

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

P3-00016
179760
Maths 2S



Code épreuve : 283

Nombre de pages : 25

Session : 2022

Épreuve de : Maths 2S ESCEP/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

a) (a)

On compte le nombre total de paquets achetés jusqu'à l'obtention de n vignettes différentes. Soit le premier paquet (x_1), le nombre de paquets nécessaires pour l'obtention d'une deuxième vignette (x_2), ..., et celui nécessaire pour obtenir une n -ième vignette différente des $n-1$ précédentes.

$$\text{d'où } P_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

(b).

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

x_i compte le nombre de tentatives avant l'obtention d'un premier succès, où le succès est :

A : "tirer une vignette différente des $i-1$ vignettes tirées jusqu'à ce"

Il y a $n-i+1$ vignettes n'ayant pas encore été tirées et par équiprobabilité

$$P(A) = \frac{n-i+1}{n}$$

d'où

$$x_i \text{ est } \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

(2) (a) Soit $k \geq 2$.

On a d'une part

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\text{et } k(k+1) = k^2 + k \geq k^2$$

donc par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\text{et } \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\text{et } k(k-1) = k^2 - k \leq k^2$$

d'où $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$, toujours par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

$$\text{Ainsi } \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\text{c'est-à-dire } \boxed{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

(b) Soit $n \geq 2$.

On somme (*) pour k de 2 à n

$$(*) : \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{téléscopage})$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \text{ et}$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ d'où } \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n.$$

En sommant (*) de $k=2$ à n , il vient en suite

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\text{d'où } S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Ainsi $\boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}}$

(c).

On a : $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$

et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est une suite croissante
(somme à termes strictement positifs).

donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, S_n \leq 2$, donc S_n est majorée
et S_n croît.

$\boxed{S_n \text{ est convergente}}$ d'après le théorème de
la limite monotone

de plus, par passage à la limite dans
l'inégalité.

$$\boxed{\frac{3}{4} \leq S \leq 2}$$

(d) Soit $n \geq 1$
d'après (c)

$$\frac{3}{4} \leq S \leq 2.$$

$$\text{donc } \frac{3}{4} - S_n \leq S - S_n \leq 2 - S_n.$$

$$\text{avec } -S_n \geq \frac{1}{n} - 2 \text{ donc}$$

(e)

$$N = 10\,000\,000$$

③ (a) Soit $n \geq 1$.
Soit $k \in [n; n+1]$

$$n \leq k \leq n+1$$
$$\text{et } \frac{1}{n} \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n+1}$$

On intègre sur $[n; n+1]$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx$$

$$\text{si } \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{si } \left| \frac{1}{n} \geq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \geq \frac{1}{n+1} \right|$$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths 28 ESCP/HEC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(b) Soit $n \geq 1$.

On note

$H(n) : "0 \leq u_n \leq 1"$

• $n = 1$

$$u_1 = H_1 - 0 = 1 \in [0; 1].$$

donc H_1 est vraie

• on suppose $H(n)$ vraie pour $n \geq 1$ fixé. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.

$$H_{n+1} - \ln(n+1) = H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1).$$

$$\text{et d'après (a)} \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \quad (*)$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \leq -\ln(n)$$

$$\text{ie} \quad H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \leq H_n - \ln(n) \\ \in [0; 1] \\ \text{par H.R.}$$

$$\text{donc} \quad \underline{H_{n+1} - \ln(n+1) \leq 1.}$$

d'autre part :

$$H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \geq H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n)$$

$$\geq 0 + \frac{1}{n+1} \geq 0 \quad (\text{M.R.})$$

$$\text{d'où} \quad \underline{0 \leq u_{n+1} \leq 1}$$

$H(n+1)$ est donc vraie, ce qui achève la récurrence

Ainsi: $\boxed{\forall n \geq 1, 0 \leq u_n < 1.}$

(c). On calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad \text{avec } \frac{n}{n+1} \leq 1 \\ &\quad \text{donc } \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 0 \\ &\leq 0 \\ &\text{d'après (a)} \end{aligned}$$

(u_n) décroît et est bornée: elle converge vers une limite $\ell \in [0;1]$ d'après le théorème de la limite monotone

4. Comme $\forall i \in [1;n], E(X_i) = \frac{n}{n-i+1}$ et que

$$C_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad C_n \text{ admet une}$$

espérance par linéarité de l'espérance et on a

$$E(C_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H(n) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{E(C_n) = n H_n.}$$

5

si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i admet une variance.

