

E9-00159
960004
Maths E



Code épreuve : 296

Nombre de pages : 41

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E EmLyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

Partie A)

$$1) X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$X+1(\Omega) = \mathbb{N}^* = Y(\Omega)$$

$$\forall k \in Y(\Omega)$$

$$P(X+1=k) = P(X=k-1) = q^{k-1} p = P(Y=k)$$

$$Y \stackrel{d}{=} Z(p)$$

$$2) E(Y) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow E(X+1) = E(X) + 1 \quad \text{par linéarité de l'espérance}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = E(X) + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} - 1 = E(X)$$

$$\Rightarrow \frac{1-p}{p} = E(X) = \frac{q}{p}$$

$$V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

$$V(X+1) = \frac{q}{p^2}, \quad \text{donc par la forme quadratique de la variance}$$

1/n

$$V(X) = V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

```

3) . function X = simulate - X(p)
    y = 1
    while rand() > p
        y = y + 1
    end
    X = y - 1
endfunction.

```

Partie B)

```

4) function Z = simulate - Z(m, p)
    Z = 1
    for i = 1:m
        for j = 1:Z
            s = + simulate - X(p)
        end
        Z = s
    end
endfunction.

```

5) a) $U_0 = P(Z_0 = 0) = 0$ puisque $Z_0 = 1$ est un événement certain

$$U_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0) = p$$

5 b). $\forall m \in \mathbb{N}$,

$[Z_m = 0]$ le joueur n'a plus de jeton à l'instant m

$[Z_{m+1} = 0]$ le joueur n'a plus de jeton à l'instant $m+1$.

$[Z_m = 0] \subset [Z_{m+1} = 0]$ car si le joueur n'a plus de jeton à l'instant m , il n'a plus de jetons à l'instant $m+1$.

Donc $Z_m \subset Z_{m+1}$, il s'agit d'une suite d'événements croissants

Donc $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$, est monotone
Puisqu'il s'agit d'une probabilité, $U_m \in [0, 1]$ $\forall m \in \mathbb{N}$

Ainsi par théorème de limite monotone $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge, car elle est monotone et bornée.

$$U_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} l$$

6).

$R = \bigcup_{m=0}^{+\infty} [Z_m = 0]$, par théorème de limite monotone pour les probabilités il vient que

$$P(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n [Z_k = 0]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

Ainsi $P(R) = L$.

7) a) $\forall k \in \mathbb{N}$,

~~$P(Z_2 = 0)$
($Z_1 = k$)~~

~~X il possède k jetons qu'il mise
à l'instant 2.
La machine s'active, puisqu'il
ait 0 jeton à l'instant 2 il faut
que après l'activation de la machine,
à l'instant 1 il n'y ait plus de
jetons donc que la somme
 $\sum_{i=1}^n X_i$ soit nul.~~

$(Z_2 = 0)$
($Z_1 = k$).

Le joueur possède k jetons
à l'instant 1, et 0 à l'instant 2.
En versant k jetons la
machine lui renvoie 0 jeton
Donc $(X_1 + X_2 + \dots + X_k = 0)$.

$$\text{or } [(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = 0] = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_k = 0)$$

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1)
7b) $\forall k \in \mathbb{N}, P(Z_1=k) (Z_{n+1}=0) = (U_n)^k.$

$(Z_1=k)_{k \in \mathbb{N}}$, forment un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1}=0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P((Z_1=k) \cap (Z_{n+1}=0)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k) P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k) (U_n)^k \end{aligned}$$

or Z_1 soit la même loi que X

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1}=0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p U_n^k \\ &= p \sum_{k=0}^{+\infty} (q U_n)^k \end{aligned}$$

on reconnaît une série géométrique de raison $|q U_n| < 1$.

