



Note de délibération : 20 / 20

20 / 20

ou ☐ 2
de sujet choisi)

/ 05

8

Commencer à composer dès la première page.

Exercice 1:

Partie A:

$$1) a) P \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

b) on a d'après ce qui précède $P \mathcal{Q} = 3I$.

$$= P \times \frac{1}{3} \mathcal{Q} = I.$$

Or, P est inversible si et seulement si $P \times P^{-1} = I$.Donc, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \mathcal{Q}$.2) a) Calculons ΠX_m .

$$\Pi X_m = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_m + b_m + c_m \\ a_m + 2b_m + c_m \\ a_m + b_m + 2c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_m + \frac{1}{4}b_m + \frac{1}{4}c_m \\ \frac{1}{4}a_m + \frac{1}{2}b_m + \frac{1}{4}c_m \\ \frac{1}{4}a_m + \frac{1}{4}b_m + \frac{1}{2}c_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } X_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \\ c_{m+1} \end{pmatrix}$$

Donc, d'après l'énoncé : $\Pi X_m = X_{m+1}$.

①

2)b) On procède par récurrence pour montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, X_m = \Pi^m X_0$.

* Pour tout $m=0$, on a
$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{et } \Pi^0 X_0 = I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Donc } X_0 = \Pi^0 X_0.$$

d'où $p(0)$ est vraie.

* Soit $m \in \mathbb{N}$ (fixé), supposons que $p(m)$ est vraie.

on a $X_m = \Pi^m X_0$.

$\Pi X_m = \Pi \times \Pi^m X_0$.

$\Pi X_m = \Pi^{m+1} X_0$.

Or, d'après 2)c) on a bien $X_{m+1} = \Pi X_m$.

donc $X_{m+1} = \Pi^{m+1} X_0$.

d'où $p(m+1)$ est vraie.

* $\forall m \in \mathbb{N}, X_m = \Pi^m X_0$.

3)a) Calculons $(4\Pi - I)(4\Pi - 4I)$

$$4\Pi = 4 \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4\Pi - I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4\Pi - 4I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4N - I)(4N - 4I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

on a bien : $(4N - I)(4N - 4I)$ la matrice nulle.

3)b) d'après 3)a) on a $(4N - I)(4N - 4I) = O_3$.

donc le polynôme $(4X - 1)(4X - 4)$ est un polynôme annulateur de A dont les racines sont des valeurs propres possibles de N .

on résout l'équation : $(4X - 1)(4X - 4) = 0$.

$$4X - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 4X - 4 = 0.$$

$$4X = 1$$

$$\boxed{X = \frac{1}{4}}$$

$$4X = 4$$

$$\boxed{X = 1}$$

donc $\frac{1}{4}$ et 1 sont les valeurs propres possibles de M

4)a) Déterminons la matrice diagonale D :

$$\text{On a } N = PDP^{-1} \quad \text{donc } D = P^{-1}NP.$$

$$P^{-1}N = \frac{1}{3} Q N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}NP = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4) b) on a D une matrice diagonale et P inversible donc $\Pi = P D P^{-1}$ est diagonalisable.

Donc $\Pi^m = P D^m P^{-1}$.

c) Calculons Π^m .

$$P D^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{u})^m & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{u})^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\frac{1}{u})^m & 0 \\ 1 & -(\frac{1}{u})^m & (\frac{1}{u})^m \\ 1 & 0 & -(\frac{1}{u})^m \end{pmatrix}$$

$$P D^m P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & (\frac{1}{u})^m & 0 \\ 1 & -(\frac{1}{u})^m & (\frac{1}{u})^m \\ 1 & 0 & -(\frac{1}{u})^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^m = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m \\ 1-(\frac{1}{u})^m & 1+2(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m \\ 1-(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m & 1+2(\frac{1}{u})^m \end{pmatrix}$$

d) D'après 2) b) on a $X_m = \Pi^m X_0$.