Par indépendance des X_i , C_n admet une variance égale

$$V(C_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$$

$$\text{et } V(X_i) = \frac{n-i+1}{n} \times \frac{1}{\frac{(i-1)^2}{n^2}} = \frac{n(n-i+1)}{(i-1)^2}$$

$$\text{donc } V(C_n) = \sum_{i=2}^n \frac{n(n-i+1)}{(i-1)^2} = n \sum_{i=2}^n \frac{n-i+1}{(i-1)^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } V(X_1) \\ = V(X_i) = 0 \\ \text{car } X_1 \\ \text{est } \text{constante} \\ = 1 \end{array} \right)$$

$$= n \left(n \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)^2} - \sum_{i=2}^n \frac{i}{(i-1)^2} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)^2} \right)$$

$$= n \left(n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \right)$$

$$= n \left(n S_{n-1} - H_{n-1} + S_{n-1} \right)$$

$$= n^2 S_{n-1} - n H_{n-1}$$

$$= n^2 \left(S_n - \frac{1}{n^2} \right) - n \left(H_n - \frac{1}{n} \right)$$

$$= n^2 S_n - 1 - n H_n + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{= n^2 S_n - n H_n}$$

6) (a) Soit $a > 0$.
on calcule

$$P(|C_n - n H_n| \geq a n)$$

$$= P(|C_n - n H_n|^2 \geq a^2 n^2) \leq \frac{E((C_n - n H_n)^2)}{a^2 n^2}$$

(inégalité de Markov car

$(C_n - n H_n)^2$ est positif)

$$\text{si } P(|C_n - n H_n| \geq a n) \leq \frac{V(C_n)}{a^2 n^2} \quad (\text{car } n H_n = E(C_n))$$

$$\text{avec } \frac{V(C_n)}{a^2 n^2} = \frac{n^2 S_n - n H_n}{a^2 n^2} = \frac{S_n}{a^2} - \frac{H_n}{n}$$

$$\leq S_n / a^2$$

d'où : $\boxed{P(|C_n - nH_n| \geq a_n) \leq \frac{8}{e^2}}$

(c)

D'après la question précédente

$$P(|C_n - nH_n| \geq a_n) \leq \frac{8}{e^2}$$

donc $P\left(\left|\frac{C_n}{n} - H_n\right| \geq a\right) \leq \frac{8}{e^2}$.

$\forall c > 1$, $c-1 > 0$, en notant $c-1 = a$, on a donc

$$P\left(\left|\frac{C_n}{n} - H_n\right| \geq c-1\right) \leq \frac{8}{(e-1)^2}$$

avec

$$P\left(\left|\frac{C_n}{n} - H_n\right| \geq c\right) \leq P\left(\left|\frac{C_n}{n} - H_n\right| \geq c-1\right)$$

car : $\forall \omega \in \Omega$,

$$\left|\frac{C_n(\omega)}{n} - H_n(\omega)\right| \geq c \Rightarrow \left|\frac{C_n(\omega)}{n} - H_n(\omega)\right| \geq c-1$$

d'où $\boxed{P\left(\left|\frac{C_n}{n} - H_n\right| \geq c\right) \leq \frac{8}{(c-1)^2}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths 28 ESCP/HEC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

⑦.

$$M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^* \quad \text{car } \forall n \geq 1, T_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(T_1 \leq x, \dots, T_n \leq x) \\ &= P(T_1 \leq x)^n \quad (\text{par indépendance des } (T_n)_{n \geq 1} \text{ qui suivent tous la même loi TCP } \mathcal{E}(1)). \end{aligned}$$

$$= (1 - e^{-x})^n$$

$$\text{d'où } F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} (1 - e^{-x})^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ car $1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - 1 = 0$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

F_{M_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

T_n admet donc une densité obtenue en dérivant F_{M_n} sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n - (e^{-x}) (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \boxed{f_n : x \mapsto \begin{cases} n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}}$$

(8).