$$= p \times \frac{1}{1 - q U_n} = \frac{p}{1 - q U_n} = P(Z_{n+1}=0)$$

8) a) $U_{n+1} \xrightarrow{+ \infty} l$ par principe d'unicité

$$\text{Donc } \frac{p}{1 - qU_n} \xrightarrow{+ \infty} \frac{p}{1 - ql}.$$

Donc on a ainsi

$$l = \frac{p}{1 - ql}.$$

$$\Leftrightarrow l(1 - ql) = p.$$

$$\Leftrightarrow l(1 - ql) - p = 0$$

$$\Leftrightarrow l - ql^2 - p = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = p + ql^2 - l. \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (l-1)(ql - p)$$

$$\begin{aligned} \text{Preuve: } (l-1)(ql-p) &= ql^2 - pl - ql + p \\ &= ql^2 - (1-q)l - ql + p \\ &= ql^2 - l + ql - ql + p \\ &= ql^2 + p - l \quad (*) \end{aligned}$$

Donc l vérifie bien $0 = (l-1)(ql-p)$

8) b). $p > \frac{1}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session :
	Épreuve de : Mathématique E ML		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Exercice 1 suite
Partie c) 12 p).

$$\begin{aligned}
 V_m &= 1 - U_m \\
 &= 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{nm}} \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{nm} - 1 + \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{nm}} \\
 &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m \left(1 - \frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{nm}}
 \end{aligned}$$

Preuve $\forall m \in \mathbb{N}$ $P(N) : "0 \leq V_m \leq \left(\frac{q}{p}\right)^m"$

[I] par $m=0$.

$$V_0 = 1$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)^0 = 1.$$

Donc $0 \leq V_0 \leq \left(\frac{q}{p}\right)^0$
 $P(0)$ est vraie.

[H] Supposons $P(N)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$,
 montrons que $P(N+1)$ est vraie.
 tq : " $0 \leq V_{n+1} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$ "

on sait que :

$$0 \leq V_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

12 c). T admet une espérance si et seulement si $\sum m P(T=m)$ converge absolument.

$$\sum_{n=1}^N n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N.$$

$$\text{Or } V_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} V_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n - \underbrace{N V_N}_{\leq 0} \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} V_n - N V_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

on reconnaît une série géométrique de raison $\left|\frac{q}{p}\right| < 1$, donc convergente.

Par théorème de comparaison par les séries à termes positifs - $\sum V_n - N V_N$ converge,

$E(T)$ existe et a a :

$$E(T) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$\Rightarrow E(T) \leq \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}$$

13).

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématique & emlyn.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1) Partie C)

$$p \geq \frac{1}{2}.$$

g)

T la variable égale au nombre d'activation de la machine lorsque pour la première fois le joueur n'a plus de machine.

$$\forall m \in \mathbb{N}, (T \leq m) = (Z_m = 0)$$

Car il joue un nombre de fois inférieur ou égale à m et se retrouve sans jeton, donc il n'a plus de machine à l'initiation.

$$\text{Donc } P(T \leq m) = P(Z_m = 0) = U_m$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$P(T \leq m-1) = U_{m-1}$$

$$\Rightarrow P(T \leq m) = P(T = m) + P(T \leq m-1)$$

$$\Rightarrow P(T \leq m) = P(T = m) + P(T \leq m-1)$$

$$\Rightarrow P(T \leq m) - P(T \leq m-1) = P(T = m)$$

$$\Rightarrow U_m - U_{m-1} = P(T = m)$$

$$\text{or } U_m = 1 - V_m.$$

$$\Rightarrow 1 - V_m - (1 - V_{m-1}) = P(T = m)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T=m) = V_{m-1} - V_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$10). \sum_{n=1}^N n P(T=n) = \sum_{n=1}^N n (V_{n-1} - V_n)$$

$$= \sum_{n=1}^N n V_{n-1} - \sum_{n=1}^N n V_n.$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) V_j \Delta - \sum_{m=1}^N m V_m$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{1}_{(x_j)} V_j + \sum_{j=0}^{N-1} V_j - \sum_{m=1}^N m V_m \quad \underbrace{(x_1)}_{(x_1)}$$

Telescope

$$= 0 + \sum_{j=0}^{N-1} V_j - NV_N$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} V_j - N V_N$$

11). $\rho = \frac{1}{2}$

a) Beweis $\forall m \in \mathbb{N}$, " $U_m = \frac{m}{m+2}$ "

I per $m = 0$

$$0_0 = 0$$

Vraie d'après P2.