$$\Pi^m X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m \\ 1-(\frac{1}{u})^m & 1+2(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m \\ 1-(\frac{1}{u})^m & 1-(\frac{1}{u})^m & 1+2(\frac{1}{u})^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(\frac{1}{u})^m \\ 1-(\frac{1}{u})^m \\ 1-(\frac{1}{u})^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+2(\frac{1}{u})^m) \\ \frac{1}{3}(1-(\frac{1}{u})^m) \\ \frac{1}{3}(1-(\frac{1}{u})^m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+\frac{2}{u^m}) \\ \frac{1}{3}(1-\frac{1}{u^m}) \\ \frac{1}{3}(1-\frac{1}{u^m}) \end{pmatrix}$$

20 / 20

ou ☐ 2
de sujet choisi)

/ 05

8

convertir et composer de la première page...

On sait que $X_m = \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^m} \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^m} \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^m} \right) \end{pmatrix}$

on a bien $\begin{cases} a_m = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^m} \right) \\ b_m = c_m = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^m} \right) \end{cases}$

4)e) $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^m} \right)$

on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^m = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$.

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \frac{1}{3}$

• $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^m} \right) = \frac{1}{3}$.

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = \frac{1}{3}$

D'où $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} c_m = \frac{1}{3}$

⑤

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

5) $m = 0$

$a = 1$; $b = 0$.

while $a > 0.334$ and $b <= 0.333$

$m = m + 1$

$a = \frac{1}{3} * (1 + 2 / 4^m)$.

$b = \frac{1}{3} * (1 - 2 / 4^m)$.

end.

disp ('a_m'; 'b_m').

Partie B:

6) $P(A_0) = 1$ événement certain.

$P(B_0) = 0$ événement impossible.

$P(C_0) = 0$ événement impossible.

On note l'événement T_k : "le joueur tire le chiffre k " avec $0 \leq k \leq 3$.

$$P(A_2) = P(T_0) + P(T_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P(B_2) = P(T_2) = \frac{1}{4}.$$

$$P(C_2) = P(T_2) = \frac{1}{4}.$$

7) a) $P_{A_m}(A_{m+2}) = \frac{1}{2}$ car pour que le pion rentre sur la case 0 dans le $m+2$ ème coup alors qu'il y était dans le même coup, il faut que le joueur tire le chiffre 0 pour que le pion rentre sur place, ou bien le chiffre 3 pour qu'il avance de 3 cases, et par conséquent revienne à la case 0.

⑥

$$P_{B_m}(A_{m+2}) = P(T_2) = \frac{1}{4}.$$

$$P_{C_m}(A_{m+2}) = P(T_2) = \frac{1}{4}.$$

b) on a $\{A_m, B_m, C_m\}$ forment un système complet d'événements, en l'appliquant sur la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(A_{m+2}) &= P(A_m \cap A_{m+2}) + P(B_m \cap A_{m+2}) + P(C_m \cap A_{m+2}). \\ &= P(A_m) \times \underset{A_m}{P(A_{m+2})} + P(B_m) \times \underset{B_m}{P(A_{m+2})} + P(C_m) \times \underset{C_m}{P(A_{m+2})} \\ &= \frac{1}{2} P(A_m) + \frac{1}{4} P(B_m) + \frac{1}{4} P(C_m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_{m+2}) &= P(A_m \cap B_{m+2}) + P(B_m \cap B_{m+2}) + P(C_m \cap B_{m+2}). \\ &= P(A_m) \times \underset{A_m}{P(B_{m+2})} + P(B_m) \times \underset{B_m}{P(B_{m+2})} + P(C_m) \times \underset{C_m}{P(B_{m+2})} \\ &= \frac{1}{4} P(A_m) + \frac{1}{2} P(B_m) + \frac{1}{4} P(C_m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C_{m+2}) &= P(A_m \cap C_{m+2}) + P(B_m \cap C_{m+2}) + P(C_m \cap C_{m+2}). \\ &= P(A_m) \times \underset{A_m}{P(C_{m+2})} + P(B_m) \times \underset{B_m}{P(C_{m+2})} + P(C_m) \times \underset{C_m}{P(C_{m+2})} \\ &= \frac{1}{4} P(A_m) + \frac{1}{4} P(B_m) + \frac{1}{2} P(C_m). \end{aligned}$$

