et $\int_1^{+\infty} \lambda t^2 \exp(-\lambda \frac{t^2}{2}) dt$ converge par
théorème de comparaison par l'intégrale de
fonctions continues et positives par
domination avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$

Donc $F(T)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp(-\lambda \frac{t^2}{2}) dt$

5c) on sait que la densité de $N(m, \sigma^2)$
est $x \mapsto \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$

$$\text{ainsi } \left. \begin{array}{l} m=0 \\ \sigma^2 = \frac{1}{\lambda} \end{array} \right\}$$

Ainsi la densité de $N(0, \frac{1}{\lambda})$
est $x \mapsto \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{\lambda x^2}{2})$

Du coup le moment d'ordre 2 de cette loi
est par König Huygen.

$$V(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{\lambda}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 0288

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques E HEC / ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Sc suite.

on a alors.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

~~x=0~~ on remarque que la fonction est
PAIRE. Donc :

$$\Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\lambda}$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\Rightarrow \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\lambda \frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

Ainsi : $E(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$

⚡ j'ai oublié de
mettre λ dans
l'intégrale.

b). a). Admettons

$\forall i \in \{1, \dots, a\}, t \in [i-1, i[$.

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\gamma_i(t - (i-1))) \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right).$$

b). $t \in [0, a[$.

~~ainsi et~~

$i-1 = \lfloor t \rfloor$ car $i-1 < t < i$
 et par décalage $i = \lfloor t \rfloor + 1$.
 car $i \in \{1, \dots, a\}$ et $t \in [0, a[$

on en déduit donc que

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor)) \exp\left(-\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k\right)$$

b c) fonction $r = F(t, \text{gammaTab})$
 produit = $\exp(-\text{gammaTab}(\text{floor}(t)+1) * (t - \text{floor}(t)))$
 $i = \text{floor}(t)$
 for $k = 1 : (i-1)$
 . produit = produit * $\exp(-\text{gammaTab}(k))$
 end
 $r = 1 - \exp(-\text{gammaTab}(i)) * (-1)^i \dots$

Partie 2.1

7) a) U est la variable à maturité du capital que B verse à A.

il paie la somme $\underbrace{(1 - S(T))}_{\text{le taux}} \underbrace{e^{r(m-T)}}_{\text{le montant investi}}$ si et seulement si un défaut de paiement survient à l'instant $T \leq m$ sinon il ne paie rien.

Donc puisque il paie si $T \leq m$ et réalisé cela signifie bien que $U = (1 - S(T)) e^{r(m-T)} 1_{[T \leq m]}$

or $1_{[T \leq m]} = 1_{]0, m]}(T)$

car cela signifie bien que $T \in]0, m]$

Donc $U = (1 - S(T)) e^{r(m-T)} 1_{]0, m]}(T)$

7b). $U = (1 - S(T)) e^{r(m-T)} 1_{(T \leq m)}$ ainsi

par le théorème du transfert. on a sous réserve de convergence absolue:

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - S(t)) e^{r(m-t)} 1_{(T \leq m)} dt$$

l'intégrale est nulle lorsque $\underline{t > m}$ et $\underline{t \leq 0}$.

$$= \int_0^m (1 - S(t)) e^{rm} e^{-rt} f_T(t) dt.$$

Par linéarité on a:

$$= e^{rm} \int_0^m (1 - S(t)) e^{-rt} f_T(t) dt$$

ELU) existe car il s'agit d'une intégrale de fonction continue par morceaux sur un segment fini.

8) a). Chaque année A verse une prime de s euros à B.

8b). La maturité vaut m .
 or $m = \theta N$.

~~Admettons que A verse à maturité $e^{-r(m-T)}$ à B le capital $s(\theta \sum_{k=1}^i e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T-i\theta))$~~

si $[i\theta < T \leq (i+1)\theta]$ est réalisé alors le défaut advient à cette intervalle de temps.