$f(0)$ ist sicher

A/

[H] Supposons $P(N)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$,
montrons que $P(N+1)$ est encore vraie telle
que $U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$$U_n = \frac{n}{n+1}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} U_n = -\frac{1}{2} \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} U_n = 1 - \frac{1}{2} \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2} U_n} = \frac{1}{1 - \frac{n}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} U_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2(n+1) - n}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2n + 2 - n}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n+2}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(n+1)}{n+2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$P(N+1)$ est vraie si $P(N)$ l'est

[C] la propriété est initialisée et héréditaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{n}{n+1}$$

11b). T achmet une expérience si $\sum k P(T=k)$ est absolument convergent

$$\text{or } \sum_{k=1}^m k P(T=k) = \sum_{k=1}^m k (U_k - U_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^m k \frac{k}{k+1} - \sum_{k=1}^m k \frac{(k-1)}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{k^2}{k+1} - \sum_{k=1}^m (k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{k^2}{k+1} - \sum_{k=1}^m k + m$$

$$\text{or } \frac{k^2}{k+1} \sim k$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^m \frac{k^2}{k+1}$$

11b) T achmet une expérience si et seulement si $\sum k P(T=k)$ converge absolument

$$\text{or } \sum_{m=1}^N m P(T=m) = \sum_{m=0}^{N-1} V_m - N V_N$$

$$\text{or } V_m = 1 - U_m$$

$$= 1 - \frac{m}{m+1}$$

$$= \frac{m+1-m}{m+1} = \frac{1}{m+1}$$

$$\text{Donc } \sum_{m=1}^N m P(T=m) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m+1} - N \left(\frac{1}{N+1} \right)$$

W

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 246

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématique E ML E.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1)

11) suite

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N(1+\frac{1}{N})}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1+\frac{1}{N}}$$

$$\text{or } \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1}$$

est une série de Riemann
divergente à un terme
près.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1+\frac{1}{N}} \text{ diverge.}$$

Donc T n'achève pas l'espérance

12) a). $\forall m \in \mathbb{N}$.

$$W_{m+1} = \frac{1 - U_{m+1}}{\frac{p}{q} - U_{m+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1-qU_m}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qU_m}}$$

$$= \frac{\frac{1-qU_m-p}{1-qU_m}}{\frac{p(1-qU_m)-pq}{q(1-qU_m)}}$$

$$= \frac{1-qU_m-p}{(1-qU_m)} \cdot \frac{q(1-qU_m)}{p(1-qU_m)-pq}$$

$$= \frac{(1-qU_m-p)q}{p(1-qU_m)-q}$$

$$= \frac{(1-qU_m)q}{p(1-qU_m)-q}$$

U_{m+1}

$$(2) a). \quad W_{m+1} = \frac{1 - U_{m+1}}{\frac{p}{q} - U_{m+1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{p}{1 - qU_m}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1 - qU_m}}$$

$$= \frac{\frac{1 - qU_m - p}{1 - qU_m}}{\frac{p(1 - qU_m) - p}{q(1 - qU_m)}}$$

$$= \frac{1 - qU_m - p}{(1 - qU_m)} \cdot \frac{q(1 - qU_m)}{p(1 - qU_m)}$$

$$= \frac{(1 - qU_m - p) q}{p(1 - qU_m)}$$

$$= \frac{q}{p} \left(\frac{1 - qU_m - p}{1 - qU_m} \right)$$

Admettons $\forall m \in \mathbb{N}$, $W_{m+1} = \frac{q}{p} W_m$.