(a)

Une densité de Z est
 $g: x \mapsto \begin{cases} (n+1)e^{-(n+1)x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

$\forall t \in [0; \infty]$, $x-t > 0$ donc on a

$$\begin{aligned} f_n(t) g(x-t) &= ne^{-t} (1-e^{-t})^{n-1} \times (n+1)e^{-(n+1)(x-t)} \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x} e^{(n+1)t} \times ne^{-t} (1-e^{-t})^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } (1-e^{-t})^{n-1} &= (e^{-t}(e^t-1))^{n-1} \\ &= e^{-(n-1)t} (e^t-1)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } e^{(n+1)t} ne^{-t} (1-e^{-t})^{n-1} &= e^{(n+1)t} ne^{-t} e^{-(n-1)t} (e^t-1)^{n-1} \\ &= ne^{(n+1)t} e^{-nt} (e^t-1)^{n-1} \\ &= ne^t (e^t-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{f_n(t) g(x-t) = (n+1)e^{-(n+1)x} ne^t (e^t-1)^{n-1}.}$$

(b). Soit $n \geq 1$.

9. f est définie et positive sur $\mathbb{R}$
 Elle est continue sur $\mathbb{R}$, (elle aurait pu ne pas
 l'être en un nombre fini de points)

et

$$\int_A^B f(x) dx = \left[e^{-e^{-x}} \right]_A^B$$

$$= e^{-e^{-B}} - e^{-e^{-A}}$$

avec $e^{-B} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{} 0$ donc par continuité
 d'exp et composition de
 limites
 $e^{-e^{-B}} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{} 1$

$e^{-A} \xrightarrow[A \rightarrow -\infty]{} +\infty$ donc, il vient de même
 $e^{-e^{-A}} \xrightarrow[A \rightarrow -\infty]{} 0$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

f est bien une densité de probabilité

(b) (a).

$$W_n(\Omega) = J \cdot \ln(n) + \omega \quad \text{car } Z_i(\Omega) = \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in \{1, n\}$$

Soit $x \in W_n(\Omega)$

$$P(W_n \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^n Z_i \leq x + \ln(n)\right).$$

$$= \left(1 - e^{-(x + \ln(n))}\right)^n \quad \text{d'après (7)}$$

$$= \left(1 - e^{-x} e^{-\ln(n)}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{e^{-x}}{e^{\ln(n)}}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n.$$

D'où

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x > -\ln(n) \\ 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \end{cases}$$

(b).

Ainsi.

$$\forall x > -\ln(n), F_{W_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \\ = e^{n \ln(1 - e^{-x}/n)}$$

$$\text{avec } \ln(1 - e^{-x}/n) \underset{\infty}{\sim} -e^{-x}/n \quad \text{car } \frac{e^{-x}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\text{donc } n \ln(1 - e^{-x}/n) \underset{\infty}{\sim} -e^{-x}$$

$$\text{et } n \ln(1 - e^{-x}/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -e^{-x}$$

Par continuité d'exp et composition de limites, il vient en outre

$$e^{n \ln(1 - e^{-x}/n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-e^{-x}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths 28 ESCP/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

dl $\mathbb{R}$

$$\forall x > \ln(n)$$

$$F_{W_n}(x) \rightarrow e^{-x} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On a montré que $F_{W_n}(x) \rightarrow F(x)$ pour tout $x \in W_n(\mathbb{R})$

On a bien $\boxed{W_n \xrightarrow{x} \mathbb{R}}$ car x suit une loi de Gumbel.

(a)

(a)

```

1 | y = sumiel V(n)
  | S = 0
  | for i = 1 : n
  |   x = geomrnd(1,1, 'geom', (n-i+1)/n);
  |   S = S + x;
  | end
  | % y = S/n - log(n);
  | end function

```

(b)

```

V = ones(1, 1000)
for i = 1 : 1000
    V[i] = sumiel V(n)
end

```

(c).