c) on a d'après l'énoncé de la partie A:
$$\begin{cases} a_{m+2} = \frac{1}{2} a_m + \frac{1}{4} b_m + \frac{1}{4} c_m. \\ b_{m+2} = \frac{1}{4} a_m + \frac{1}{2} b_m + \frac{1}{4} c_m \\ c_{m+2} = \frac{1}{4} a_m + \frac{1}{4} b_m + \frac{1}{2} c_m. \end{cases}$$

$$\text{d'où: } \begin{pmatrix} a_{m+2} \\ b_{m+2} \\ c_{m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A_{m+2}) \\ P(B_{m+2}) \\ P(C_{m+2}) \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} P(A_m) = a_m = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^m}\right) \\ P(B_m) = b_m = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{4^m}\right) \\ P(C_m) = c_m = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^m}\right). \end{cases}$$

8) d'après 4)e) on a $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \frac{1}{3}$

Exercice 2:

$$1) a) \lim_{n \rightarrow -2} f(n) = \lim_{n \rightarrow -2} n \ln(1+n)$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow -2} n = -2. \\ \lim_{n \rightarrow -2} \ln(1+n) = -\infty. \end{cases}$$

Par produit des limites:

$$\lim_{n \rightarrow -2} n \ln(1+n) = +\infty.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $n = -2$.

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1+n)$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+n) = +\infty. \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(n) = +\infty.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(1+n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+n)$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1+n = +\infty. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \end{cases}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(n)}{n} = +\infty$. Donc $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a) on a f est dérivable sur $] -2; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(n) &= (n \ln(1+n))' \\ &= n' \ln(1+n) + n \ln(1+n)' \\ &= \ln(1+n) + \frac{n(1+n)'}{1+n} \end{aligned}$$

$$f'(n) = \ln(1+n) + \frac{n}{1+n}$$

20 / 20

ou ☐ 2
de sujet choisi)

/ 0 5

8

b) f est deux fois dérivable sur $] -2; +\infty[$.

$$f''(n) = (f'(n))' = \ln(1+n)' + \left(\frac{n}{1+n}\right)'$$

$$= \frac{(1+n)'}{1+n} + \frac{n'(1+n) - n(1+n)'}{(1+n)^2} = \frac{1}{1+n} + \frac{1+n - n}{(1+n)^2}$$

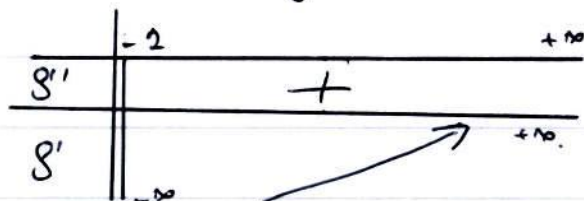
$$= \frac{2}{1+n} + \frac{1}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)}{(1+n)^2} + \frac{1}{(1+n)^2} = \frac{n+2}{(1+n)^2}$$

$$\text{donc } f''(n) = \frac{n+2}{(1+n)^2}$$

c) on a $(1+n)^2 \geq 0$ dans $] -2; +\infty[$, donc le signe de f'' est celui de $n+2$.

$$\text{On a } n+2 = 0$$

$$n = -2.$$

* Variations de f' :

$$3) f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = 0.$$

donc f' est positive pour tout $n > -2$ car sa valeur minimale est de 0. (9)