12) b) (W_m) est géométrique de raison $\frac{q}{p}$.

$$\forall m \in \mathbb{N}, W_m = W_0 \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

$$W_0 = \frac{1-0}{\frac{p}{q}-0} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}.$$

$$W_m = \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} = \frac{1 - U_m}{\frac{p}{q} - U_m}.$$

$$(\Rightarrow) \left(\frac{p}{q} - U_m\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} = 1 - U_m$$

$$(\Rightarrow) \left(\frac{q}{p}\right)^m - U_m \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} = 1 - U_m.$$

$$(\Leftarrow) \left(\frac{q}{p}\right)^m - 1 = \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} U_m - U_m.$$

$$(\Leftarrow) \left(\frac{q}{p}\right)^m - 1 = U_m \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} - 1\right).$$

$$(\Leftarrow) 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m = U_m \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1}\right)$$

$$(\Rightarrow) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1}} = U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, V_m = 1 - U_m \quad \text{et} \quad U_m = 1 - V_m.$$

$$\Rightarrow V_m = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1}}.$$

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématique E EMLYN

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1) a). Soit M et $N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
a-t-on $\text{tr}(M + \lambda N) = \text{tr}(M) + \lambda \text{tr}(N)$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(M + \lambda N) &= \sum_{i=1}^2 (m_{ii} + \lambda n_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^2 m_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^2 n_{ii} \end{aligned}$$

par linéarité
de la somme.

$$= \text{tr}(M) + \lambda \text{tr}(N)$$

Donc tr est linéaire.

1 b). $\dim(\text{Im}(\text{tr})) \leq 1$.

or il est absurde de dire que
 $\dim \text{Im}(\text{tr}) = 0$ car par exemple
 $\text{tr}(I_2) = 2$.

$$\text{Donc } \dim(\text{Im}(\text{tr})) = 1$$

$$\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{R}$$

Par théorème du rang il vient que

$$4 = \dim \ker(\text{tr}) + \text{rg}(\text{tr})$$

$$\Rightarrow 3 = \dim \ker(\text{tr})$$

or remarquons que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(\text{tr})$

$$\ker(\text{tr}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. 1. Montrons que f est linéaire.

Soit M et $N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on
 $f(M + \lambda N) = f(M) + \lambda f(N)$?

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= M + \lambda N + \text{tr}(M + \lambda N) \mathbb{I} \quad \text{or tr est linéaire} \\ \text{il vient que} &= M + \lambda N + [\text{tr}(M) + \lambda \text{tr}(N)] \mathbb{I} \\ &= M + \lambda N + \text{tr}(M) \mathbb{I} + \lambda \text{tr}(N) \mathbb{I} \\ &= M + \text{tr}(M) \mathbb{I} + \lambda [N + \text{tr}(N) \mathbb{I}] \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

f est linéaire.

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$
 or $f(M) = M + \text{tr}(M) \mathbb{I}$ or $\text{tr}(M)$ est un réel

Donc $M + \text{tr}(M) \mathbb{I} \in M_2(\mathbb{R})$

Bilan: f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

$$3) a) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot J \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + 2E_{12} + E_{21} \end{aligned}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = E_{12}.$$

$$f(E_{21}) = E_{21}$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2E_{12} + E_{21} + E_{22}.$$

$$A = \underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}$$

$f(E_{11}) \quad f(E_{12}) \quad f(E_{21}) \quad f(E_{22})$

$$3b) \cdot (A - I_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A - I_n)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

3c) on doit $P(X) = (X-1)^2$ est polynôme annulateur de A

$$\text{Ainsi } P(X) = 0$$

$$\Rightarrow (X-1)^2 = 0$$

$$\boxed{X=1}$$

$\lambda = 1$ est l'unique valeur propre possible.

or $A - I_n$ n'est pas inversible car elle possède 2 valeurs nulles

$$\text{Donc } \text{sp}(A) = \{1\}$$

A a une valeur propre elle est diagonalisable si et seulement si

$$A \sim I_n$$

$\exists P$ inversible telle que

$$\text{Donc } A = P^{-1} I_n P$$

$$= P^{-1} I_n P$$

$$= P^{-1} P$$

$$= I_n$$

or $A \neq I_n$ Donc A n'est pas diagonalisable

3d). $0 \notin \text{sp}(A)$ donc A est inversible.

on résout le système :

$$\begin{cases} x \\ 2x + y \\ x + z \\ \quad \quad \quad z \\ \quad \quad \quad t \end{cases} = \begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \end{cases}$$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2021
	Épreuve de : Mathématique E emlyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Exercice 2 n°.6

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} t = d \\ x = a \\ 2a + y + 2d = b \Rightarrow y = b - 2a - 2d \\ a + z + d = c \Rightarrow z = c - a - d \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$x = a$$

$$y = -2a + b - 2d$$

$$z = -a + c - d$$

$$t = d$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) a). $S \in M_2(\mathbb{R})$.

