

Copie anonyme - n°anonymat : 551293



EG-00059
551293
Maths S

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emgcm

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie A :

Q1.a. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a : $O \in \text{sp}(A)$

Donc :

A n'est pas inversible

On a :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non-colinéaires du fait du 1^{er} et 2^{ème} coefficient

Donc : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre d'où :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Donc :

$$\underline{\text{rg}(A) = 2}$$

Q1. B. On a :

$$A^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

D'où :

$$\underline{A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Donc :

$$A^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

D'où :

$$\underline{A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Donc :

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\underline{A^3 - A^2 + A = 0}$$

Q1.b. On a donc, puisque $X^3 - X^2 + X$ un polynôme non-nul annulateur de A , en notant $Z_{\mathbb{R}}(X^3 - X^2 + X)$ l'ensemble des racines réelles de $X^3 - X^2 + X$:

$$\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset Z_{\mathbb{R}}(X^3 - X^2 + X)$$

0 est racine évidente de $X^3 - X^2 + X$

De plus, le discriminant Δ de $X^2 - X + 1$ est:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - 4 \\ &= -3\end{aligned}$$

Donc $X^2 - X + 1$ n'admet aucune solution réelle

D'où : $Z_{\mathbb{R}}(X^3 - X^2 + X) = \{0\}$

Or : $0 \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ d'après Q1.a.

Donc :

0 est l'unique valeur propre réelle de A

On a $\text{rg}(A) = 2$ donc, d'après le théorème du rang et puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\dim(\text{Ker}(A)) &= 1 \\ &\neq 3\end{aligned}$$

Or $\text{Ker}(A)$ est l'unique sous-espace propre de A associé à une valeur réelle

Donc :

A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Q2.a. On a :

$$B = {}^tAA \text{ d'où : } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Puisque B est symétrique, d'après le théorème spectral, on a :

B est diagonalisable

Q2. P. i. On a :

$${}^tRR = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } {}^tRR = I_3$$

Donc : R est inversible et $R^{-1} = {}^tR$

Donc : R est orthogonale

Q2. P. ii. On a :

$$\begin{aligned} {}^tRBR &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc : tRBR est diagonale

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B :

Q3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^m)^2$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ les matrices
columnes associées

On a :

$$\begin{aligned}\langle x | g(y) \rangle &= {}^t x {}^t M Y \\ &= {}^t (M X) Y\end{aligned}$$

Où : $\langle f(x) | y \rangle = {}^t (M X) Y$

Donc :

$$\underline{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^m)^2, \langle x | g(y) \rangle = \langle f(x) | y \rangle}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^m, \langle x | h(x) \rangle &= \langle x | (g \circ f)(x) \rangle \\ &= {}^t x {}^t M M X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= {}^t (M X) M X \\ &= \|f(x)\|^2\end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}^m, \langle x | h(x) \rangle = \|f(x)\|^2}$$

Q4.a. Puisque $x \in \ker(R)$, on a : $\langle x | R(x) \rangle = 0$

$$\text{d'où : } \|f(x)\|^2 = 0$$

$$\text{Donc : } f(x) = 0$$

Donc :

$$\underline{x \in \ker(f)}$$

Q4.b. Or :

$$\forall x \in \ker(f), R(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=0})$$

$$= 0$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \ker(f), x \in \ker(R)$$

En combinant Q4.a et ce que l'on vient de montrer, c'est-à-dire $\ker(R) \subset \ker(f)$ et $\ker(f) \subset \ker(R)$, on a :

$$\underline{\ker(R) = \ker(f)}$$

Or, puisque ${}^tMM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donc d'après le théorème du rang, on a :

$$n = \dim(\ker(R)) + \text{rg}(R)$$

$$\text{donc : } \text{rg}(R) = n - \underbrace{\dim(\ker(f))}_{= \text{rg}(f)}$$

d'après le théorème du rang

$$\text{Or, puisque } M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \text{ on a : } \text{rg}(f) = \text{rg}(M)$$

Donc :

$$\underline{\text{rg}(R) = r}$$

Q5.a. On a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(R) = {}^tMM$

$$\text{Or : } \forall (i, j) \in [1, n]^2, ({}^tMM)[i, j] = \sum_{R=1}^n {}^tM[i, R] M[R, j]$$

$$= \sum_{R=1}^n M[R, i] \underbrace{M[R, j]}_{= {}^tM[j, R]} = {}^tM[j, i]$$

$$\text{Qc: } \forall (i, j) \in \llbracket n, m \rrbracket^2, ({}^tMM)[j, i] = \sum_{k=1}^m \underbrace{{}^tM[j, k]M[k, i]}_{= M[i, k]} \\ = ({}^tMM)[i, j]$$