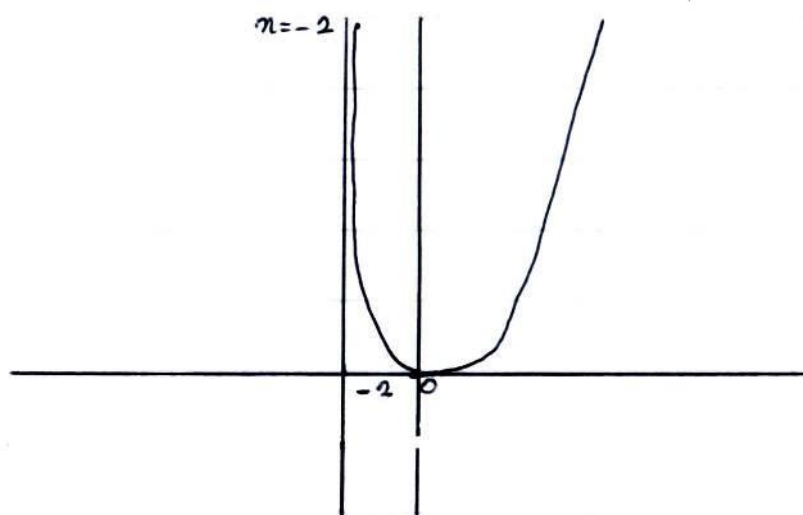
NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

3)b) Tableau de variations de f sur $]-2; +\infty[$.

	-2		$+\infty$
f'		+	
f	$+\infty$		$+\infty$



5) on a $I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x \ln(1+x) dx$.

on prend $\begin{cases} U' = x \\ V = \ln(1+x) \end{cases} \quad \begin{cases} U = \frac{x^2}{2} \\ V' = \frac{1}{1+x} \end{cases}$

A l'aide d'une intégration par parties:

$$\int_0^2 U' V dx = \left[\frac{1}{1+x} \times \ln(1+x) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{1+x} \times \frac{x^2}{2} dx.$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{1+x} dx.$$

$$\text{d'où } I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{x+2} dx.$$

5)b) Vérifions que : $\frac{n^2}{n+2} = n - 2 + \frac{1}{n+2}$

$$n - 2 + \frac{1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+2) + 1}{n+2} = \frac{n^2 + n - n - 2 + 1}{n+2} = \frac{n^2}{n+2}.$$

c) $\int_0^2 \frac{x^2}{n+2} dn = \int_0^2 n - 2 + \frac{1}{n+2} dn$

$$= \int_0^2 n dn - \int_0^2 2 dn + \int_0^2 \frac{1}{n+2} dn.$$

$$= \left[\frac{n^2}{2} \right]_0^2 - [2n]_0^2 + [\ln|n+2|]_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - (2 - 0) + (\ln(2) - \ln(2))$$

$$= \frac{1}{2} - 2 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

donc $\int_0^1 \frac{n^2}{n+2} dn = \ln(2) - \frac{1}{2}$

d) on a d'après 5)a)

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{n^2}{n+2} dn.$$

$$\text{donc } I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right).$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4}.$$

$I = \frac{1}{4}$

6) fonction $y = f(n)$
 $y = n^* \log(1+n).$

end fonction.

for $m = 2 : 2 : 50$

$x = \text{linspace}(0, 2, 100)$

$\text{plot2d}('y', 'm').$

7) a) d'après le graphique, I_m est convergente sur $\mathbb{N}^*$

b) En utilisant le graphique, on constate que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 0.$$

8) a) Pour tout $n \in [0; 2]$.

$$\text{on a } 0 \leq n \leq 2.$$

$$1 \leq 1+n \leq 2.$$

$$0 \leq \ln(1+n) \leq \ln(2).$$

$$0 \leq n^m \ln(1+n) \leq n^m \ln(2).$$

b) on a d'après 8) a) $0 \leq n^m \ln(1+n) \leq n^m \ln(2)$

Par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^2 0 \, dn \leq \int_0^2 n^m \ln(1+n) \, dn \leq \int_0^2 n^m \ln(2) \, dn.$$

$$0 \leq I_m \leq \ln(2) \left[\frac{n^{m+2}}{m+2} \right]_0^2.$$

$$0 \leq I_m \leq \ln(2) \frac{2}{m+2}.$$

$$\text{c) on a } \lim_{m \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{m+2} = 0.$$

et $0 \leq I_m \leq \frac{\ln(2)}{m+2}$, donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 0.$$

20 / 20

ou ☐ 2
de sujet choisi)

/ 05

8

Exercice 3:

$$1) \text{ on a } f(0) = 0 + \frac{0}{2a^2} + 0 = 0.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n}{2a^2} = 0.$$

On a $f(0) = \lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = 0$ donc f est continue en 0.

$$* f(2a) = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow 2a} f(n) = \lim_{n \rightarrow 2a} \frac{n}{2a^2} = \frac{1}{a}.$$

on a $f(2a) = \lim_{n \rightarrow 2a} f(n) = \frac{1}{a}$ donc f est continue en $2a$.