Les graphiques envoient la superposition du graphe de la fonction f et le diagramme en bâtons représentant les valeurs prises par $(V_n)_{n \geq 1}$ (en abscisse) et leur fréquence d'apparition (en ordonnée).

On peut conjecturer que, pour de grandes valeurs de n

$V_n \stackrel{d}{\rightarrow} X$ où X suit une loi de Gumbel.

(a). On calcule.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 P(V = k) &= P(L \leq k) = 1 - P(L > k) \\
 &= P(k-1 < U \leq k) \\
 &= P\left(\frac{k-1}{a} \leq U \leq \frac{k}{a}\right) \\
 &= P\left(U \leq \frac{k}{a}\right) - P\left(U \leq \frac{k-1}{a}\right) \\
 &= 1 - e^{-p \times \frac{k}{a}} - \left(1 - e^{-p \times \frac{k-1}{a}}\right) \\
 &= 1 - e^{k \ln(p)} - 1 + e^{(k-1) \ln(1-p)} \\
 &= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\
 &= (1-p)^{k-1} (1 - 1 + p) = p(1-p)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît alors une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

et on a $V \stackrel{d}{\rightarrow} \mathcal{G}(p)$.

(3. a)

$\forall \omega \in \Omega$

$$V(\omega) = \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1$$

$$\alpha U(\omega) - 1 \leq \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor \leq \alpha U(\omega)$$

$$\text{donc } \alpha U(\omega) \leq \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1 \leq \alpha U(\omega) + 1$$

$$\text{ie } \alpha U(\omega) \leq V(\omega) \leq \alpha U(\omega) + 1$$

$$\text{d'où } V(\omega) - \alpha U(\omega) \in [0; 1]$$

$$\text{ie } \boxed{(V - \alpha U)(\Omega) \in [0; 1]}$$

on a ensuite

$$(V - \alpha U)^2(\Omega) \in [0; 1]$$

$$\text{donc } E((V - \alpha U)^2) \leq 1$$

$$\text{comme } E(V - \alpha U) \leq 1$$

$$E((V - \alpha U)^2) \leq 1$$

ainsi

$$V(V - \alpha U) = E((V - \alpha U)^2) - E((V - \alpha U))^2 \leq 1$$

$$(\text{et } V(V - \alpha U) \geq 0)$$

$$\text{d'où : } \boxed{V(V - \alpha U) \leq 1}$$

(b)

pour l'absence d'existence,

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{or } |XY| \leq \frac{1}{2} (X^2 + Y^2)$$

$$(\text{en effet } (X - Y)^2 = X^2 - 2|XY| + Y^2)$$

$$\text{or } (X - Y)^2 \geq 0$$

$$\text{donc } X^2 + Y^2 \geq 2|XY|$$

et $E(X^2)$, $E(Y^2)$ existent donc par linéarité

$E(\frac{1}{2}(X^2 + Y^2))$ existe donc par domination

$E(|XY|)$ existe si $E(XY)$ existe

$\text{cov}(X, Y)$ existe

on a

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= \text{cov}(X+Y, X+Y) \\ &= \text{cov}(X, X) + 2\text{cov}(X, Y) + \text{cov}(Y, Y) \\ &= V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y) \end{aligned}$$

$$\text{et } V(X-Y) = V(X) - 2\text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

d'où

$$V(X+Y) + V(X-Y) = 2(V(X) + V(Y)).$$

$$\text{et } V(X-Y) \geq 0$$

$$\text{donc } \boxed{V(X+Y) \leq 2(V(X) + V(Y))}.$$

(c)

Ainsi

$$\begin{aligned} V(V-U) &= V(V - \alpha U + \alpha U - U) \\ &= V(V - (1-\alpha)U - \alpha U) \\ &\leq 2(V(V - \alpha U) + V(-(1-\alpha)U)) \text{ d'après (3)(a)} \\ &\leq 2 + 2V(-(1-\alpha)U) \text{ car } V(V - \alpha U) \leq 1 \\ &\quad \text{d'après (3)(b).} \end{aligned}$$

$$\leq 2 + 2(1-\alpha)^2 V(U) \text{ avec } V(U) = \frac{q}{p^2} \leq \frac{1}{p^2} \text{ car } q = 1-p \leq 1$$

d'où

$$\boxed{V(V-U) \leq 2 + 2 \frac{(1-\alpha)^2}{p^2}}$$

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths 28 ESCP / HEC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q4.