$1 \in \text{sp}(f)$ si et seulement si

$f - \text{Id}$ est non injectif. ~~Il y a~~ bijectif.

supposons $f - \text{Id}$ bijectif, il existe g telle que $(f - \text{Id}) \circ g = \text{Id}$.

$\exists M \in M_2(\mathbb{R})$ car M est non nul telle que

$$f(M) = M.$$

$$(\Rightarrow) M + \text{tr}(M)M = M$$

$$(\Rightarrow) \text{tr}(M)M = 0$$

$$M \neq 0$$

$$\text{Donc } \text{tr}(M) = 0.$$

$$M \in \ker(\text{tr}).$$

Donc $1 \in \text{sp}(f)$ et

$$\dim E_1(f) = 3 = \dim \ker(\text{tr})$$

$$\text{hd). } f(J) = J + \text{tr}(f)J \\ = (1 + \text{tr}(f))J.$$

J est vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \text{tr}(f)$

$$\text{hc) i) } \text{tr}(J) \neq 0.$$

$$1 + \text{tr}(f) \in \text{sp}(f) \\ 1 \in \text{sp}(f).$$

$$\dim E_1(f) = 3 \text{ et } \dim E_{1+\text{tr}(f)}(f) \geq 1.$$

$$\text{sp}(f) = \{1, 1 + \text{tr}(f)\}$$

$$\dim E_1(f) + \dim_{1+\text{tr}(f)}(f) \geq 4$$

Donc f est bien diagonalisable

$$4c)ii) \quad \text{tr}(f) = 0.$$

$$\exists \lambda \neq 1 \text{ tel que } \lambda \in \text{sp}(f). \\ \text{et } M \in E_\lambda(f)$$

$$\text{Donc } f(M) = \lambda M.$$

or I est vecteur propre

$$\begin{aligned} f(I) &= I + \text{tr}(f)I \\ f(I) &= I \end{aligned} \quad \text{tr}(f) = 0.$$

4c)iii) f est diagonalisable si et seulement
si $\text{tr}(f) \neq 0$

4d).

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématique EML E		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Exercice 3).

1) f est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$
comme quotient et composition de fonctions
de références dont le dénominateur
ne s'annule pas.

en 0 :

$$\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$$

$$\Rightarrow -\ln(1-t) \sim t$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln(1-t)}{t} \sim 1 = f(0)$$

$$\text{Donc } f(t) \xrightarrow{0} 1 = f(0)$$

f est continue sur $] -\infty, 1[$.

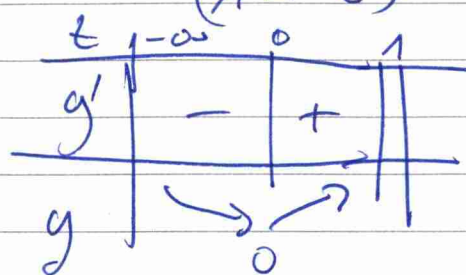
2a). $\forall t \in] -\infty, 1[$ soit $g(t) = \frac{t}{1-t} + \ln(1-t)$.

g est dérivable sur $] -\infty, 1[$ comme somme,
quotient et composition de fonctions
références

$$\forall t \in] -\infty, 1[, g'(t) = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} + \frac{-1}{1-t}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{-1(1-t)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{1 - 1 + t}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}$$



g admet un minimum en 0.

$$g(0) = 0, \quad \forall t \in]-\infty, 1[, g(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$$

2b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ et $]0, 1[$ comme quotient de fonctions de fraction de références.