Donc : tMM est symétrique

Ainsi, d'après le théorème spectral et puisque ${}^tMM = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(R)$, on a :

R diagonalisable et il existe une base orthormée $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_m)$ de $\mathbb{R}^m$ constituée de vecteurs propres de R

Q5. b. Soit $\lambda \in \text{sp}({}^tMM)$ et $X \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Alors :

$${}^tMMX = \lambda X$$

$$\text{d'où : } {}^tX {}^tMMX = \lambda {}^tXX$$

$$\text{donc : } \lambda = \frac{\|P(x)\|^2}{\|x\|^2} \quad (\text{écrite car } X \neq 0 \text{ donc } \|x\| \neq 0)$$

$$\geq 0$$

D'où :

$$\text{sp}({}^tMM) \subset \mathbb{R}_+$$

Donc :

$$\underline{\text{sp}(R) \subset \mathbb{R}_+}$$

Q6. Puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont des bases orthormées de $\mathbb{R}^m$ et que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, on a :

P est orthogonale

Ainsi, en posant $D = P^{-1} {}^tMM P$, on a :

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(R)$$

Or, puisque B_2 est composée uniquement de vecteurs propres de R , on a :

$$\forall R \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_R \in \mathbb{R}_+ / R(e_R) = \lambda_R e_R$$

$\underbrace{\lambda_R}_{\text{car } \text{sp}(R) \subset \mathbb{R}_+}$

D'où :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n / P^{-1} {}^t M P = D \text{ avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Donc, puisque P est orthogonale, on a :

$$\underline{\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n / {}^t M M = P D {}^t P \text{ avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

~~Q7. Puisque M est symétrique, d'après le théorème spectral, M est diagonalisable et il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que :~~

~~$$M = Q D' {}^t Q \text{ avec } D' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$~~

~~$$\text{Donc : } M^2 = Q D'^2 {}^t Q$$~~

~~D'où, puisque ${}^t M M = M^2$, d'après Q6., on a :~~

~~$$P D {}^t P = Q D'^2 {}^t Q$$~~

Puisque M est symétrique, d'après le théorème spectral, M est diagonalisable et il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que :

$$M = Q D' {}^t Q \text{ avec } D' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

$$\text{Donc : } \underbrace{M^2}_{= {}^t M M} = Q (D')^2 {}^t Q$$

$$\text{Or : } (D')^2 = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$$

Donc, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_i = |\mu_i|$$

Or, il est clair que $\text{sp}(M) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ (avec répétitions éventuelles)

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emPyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc : $\{e_1, \dots, e_n\} = \{|\lambda|; \lambda \in \text{sp}(M)\}$

Q8. Les coefficients diagonaux de la matrice D sont, comme nous l'avons vu, les valeurs propres de R
Or : $\text{rg}(R) = x$ et avec le théorème du rang, on a :
 $\dim(\text{Ker}(R)) = n - x$

Donc : $\exists (i_1, \dots, i_{n-x}) \in \llbracket 1, n \rrbracket^{n-x}$ deux à deux distincts
tels que : $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-x}}) \in \text{Ker}(R)^{n-x}$

Donc $n-x$ coefficients diagonaux de D sont nuls
exactement

Donc :

D admet exactement x coefficients
diagonaux non-nuls

Q9.a. On a, d'après D :

$$\forall i \in \llbracket 1, x \rrbracket, R(e_i) = \lambda_i e_i \neq 0$$

$$\text{donc : } p(e_i) \neq 0 \text{ car sinon } R(e_i) = g(p(e_i)) = 0$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, x \rrbracket, p(e_i) \neq 0$

Avec Q3, il vient :

$$\forall i \in \llbracket 1, x \rrbracket, \|p(e_i)\|^2 = \lambda_i \|e_i\|^2$$

$= 1$ car D_i est
orthonormée

Donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, x \rrbracket, \|p(e_i)\| = \sqrt{\lambda_i}$$

Q3. b. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, x \rrbracket^2$ distincts

On a :

$$\langle u_i | u_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle p(e_i) | p(e_j) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= {}^t e_i {}^t M M e_j \quad \text{en notant } (e_i, e_j) \\ &\quad \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})^2 \\ &= \langle e_i | h(e_j) \rangle \quad \text{associés à } (e_i, e_j) \\ &= \lambda_j \langle e_i | e_j \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ distincts} \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\text{Et : } \forall i \in \llbracket 1, x \rrbracket, \|u_i\| = \frac{\|p(e_i)\|}{\|p(e_i)\|} = 1$$

Donc :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, x \rrbracket^2, \langle u_i | u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donc :

$(u_1, \dots, u_x)$ est une famille orthonormée

Q3. c. Soit $B_2 = (u_1, \dots, u_x, e_{x+1}, \dots, e_n)$

Pour $i \in \llbracket 1, x \rrbracket$, on a :

$$\forall j \in \llbracket x+1, n \rrbracket, \langle u_i | e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \langle p(e_i) | e_j \rangle$$

$$= 0 \quad (\text{on l'admet})$$

Donc B_2 est orthonormée car $(u_1, \dots, u_x)$ et $(e_{x+1}, \dots, e_n)$ sont orthonormées.