2) * dans $] -\infty; 0[\cup] 2a; +\infty[$, f coïncide avec la fonction nulle donc elle y est continue.

dans $[0; 2a]$ $f(n) = \frac{n}{2a^2}$ ($\frac{1}{2a^2}$ étant une constante et n étant continue) donc f est

continue sur $[0; 2a]$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

* Dans $]-\infty; 0[\cup]2a; +\infty[$ $f(x) = 0 \geq 0$

Dans $[0; 2a]$ $f(x) = \frac{x}{2a^2} \geq 0$ ($2a^2 \geq 0$ et $x \in [0; 2a]$).

donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{2a} f(x) dx + \int_{2a}^{+\infty} f(x) dx.$$

$$= \int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2} dx.$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2a^2} \right]_0^{2a}.$$

$$= \left[\frac{(2a)^2}{2} \times \frac{1}{2a^2} - 0 \right].$$

$$= \frac{4a^2}{2} \times \frac{1}{2a^2} = \frac{2}{2} = 2.$$

$$\text{on a } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2.$$

D'où f est une densité de probabilité.

3) En principe $F(x) = P(X \leq x)$.

si $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

si $0 \leq x \leq 2a$.

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t}{2a^2} dt.$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} \times \frac{1}{2a^2} \right]_0^x = \left[\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2a^2} \right] = \frac{x^2}{4a^2}$$

si $n > 2a$

$$F(n) = F(2a) + \int_{2a}^n f(n) dn.$$

$$= \frac{(2a)^2}{4a^2} + 0 = \frac{4a^2}{4a^2} = 2.$$

$$\text{donc } F(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \frac{n^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq n \leq 2a. \\ 2 & \text{si } n > 2a. \end{cases}$$

b) D'après la formule des probabilités conditionnelles:

$$\begin{aligned} P_{X > \frac{a}{2}}(X \leq a) &= \frac{P(X \leq a) \cap (X > \frac{a}{2})}{P(X > \frac{a}{2})} = \frac{P(\frac{a}{2} < X \leq a)}{P(X > \frac{a}{2})} \\ &= \frac{P(X \leq a) - P(X \leq \frac{a}{2})}{1 - P(X \leq \frac{a}{2})} = \frac{F(a) - F(\frac{a}{2})}{1 - F(\frac{a}{2})} \\ &= \frac{\frac{a^2}{4a^2} - \frac{\frac{a^2}{4}}{4a^2}}{1 - \frac{\frac{a^2}{4}}{4a^2}} = \frac{\frac{a^2 - \frac{a^2}{4}}{4a^2}}{\frac{4a^2 - \frac{a^2}{4}}{4a^2}} \\ &= \frac{\frac{4a^2 - a^2}{4}}{\frac{16a^2 - a^2}{4}} = \frac{4a^2 - a^2}{16a^2 - a^2} = \frac{3a^2}{15a^2} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{P_{X > \frac{a}{2}}(X \leq a) = \frac{1}{5}}$$

c) Sous réserve de convergence:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} n f(n) dn &= \int_{-\infty}^0 0 dn + \int_0^{2a} \frac{n^2}{2a^2} dn + \int_{2a}^{+\infty} 0 dn. \\ &= \int_0^{2a} \frac{n^2}{2a^2} dn. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{n^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{(2a)^3}{3} \right]$$

$$= \frac{8a^3}{3 \times 2a^2} = \frac{4a \times 2a^2}{3 \times 2a^2} = \frac{4a}{3}$$

$$\text{d'où } \boxed{E(X) = \frac{4a}{3}}$$

5) on a X admet une expérience, donc d'après le théorème de transfert X^2 admet une expérience.