$$\forall t \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[.$$

$$f'(t) = -\frac{-\frac{t}{1-t}}{t^2} - \ln(1-t)$$

$$= \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$$

$$\text{or } \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0 \quad \forall t \in]-\infty, 1[.$$

Puis par quotient de réels positifs.

$$\forall t \in]-\infty; 1[, f'(t) \geq 0$$

2c) $\forall t \in]-\infty; +\infty[$, $f'(t) \geq 0$
 f est stricte ment croissante sur $]-\infty; +\infty[$

$$3a) \cdot \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\Rightarrow \ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$3b) \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

$$= \frac{-\frac{\ln(1-x)}{x} - 1}{x}$$

$$= \frac{-\ln(1-x) - x}{x^2}$$

$$= \frac{-(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x}{x^2}$$

$$= \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x^2) \right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \varepsilon(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$3c). f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{t^2(1-t)}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{t + (1-t)\left(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2(1-t)}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{\cancel{t} - \cancel{t} - \frac{t^2}{2} + t^2 + o(t^2)}{t^2(1-t)}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2(1-t)}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{\cancel{t^2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(t^2) \right)}{\cancel{t^2}(1-t)}$$

$$\stackrel{0}{=} \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(t^2)}{1-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f' est continue sur $] -\infty, 1[$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématique E EmL

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 8 suite.

4)

$$\begin{aligned} \ln(1-t) &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \\ -\frac{\ln(1-t)}{t} &= \frac{-\ln(t(-1+\frac{1}{t}))}{t} = \frac{-\ln(t) - \ln(-1+\frac{1}{t})}{t} \\ &= -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{\ln(-1+\frac{1}{t})}{t} \end{aligned}$$

~~$\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$~~

$$4) \quad f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$$

$$\ln(1-t) \xrightarrow{1} -\infty$$

$$-\ln(1-t) \xrightarrow{1} +\infty$$

$$f(t) \xrightarrow{1} +\infty \quad \text{par quotient de limite}$$

Il y a une asymptote verticale en 1.

$$\frac{\ln -\infty.}{-\frac{\ln(1-t)}{t}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)}{t}$$

$$\frac{1}{1-t} \xrightarrow{-\infty} 1.$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \xrightarrow{-\infty} 0$$

par composition de
limite, $\ln$ étant
continue sur $\mathbb{R}^+$.

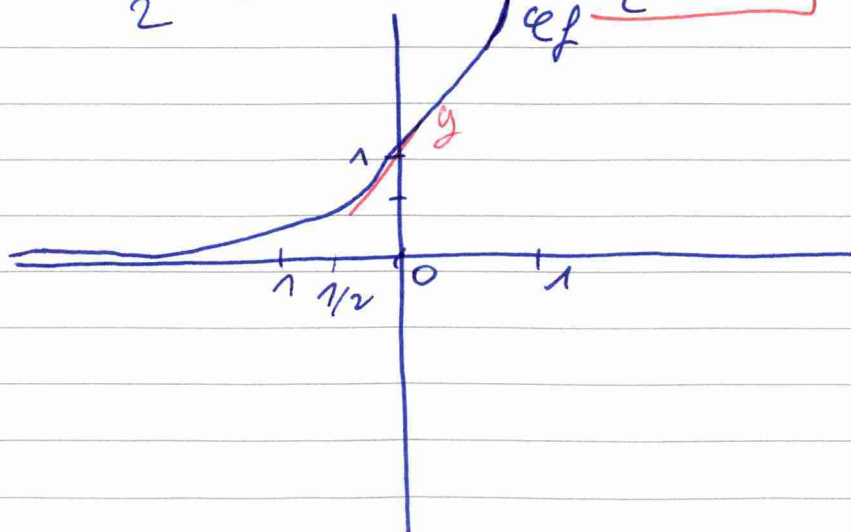
Par produit de limite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

5). Équation de la tangente en 0.

$$y = f'(0)(x) + f(0)$$

$$= \frac{1}{2}x + 1.$$



Partie B).

f est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ donc admet des primitives. on note F l'une d'entre elles.