Donc, puisque $\text{card}(B_x) = n$, on a B_x une base de $\mathbb{R}^n$

Où :

$$\bullet \forall i \in [1, x], f(e_i) = \underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{= \sigma_i} u_i \quad \text{car } u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f(e_i)$$

$$\bullet \forall i \in [x+1, n], f(e_i) = 0$$

Donc :

Il existe une base orthonormée B_x de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base B_x vers la base B_x soit $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_x, 0, \dots, 0)$

Q10. Q étant la matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre base orthonormée, on a :

Q est orthogonale

On a :

$$\text{Mat}_{B_x, B}(f) = {}^t Q M$$

Mais aussi :

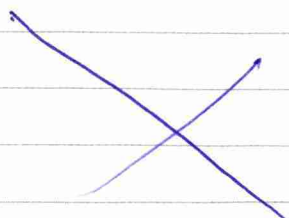
$$\text{Mat}_{B_x, B}(f) = \underbrace{\text{Mat}_{B_x, B_1}(f)}_{= \Delta} \underbrace{\text{Mat}_{B_1, B}(f)}_{= {}^t P}$$

$$\text{D'où : } {}^t Q M = \Delta {}^t P$$

Puisque Q orthogonale, on a :

$$\underline{M = Q \Delta {}^t P}$$

Q11. Soit $P_n = R$, $Q_n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 3 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Partie C:

Q12. Soit M inversible

Donc $\text{rg}(M) = n$

Donc :

$$M^t = P \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)^t Q \quad (\text{avec } \sigma_1, \dots, \sigma_n \text{ tous non-nuls})$$

$$\text{Or : } MM^t = Q \underbrace{\Delta^t P P}_{= I_n \text{ car } P \text{ orthogonale}} \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right)^t Q$$

$$= Q \begin{pmatrix} \sigma_1 & (0) \\ (0) & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & (0) \\ (0) & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}^t Q$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & (0) \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1} & \backslash \\ (0) & \frac{\sigma_n}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

$$= I_n$$

$$= Q^t Q$$

$$= I_n \text{ car } Q \text{ orthogonale}$$

Donc : $M^{-1} = M^t$

Q13. a. On a :

$$MM^t = Q \underbrace{\Delta^t P P}_{= I_n} \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right)^t Q$$

$$= Q \underbrace{\Delta \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0 \right)}_{= I_r \text{ car } \Delta \text{ orthogonale}}^t Q$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{r \text{ fois}}$

Donc :

$$MM^t = Q \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{r \text{ fois}}^t Q$$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q13. b. On a :

$$\text{Mat}_{\mathbb{R}}(p) = MM^+$$

$$\text{D'où : } \text{Mat}_{\mathbb{R}}(p^2) = \text{Mat}_{\mathbb{R}}(p)^2$$

$$= MM^{+2}$$

$$= Q \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^t \underbrace{Q Q}_{= I_n \text{ car } Q \text{ orthogonale}} \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^t Q$$

$$= Q \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^2{}^t Q$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$= MM^+$$

$$= \text{Mat}_{\mathbb{R}}(p)$$

$$\text{Donc : } p^2 = p$$

p étant une composition d'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a donc $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et, puisque $p^2 = p$, on a :
 p est un projecteur

$$\text{De plus : } {}^t(MM^+) = {}^t\left(Q \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^t Q\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} {}^t(MM^+) &= {}^t({}^tQ) {}^t \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ \\ &= Q \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ \\ &= MM^+ \end{aligned}$$

D'où : $\text{Mat}_\mathbb{R}(p)$ est symétrique

Donc p est une symétrie donc, étant un projecteur,
on a :

p est un projecteur orthogonal

Q13.c. On a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(MM^+) &= \text{rg} \left(Q \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ \right) \\ &= \text{rg} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{x \text{ fois}} \right) \quad \text{car } Q \text{ inversible} \\ &\quad \text{et orthogonale} \\ &\quad \text{(donc } {}^tQ = Q^{-1} \text{ est inversible)} \end{aligned}$$

Donc : $\text{rg}(MM^+) = x$

Donc : $\text{rg}(p) = \text{rg}(p)$

Or : $\text{Im}(p \circ p^+) \subset \text{Im}(p)$ d'où : $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(p)$

Donc : $\text{Im}(p) = \text{Im}(p)$ (car $\text{rg}(p) = \text{rg}(p)$)

Q14. a. Puisque $\text{Im}(p)$ est un sous-espace vectoriel, la distance minimale de y à $\text{Im}(p)$ se réalise, d'après le théorème de meilleure approximation, en le projeté orthogonal de y sur $\text{Im}(p)$.