(a) d'après (a) :

$$x_i' \mapsto g\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

On calcule

$$V(V_n' - W_n') = V\left(\frac{x_1' + \dots + x_n'}{n} - \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right)$$

$$= V\left(\frac{1}{n} ((x_1' + \dots + x_n') - (y_1 + \dots + y_n))\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} V((x_1' - y_1) + (x_2' - y_2) + \dots + (x_n' - y_n))$$

$$= \frac{1}{n^2} (V(x_1' - y_1) + \dots + V(x_n' - y_n))$$

(car $x_i' = 1$) (la indépendance mutuelle des y_i donc des x_i d'après le lemme des conditions et la indépendance des

$x_i' - y_i, \dots, x_n' - y_n$ d'après le lemme des conditions de nouveau)

$$\leq \frac{1}{n^2} \left(2 + 2 \left(\frac{n}{(n-2+1)} \right)^2 (1-d)^2 + \dots + \left(\frac{n}{(n-n+1)} \right)^2 (1-dn)^2 \right)$$

d'après (3)(c), car les $x_1', \dots, x_n'$ suivent des lois ayant les mêmes propriétés que y puisque les y_i suivent des lois géométriques.

$$\leq \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \left(\sum_{i=2}^n \left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 (1-\alpha_i)^2 \right) \quad (*)$$

et

$$\text{avec } \cancel{\frac{2}{n^2} \sum_{i=2}^n 1} = \frac{2}{n^2} \times (n-1) = \cancel{\frac{2}{n} \times \frac{2}{n^2}} \\ \text{et } \cancel{\frac{2}{n} > \frac{2}{n^2}}$$

Il s'agit ensuite de montrer (*) & ce qui est demandé

$$\text{or } \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} (n-1) \text{ car } \forall n \geq 2, n-2 \geq 1 \\ \text{soit } \frac{n-2}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\begin{aligned} (*) &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \left(\sum_{i=2}^n \left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 (1-\alpha_i)^2 \right) + \frac{n-2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \left(\sum_{i=2}^n \left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 (1-\alpha_i)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{V(V_n - W_n) \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=2}^n \left(\left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 (1-\alpha_i)^2 + 1 \right)}$$

(b) i.

Il s'agit de montrer que ϕ admet des limites finies en 0 et en 1.

0

ii

(c). d'après la question précédente,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 (1-\alpha_i)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc

$$0 \leq \text{Var}(V_n' - W_n') \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 (1-\alpha_i)^2 + \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc $\text{Var}(V_n' - W_n') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par encadrement.

$$\text{donc } \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|V_n' - W_n'| > \varepsilon) = \mathbb{P}((V_n' - W_n')^2 > \varepsilon)$$

$$\text{ou } E(V_n - W_n) = \frac{1}{n} (E(Y_1 + \dots + Y_n) - E(X_1 + \dots + X_n))$$

pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\text{ou d'après (2), comme } Y_i \in \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

$$\text{et } X_i \in \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

$$\text{donc } E(Y_i) = E(X_i) = \frac{n}{n-i+1}$$

$$\text{si } E(V_n - W_n) = 0.$$

donc d'après l'inégalité de Markov

$$0 \leq P(|V_n - W_n| > \varepsilon) = P((V_n - W_n)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{V(V_n - W_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

il en résulte donc $P(|V_n - W_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$$\text{si } \boxed{V_n - W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ (variable nulle)}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2022
	Épreuve de : Maths 28 ESCP/HEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

(15)

(a)

On reconnaît un schéma de Bernoulli où l'épreuve est "ouvrir une boîte de céréales" ; le succès "la vignette est numérotée i ", de probabilité $1/n$ (enoncé)
 $A_{i,m}$ compte le nombre de succès lors de m épreuves successives et indépendantes (énoncé)

$$\text{On a } A_{i,m} \sim \mathcal{B}(m, 1/n)$$

(b).