$$\begin{aligned} 6) \quad L(n) &= \int_0^n f(t) dt = [F(t)]_0^n \\ &= F(n) - F(0) \end{aligned}$$

L est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ (comme comp. fonction) ~~car~~ puisque f est $\mathcal{C}^1$.

$$\forall n \in] -\infty, 1[, \quad L'(n) = f(n)$$

$$7) \quad \forall (A, B) \in]0, 1[^2$$

$$\forall (A, B) \in]0, 1[^2 \quad \int_A^B f(t) dt = \int_A^B -\frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

on pose $u = 1-t$, u est affine sur $\mathbb{R}^+$.

$$(1) \quad du = u' dt = -dt$$

$$(2) \quad -\frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\frac{\ln(u)}{1-u} dt$$

$$= \frac{\ln(u)}{1-u} (-1) dt$$

$$= \frac{\ln(u)}{1-u} du$$

$$(3) \quad \begin{aligned} & \int_A \rightarrow 1-A \\ & \int_B \rightarrow 1-B \end{aligned} \quad \text{Par changement de variable affine on obtient:}$$

$$\int_A^B f(t) dt = \int_{1-B}^{1-A} -\frac{\ln(t)}{1-t} dt$$

7b). $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0, 1[$.

$$\sum_{k=0}^m -t^k \ln(t) + \frac{-t^{m+1} \ln(t)}{1-t}$$

↗ somme géométrique.

$$= -\ln(t) \sum_{k=0}^m t^k + \frac{-t^{m+1} \ln(t)}{1-t}$$

$$= -\ln(t) \frac{1-t^{m+1}}{1-t} + \frac{-t^{m+1} \ln(t)}{1-t}$$

$$= \frac{-\ln(t) + \ln(t)t^{m+1} - t^{m+1} \ln(t)}{1-t}$$

$$= -\frac{\ln(t)}{1-t}$$

7c). on pose $A > 0$.

$$\int_A^1 -t^k \ln(t) dt = - \int_A^1 t^k \ln(t) dt$$

$$u(t) = \ln(t) \quad u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = t^k \quad v(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

car v est en sur $[0, 1]$.
Par intégration par parties:

Copie anonyme - n°anonymat : 960004

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 2yb

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de :

Mathématique EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exo 3 suite.
Par IPP on a :

$$= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_A^1 - \frac{1}{k+1} \int_A^1 t^k dt.$$

Donc par IPP :

$$\int_A^1 -t^k \ln(t) dt = - \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_A^1 + \frac{1}{k+1} \int_A^1 t^k dt$$

$$Alors = - \left(0 - \frac{A^{k+1}}{k+1} \ln(A) \right) + \frac{1}{k+1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{A^{k+1}}{k+1} \right]$$

$A \rightarrow 0$ par raisonnement comparées on a :

$$= -(0 - 0) + \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{(k+1)} \cdot \left(\frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

on a bien $\int_0^1 1 - t^u \ln(t) = \frac{1}{(u+1)^2}$

7d). $-t \ln(t) \xrightarrow{0} 0$ par croissance comparées.

$$\frac{-t \ln(t)}{1-t} \xrightarrow{0} 0$$

$$\frac{-t \ln(t)}{1-t} = \frac{-t \ln(t)}{t(-1+\frac{1}{t})}$$

$$= \frac{-\ln(t)}{-1+\frac{1}{t}} \xrightarrow{1} 0$$

~~$\forall t \in]0, 1[, \ln(t) < 0$
 $\Rightarrow -t \ln(t) > 0$
 $\Rightarrow \frac{-t \ln(1-t)}{1-t} > 0$~~

~~$(1-t) > 0$~~

~~Donc $\frac{-t \ln(t)}{(1-t)} > 0$~~

$$\begin{aligned}
 t &< 1. \\
 \Rightarrow 0 &< 1-t. \\
 \Rightarrow 0 &> \frac{1}{1-t}. \\
 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-t} &< 1. \\
 \Rightarrow \frac{-t \ln(t)}{1-t} &< -t \ln(t)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-t}$$

$$1-t$$

$$t \ln(t) \leq 0$$

$$t \ln(t) \leq \frac{1}{1-t}$$

Admettons qu'il existe un majorant M telle que $\frac{-t \ln(t)}{1-t} \leq M$.