Alors A fait un dernier paiement à B de $(T-i\theta)$ euros.

ce dernier paiement est multiplié par le capital $e^{r(m-T)}$ et la prime mais A verse aussi à chaque instant $k \in [1; i]$ une prime qui vaut $s(\theta e^{r(m-k\theta)})$

Au total à maturité, le capital que A verse à B vaut

$$s\theta \sum_{k=1}^i e^{r(m-k\theta)} + s e^{r(m-T)}(T-i\theta)$$

$$= s\left(\theta \sum_{k=1}^i e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T-i\theta)\right)$$

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques E HEC/ESSEC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8d) admettons 8c) et par le théorème du transfert on a, sous réserve d'existence

$$E(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} 1_{]k\theta, +\infty[}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rk\theta} (t - k\theta) \times 1_{]k\theta, (k+1)\theta]}(T) \right) dt$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{rm} \theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} 1_{]k\theta, +\infty[}(T) dt + s e^{rm} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rk\theta} (t - k\theta) \times 1_{]k\theta, (k+1)\theta]}(T) dt$$

$$= s e^{rm} \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} f_T(t) dt + s e^{rm} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rk\theta} (t - k\theta) f_T'(t) dt$$

Par linéarité on a :

$$= s e^{rm} \theta \sum_{k=1}^N \int_{k\theta}^{+\infty} e^{-rk\theta} f_T(t) dt + s e^{rm} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rk\theta} (t - k\theta) f_T'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= se^{rm} \left(\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} \int_{k\theta}^{+\infty} f_T(t) dt \right) + se^{rm} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} \underbrace{(1 - F_T(k\theta))}_{= (1 - F_T(k\theta))} f_T(t) dt.
\end{aligned}$$

Factorisons

$$= se^{rm} \left[\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} f_T(t) dt \right]$$

L'espérance existe puisqu'il s'agit de somme finie et d'intégrale de fonctions continues par morceaux sur segment fini.

g). Si $s = \frac{\int_0^m (1 - f(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\theta \sum_{k=1}^N e^{-rk\theta} (1 - F_T(k\theta)) + \dots}$
ce qu'il y a dans l'numérateur.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } E(V) &= se^{rm} \int_0^m (1 - f(t)) e^{-rt} f_T(t) dt. \\
&= sE(U).
\end{aligned}$$

or $E(U)$ est la moyenne du capital à maturité que B verse à A.

Donc cela est équitable si et seulement si la prime annuelle équivalente à la prime s multipliée par la valeur moyenne du capital

que B verse à A.

Si comme elle est sûr dans l'ennemi
est bien l'unique valeur de la prime de risque.
Équitable.

10) a). si g est continue sur $[0; m]$

$$\text{alors } \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N g\left(\frac{k m}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^m g(x) dx$$

ⓓ'après le cours sur les sommes de
Riemann.

$$10) b). \quad \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N e^{-r k \frac{m}{N}} \left(1 - F_T\left(k \frac{m}{N}\right)\right)$$

Par application directe de la propriété de
dt du cours

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N e^{-r \left(k \frac{m}{N}\right)} \left(1 - F_T\left(k \frac{m}{N}\right)\right) = \int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt$$

10 c). $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$.

car $rt > 0$.

$$0 < e^{-rt} \leq 1.$$

Par ailleurs.

$$0 < e^{-rt} f_T(t) \leq f_T(t). \quad f_T(t) > 0 \quad t \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow 0 < e^{-rt} f_T(t) \left(t - \frac{k m}{N}\right) \leq \left(t - \frac{k m}{N}\right) f_T(t)$$

$$\text{or } \frac{m}{N} = \theta \text{ or } t \in [k\theta, (k+1)\theta].$$

$$\text{or } (t - k\theta) < \theta \text{ preuve par équivalence} \\ \Leftrightarrow t < \theta + k\theta \Leftrightarrow t < \theta(k+1) \text{ Donc c'est vraie}$$

Il vient alors que:

$$0 \leq e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) \leq (t - k\theta) f_T(t) \leq \theta f_T(t)$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) \leq \theta f_T(t)$$

des fonctions intégrées sur continues et $k\theta < (k+1)\theta$, par raisonne de l'intégrale on a:

$$0 \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \theta f_T(t) dt$$

Par linéarité de l'intégrale il vient que

$$0 \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt \leq \theta \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt$$

$$0 \leq \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} \left(t - k \frac{m}{N} \right) f_T(t) dt \leq \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt$$

on applique la somme

$$0 \leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} \left(t - k \frac{m}{N} \right) f_T(t) dt \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt \text{ par Chasles on a}$$

$$= \frac{m}{N} \int_0^{N\theta} f_T(t) dt = \frac{m}{N} P(T \leq N\theta)$$

$$\text{or lorsque } N \rightarrow +\infty, P(T \leq N\theta) = 1 \\ \text{Donc } \frac{m}{N} P(T \leq N\theta) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ par quotient de limite}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Mathématiques E HEC / ESSEC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

suite 10 c).