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{2a} \frac{x^3}{2a^2} dx + \int_{2a}^{+\infty} 0 dx.$$

$$= \int_0^{2a} \frac{x^3}{2a^2} dx.$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{(2a)^4}{4} \right]$$

$$= \frac{16a^4}{4 \times 2a^2} = 2a^2$$

d'où $\boxed{E(X^4) = 2a^2}$

D'après la formule de Kuyner-Huygens:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 2a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = 2a^2 - \frac{16a^2}{9} = \frac{18a^2 - 16a^2}{9} = \frac{2a^2}{9}$$

D'où $\boxed{V(X) = \frac{2a^2}{9}}$

6) a) En principe $G(n) = P(Y \leq n) = P(X^2 \leq n) = P(X \leq \sqrt{n}) = F(\sqrt{n})$

si $\sqrt{n} < 0$.

impossible.

si $0 < \sqrt{n} \leq 2a$ alors: $0 < n \leq 4a^2$

$$G(n) = F(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}^2}{4a^2} = \frac{n}{4a^2}$$

si $\sqrt{n} \geq 2a$ alors: $n \geq 4a^2$

$$G(n) = \frac{2a}{4a^2} + 2 = \frac{1}{2a} + 2.$$

20 / 20

ou ☐ 2
de sujet choisi)

/ 05

8

suite de la question 6) a).

$$G(n) = \begin{cases} \frac{n}{4a^2} & \text{si } 0 \leq n \leq 4a^2 \\ 1 + \frac{1}{2a} & \text{si } n > 4a^2 \end{cases}$$

b) En principe, si Y suit une loi uniforme alors aura en particulier.

$$G(n) = \frac{n}{b-a} \quad \text{si } 0 \leq n \leq 4a^2$$

on a $G(n) = \frac{n}{4a^2}$ si $0 \leq n \leq 4a^2$ donc Y suit bien une loi

uniforme.

c) la commande $\text{rand}() * 4 * a^2$ simule que le réel choisi est compris entre 0 et $4a^2$.d) $Y = \text{uin}()$. $\text{while } \text{rand}() * (0; 4a^2).$ $\text{sqrt}(Y) = \text{rand}() * (0; 2a).$ $X = \text{sqrt}(Y).$

end.

$$2) \text{ on a } b(T_m) = E(T_m - a) = E(T_m) - a.$$

$$= E\left(\frac{3}{4m} \sum_{k=2}^m X_k\right) - a.$$

par linéarité
de l'espérance.

$$= \frac{3}{4m} E\left(\sum_{k=2}^m X_k\right) - a.$$

$X_1, X_2, \dots, X_m$ étant
indépendantes et
suivant la même loi
que X .

$$= \frac{3}{4m} \times m E(X) - a = \frac{3}{4m} \times m \times \frac{4a}{3} \text{ d'après 1.}$$

$$= a - a = 0.$$

on a $b(T_m) = 0$ donc T_m est un estimateur sans biais de a .

$$b) \text{ En principe } r(T_m) = V(T_m) + (b(T_m))^2$$

Étant donné que $b(T_m) = 0$ alors $r(T_m) = V(T_m)$.

$$V(T_m) = V\left(\frac{3}{4m} \sum_{k=2}^m X_k\right) = \frac{9}{16m^2} V\left(\sum_{k=2}^m X_k\right).$$

$$= \frac{9}{16m^2} \times m V(X_k) = \frac{9}{16m^2} \times m \times \frac{2a^2}{9}.$$

$$= \frac{2a^2}{16m} = \boxed{\frac{a^2}{8m}}$$

$$\text{donc } \boxed{r(T_m) = \frac{a^2}{8m}}$$

c) $m = \text{length}(X)$ // longueur de X .

$$T_m = (3/4 \times m) \times m \times X.$$

disp ('l'estimation de la valeur de a est')