On calcule

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A_{1,m}, m - A_{1,m}) &= \text{Cov}(A_{1,m}, m) \\ &\quad - \text{Cov}(A_{1,m}, A_{1,m}) \\ &= 0 - m \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{m(n-1)}{n^2} \end{aligned}$$

(c).

Supposons par l'absurde que $A_{1,m}, \dots, A_{n,m}$ sont mutuellement indépendantes.

$$\text{Alors } \forall i, j \in \{1, n\}, i \neq j \Rightarrow \text{Cov}(A_{i,m}, A_{j,m}) = 0.$$

Or d'après la question précédente

$$\text{Cov}(A_{1,m}, m - A_{1,m}) \neq 0.$$

donc $\text{cov}(A_{1,m}, A_{2,m} + \dots + A_{n,m}) \neq 0$.

(car on tire forcément une vignette de chaque paquet).

$$\text{ie } \sum_{j=2}^n \text{cov}(A_{1,m}, A_{j,m}) = -\frac{m(n-1)}{n^2}.$$

c'est absurde car on a supposé

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \text{cov}(A_{i,m}, A_{j,m}) = 0$$

Si oui

les $A_{1,m}, \dots, A_{n,m}$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

16. (a) Soit $(E_i)_{i \geq 1}$ une famille d'événements.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^2 E_i\right) = P(E_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} E_i\right) - P\left(E_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} E_i\right)\right) \leq P(E_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} E_i\right)$$

(formule du crible)

$$P\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} E_i\right) = P(E_2) + P\left(\bigcup_{i=3}^{\infty} E_i\right) - P\left(E_2 \cap \left(\bigcup_{i=3}^{\infty} E_i\right)\right) \leq P(E_2).$$

$$\text{donc } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq P(E_1) + P(E_2) + P\left(\bigcup_{i=3}^{\infty} E_i\right)$$

on répète le processus en appliquant la formule du crible à $P\left(\bigcup_{i=3}^{\infty} E_i\right)$

et on obtient bien

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

(b).

$(C_n > m) \subset$ ("Les m premiers paquets achetés
n'ont pas donné m cigarettes différentes")

(c)

(d)

(17)

(c). Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $p \in \mathbb{N}^*$
 Il s'agit de montrer

$$A_i(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$P_{(N=p)}(\hat{A}_i = k) = \binom{p}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-k}.$$

Sachant que p paquets ont été achetés, $\hat{A}_i$ compte le nombre de vignettes numérotées i parmi les p trouvées dans le paquet, il peut y en avoir entre 0 et p . On retrouve bien, comme précédemment, un schéma de Bernoulli et on a

$$P_{(N=p)}(\hat{A}_i = k) = \binom{p}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-k},$$

d'où le résultat.

Comme $(N=p)_{p \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(\tilde{A}_i = k) &= \sum_{p=0}^m P(N=p, \hat{A}_i = k) \\ &= \sum_{p=0}^m P(N=p) P_{(N=p)}(\hat{A}_i = k) \quad (\text{car } P(N=p) \neq 0) \\ &= \sum_{p=0}^m e^{-\lambda} \frac{\lambda^p}{p!} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-k} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{p=1}^m \frac{\lambda^p}{k!(p-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-k} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{p=1}^m \frac{\lambda^p}{k!(p-k)!} \frac{(n-1)^{p-k}}{n^p} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{p=1}^m \lambda \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 179760

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : MATHS 28.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

19. (a)

Comme $(N=p)$ est un système complet
d'événements,

$$P(D_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(D_n, N=p)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} P(N=p) P_{N=p}(D_n)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} P(N=p) P(G \leq p)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