$$\text{Ainsi : } \frac{m}{N} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Par théorème d'encadrement on a alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} f_T(t) (t - k \frac{m}{N}) dt$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} f_T(t) (t - k\theta) dt = 0$$

$$\text{car } \frac{m}{N} = \theta$$

Ainsi en appliquant le cours sur les sommes de Riemann, par passage à la limite des S_N lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a bien

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^m (1 - \delta(t)) e^{-rt} f_T(t) dt$$

$$= \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N e^{-rk \frac{m}{N}} (1 - F_T(k \frac{m}{N})) + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt} (t - k\theta) f_T(t) dt$$

on reconnaît bien la somme de Riemann
en remplaçant Δ par $\frac{m}{N}$.

Ainsi $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^m (1 - S(t)) e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^m e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}$

10) d). si $T \in \mathcal{E}(\lambda)$ et λ est une fonction
constante égale à
un réel δ .

on a pour N suffisamment grand

$$S_N = \frac{\int_0^m (1 - \frac{t}{N}) e^{-rt} (\lambda e^{-\lambda t}) dt}{\int_0^m e^{-rt} (1 - (1 - e^{-\lambda t})) dt}$$

$$= \frac{\int_0^m (1 - \frac{t}{N}) e^{-rt} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_0^m e^{-rt} (e^{-\lambda t}) dt}$$

$$= \frac{\int_0^m (1 - \frac{t}{N}) e^{-rt} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_0^m e^{-rt} (e^{-\lambda t}) dt}$$

$$= \frac{(1 - \frac{1}{N}) \int_0^m e^{-rt - \lambda t} dt}{\int_0^m e^{-rt - \lambda t} dt}$$

Par linéarité de $\int$

$$= (1 - \frac{1}{N}) \frac{\int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt}{\int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt}$$

$$= (1 - \frac{1}{N}) \frac{\int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt}{\int_0^m e^{-(r+\lambda)t} dt}$$

$$= (1 - \frac{1}{N}) \lambda$$

Ainsi $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} (1 - \delta) \lambda$

Part 3).

$$1) \cdot r_1 = r_T(t) \text{ on } t \in [0, 1].$$

$$r_1 = d_1 - r$$

$$r_1 = r_T(t) \text{ on } t \in [0, 1].$$
$$= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}.$$

$$\text{or } S_1$$

$$S_1 = (1 - \delta) \frac{\int_0^1 e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^1 e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{1 - \delta} = \frac{\int_0^1 e^{-rt} f_T(t) dt}{\int_0^1 e^{-rt} (1 - F_T(t)) dt}$$

12) a) $\forall i \in \{1, \dots, a\} \text{ et } \forall i \in [i-1, i[$

12) b) .

|

Code épreuve : 288

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques E HEC / ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14) a) e_h est dérivable sur $\mathbb{R}^+_{\times}$ comme différence et quotient de fonctions de référence dont les dénominateurs ne s'annulent pas $\forall t \in \mathbb{R}^+_{\times}$.

$$e'_h(t) = \Theta_h(A_{h-1}e^{-t}) - A_{h-1} \frac{e^{-t} \times t - (1-e^{-t})}{t^2}$$

$$= \Theta_h(A_{h-1}e^{-t}) - A_{h-1} \frac{te^{-t} - 1 + e^{-t}}{t^2}$$

$$= \Theta_h A_{h-1} e^{-t} - \frac{A_{h-1} te^{-t} + A_{h-1} - A_{h-1} e^{-t}}{t^2}$$

$$= A_{h-1} \left(\frac{t^2 \Theta_h e^{-t}}{t^2} - \frac{te^{-t}}{t^2} + \frac{1}{t^2} - \frac{t^2 e^{-t}}{t^2} \right)$$