$$\forall t \in]0, 1[.$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq t \leq 1. \\
 \Rightarrow 0 &\geq -t \geq -1. \\
 \Rightarrow 1 &\geq 1-t \geq 0 \\
 \Rightarrow 1 &\leq \frac{1}{1-t} \leq \infty
 \end{aligned}$$

par croissance
de l'inverse
sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\Rightarrow -t \ln(t) \leq \frac{-t \ln(t)}{1-t} \leq 0.$$

7 d). Admettons que $-\frac{t \ln(t)}{1-t}$ est borné.

Alors que $m \leq -\frac{t \ln(t)}{1-t} \leq M$.

$$\Rightarrow m t^m \leq -\frac{t^{m+1} \ln(t)}{1-t} \leq M t^m.$$

Les fonctions intégrées sont continues sur $]0,1[$ par croissance de l'intégrale n'a:

~~$\int_0^1 m dt \leq \int_0^1$~~

$$\int_0^1 t^m m dt \leq \int_0^1 -\frac{t^{m+1} \ln(t)}{1-t} dt \leq M \int_0^1 t^m dt$$

$$\Rightarrow m \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 \leq \int_0^1 -\frac{t^{m+1} \ln(t)}{1-t} dt \leq M \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m+1} \leq \int_0^1 -\frac{t^{m+1} \ln(t)}{1-t} dt \leq \frac{M}{m+1}$$

Par théorème d'écrasement:

$$\lim \int_0^1 -\frac{t^{m+1} \ln(t)}{1-t} dt = 0$$

$$7 e). -\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} -t^n \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$$

~~Les fonctions intégrées sont continues sur $]0,1[$.~~

$$\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} -t^n \ln(t) dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$$

Par linéarité de l'intégrale.

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>296</u>	Nombre de pages :	Session : <u>2022</u>
	Épreuve de : <u>EMC E Mathématiques</u>		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{-t^k \ln(t)}{1-t} dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$$

L'intégrale converge donc.

et par passage à la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + 0 = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$

30 /

f) L est ainsi prolongeable par continuité en 1.

$$\text{Puisque } \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

$A \rightarrow 0, B \rightarrow 1.$

dans le changement de variable de 7a)

Pour L est bien prolongeable, et $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$

g)

Partie C).

g/a). $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2.$

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi(x, y) &= L'(x) - (-y) L'(-xy) \\ &= f(x) + y f(-xy) \end{aligned}$$

$$\partial_2 \Phi(x, y) = f(y) + x f(-xy)$$

g/b). ~~$\mathbb{R}^2$~~ $\nabla = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y) + x f(-xy) = 0 \\ f(x) + y f(-xy) = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y) + x f(-xy) = 0 \\ x f(x) - y f(y) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x f(x) &= y f(y) \quad x \text{ et } y \neq 0. \\ f(x) &= f(y). \end{aligned}$$

A checkerons. $(-1, -1)$ est un point critique.

10a) ~~A checkerons~~ le Hessien au point

$$\partial_{11}^2 \Phi(x, y) = f'(x) - y^2 f(-xy)$$

$$\partial_{22}^2 \Phi(x, y) = f'(y) - x^2 f(-xy)$$

$$\partial_{12}^2 \Phi(x, y) = \partial_{21}^2 \Phi(x, y)$$

théorème de Schwarz.

$$= f(-xy) - yx f(-xy).$$

On en $(-1, -1)$ on a bien.

$$\begin{aligned} \partial_{11} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \partial_{12} &= \frac{1}{2} - (-1) \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Admettons la Hessienne

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{10b) } \det(H - \lambda I_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\sqrt{\frac{1}{4}} & \lambda &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Sp}(H) = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{11) } \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$$

Φ ne possède pas d'extremum local sur $(-\infty, 0[)^2$.