$$= \frac{A_{h-1}}{t^2} (t^2 \Theta_h e^{-t} - te^{-t} + 1 - t^2 e^{-t})$$

$$= \frac{A_{h-1}}{t^2} (e^{-t}(\Theta_h t^2 - t - t^2) + 1)$$

$$14) a) \quad \forall h > 0$$

$$\begin{aligned}
 \varphi'_h(t) &= \Theta_h(Ah^{-1}e^{-t}) - Ah^{-1} \frac{te^{-t} - (1-e^{-t})}{t^2} \\
 &= \Theta_h(Ah^{-1}e^{-t}) - \frac{(Ah^{-1})(te^{-t} - 1 + e^{-t})}{t^2} \\
 &= Ah^{-1} \left[\Theta_h e^{-t} - \frac{te^{-t}}{t^2} + 1 - e^{-t} \right] \\
 &= Ah^{-1} \left[\frac{t^2 \Theta_h e^{-t}}{t^2} - \frac{te^{-t}}{t^2} + 1 - e^{-t} \right] \\
 &= \frac{Ah^{-1}}{t^2} \left[t^2 \Theta_h e^{-t} - te^{-t} + 1 - e^{-t} \right] \\
 &= \frac{Ah^{-1}}{t^2} \left[e^{-t} [t^2 \Theta_h - t - 1] + 1 \right] \\
 &= \boxed{\frac{Ah^{-1}}{t^2} [[t^2 \Theta_h - t - 1] e^{-t} + 1]} = \varphi'_h(t)
 \end{aligned}$$

$$14) b). \text{ Soit, } \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) = 1 - (t+1)e^{-t}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions de références

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) &= -[e^{-t} - te^{-t}] + e^{-t} \\
 &= -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}
 \end{aligned}$$

$$= t e^{-t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+_{*}$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+_{*}$.

et $f(0) = 0$ Donc $1 - (t+1)e^{-t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+_{*}$

$e_h'(t)$, et sa limite en $+\infty$ vaut 1
 son signe dépend de $0 \leq 1 - (t+1)e^{-t} \leq 1$
 $\forall t \in \mathbb{R}^+_{*}$

$$(\Theta h t^2 - t - 1)e^{-t} + 1 > 0.$$

$$\Leftrightarrow (\Theta h t^2 - t - 1)e^{-t} \geq -1.$$

$$\Leftrightarrow (1 + t - \Theta h t^2)e^{-t} \leq 1.$$

$$\Rightarrow (1 + t(1 - \Theta h t))e^{-t} \leq 1.$$

Le signe de e_h' dépend de la quantité ci-dessus.

$$(\Theta h t^2 - t - 1)e^{-t} + 1 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}(1 + t - \Theta h t^2) \leq e^{-t}(1 + t)$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}(1 + t - \Theta h t^2) - 1 \leq e^{-t}(1 + t) - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}(\Theta h t^2 - 1 - t) + 1 \geq 1 - e^{-t}(1 + t) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow e_h''(t) \geq 0 \quad \text{Donc } e_h \text{ est strictement croissante}$$

14) c) $t \mid 0 \quad \rightarrow \infty$
 $e_h \mid \rightarrow \Theta h$

$$(\Theta h(1 - A_{h-1}) - A_{h-1})$$

On sait que $e^0 - 1 \underset{0}{\sim} 0$.

$$\Leftrightarrow 1 - e^0 \underset{0}{\sim} 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-0} \underset{0}{\sim} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{-0}}{0} \underset{0}{\sim} 1 \quad \text{Donc } \frac{1 - e^{-0}}{0} \underset{0}{\rightarrow} 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e_h(t) &\xrightarrow{0^+} \Theta h (1 - A_{h-1}) - A_{h-1} \cdot 1 \\ &= \Theta h - \Theta h A_{h-1} - A_{h-1} \\ &= \Theta h - A_{h-1} (1 - \Theta h) \end{aligned}$$

en $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Theta h (1 - A_{h-1} e^{-t}) - A_{h-1} \frac{1 - e^{-t}}{t} \\ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Theta h (1 - 0) \quad \quad \quad \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_h(t) = \Theta h$$

15) a).

16) a).

16b).

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>288</u>	Nombre de pages :	Session : <u>2022</u>
	Épreuve de : <u>Mathématiques E HEC / ESSEC</u>		
Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

1c) on sait que $\gamma_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 & 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x) dx\right) \\
 &= 1 - \exp\left(+\int_0^t \frac{-f_T(x)}{1 - F_T(x)} dx\right) \quad \frac{0}{0} \\
 &= 1 - \exp\left[\ln\left(1 - F_T(x)\right)\right]_0^t \\
 &= 1 - \exp\left(\ln(1 - F_T(t)) - \ln(1)\right) \\
 &= 1 - \exp\left(\ln(1 - F_T(t))\right) \\
 &= 1 - (1 - F_T(t)) = F_T(t)
 \end{aligned}$$

Ainsi : $1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x) dx\right) = F_T(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$

25 /

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

18) c)

$$\sum_{i=1}^k A_{i-1}$$