Autrement dit, q la projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(p)$,
d'après le théorème de meilleure approximation, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - q(y)\| \leq \|y - p(x)\|$$

Or p est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(p)$
d'après Q13., donc :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - p(y)\| \leq \|y - p(x)\|}$$

Q14. b. On a $(u_1, \dots, u_x, e_{x+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$
et :

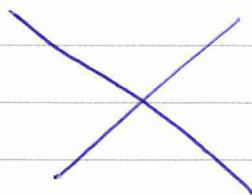
$$\forall i \in [1, x], p(e_i) = u_i \text{ et } \forall i \in [x+1, n], p(e_i) = 0$$

Donc $(u_1, \dots, u_x)$ forme une base orthonormée de $\text{Im}(p)$

$$\text{Et donc : } \forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^x \langle x | u_k \rangle u_k}_{\in \text{Im}(p)} + x - \underbrace{\sum_{k=1}^x \langle x | u_k \rangle u_k}_{\in \text{Ker}(p)}$$

Donc :

$$\underline{\sum_{k=1}^x \langle y | u_k \rangle u_k \text{ répond au problème posé}}$$



Q15. a. D'après A, on a :

$$\cancel{\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, p(x, y, z) = (y + z, 0, x + z)}$$

$$\text{On a : } \text{Im}(p) = \text{Vect}((0, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 0, 1))$$

$$\text{Mais : } (0, 0, -1) = (1, 0, 0) - (1, 0, 1)$$

$$\text{Donc : } \underline{\text{Im}(p) = \text{Vect}((0, 0, -1), (1, 0, 0))}$$

$$Ox: y = -(0, 0, -1) + (1, 0, 0) + (0, 1, 0)$$

$$\notin \text{Vect}((0, 0, -1), (1, 0, 0))$$

$$\text{Donc : } \underline{y \in \text{Im}(f_a)}$$

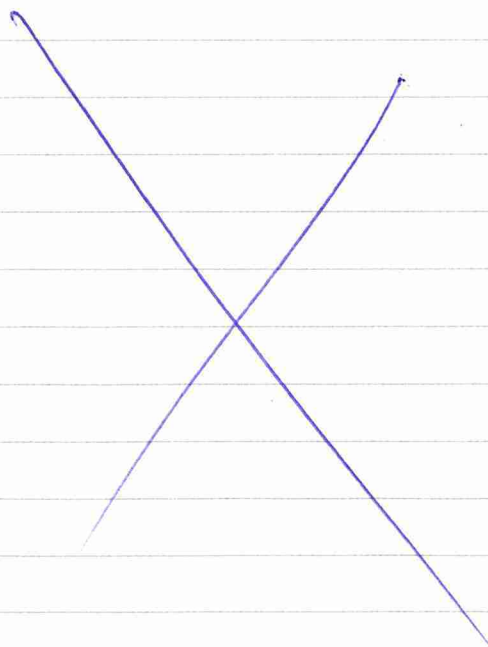
Q15. b. On a :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|y - f_a(x_1, x_2, x_3)\|^2 = \|y - (x_2 + x_3, 0, -x_1 + x_3)\|^2$$

$$= \underbrace{\|y - (x_2 + x_3, 0, -x_1 + x_3)\|^2}_{= (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2}$$

D'où :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|y - f_a(x_1, x_2, x_3)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1$$



Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emigian

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2

Partie A :

Q1. On a :

$$\underline{c_0 = 1}, \underline{c_1 = 1} \text{ et } \underline{c_2 = 2}$$

$$\text{Q2. a. On a : } c_0 = \underbrace{\binom{2 \times 0}{0}}_{=1} - \underbrace{\binom{0}{1}}_{=0}$$

Et :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} - \frac{(2m)!}{(m+1)!(m-1)!}$$
$$= \frac{(2m)!}{(m!)^2} \times \frac{m}{m+1}$$

$$= \underbrace{\frac{(2m)!}{(m!)^2}}_{\binom{2m}{m}} \left(1 - \underbrace{\frac{m}{m+1}}_{=\frac{1}{m+1}} \right)$$

$$\text{Donc : } \underline{\forall m \in \mathbb{N}, c_m = \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}}$$

Q2. b. On sait que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall R \in [0, m], \binom{m}{R} \leq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \quad (\text{d'après le triangle de Pascal})$$

D'où :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall R \in [0, 2m], \binom{2m}{R} \leq \binom{2m}{\lfloor \frac{2m}{2} \rfloor} = \binom{2m}{m}$$

Donc, pour $R = m+1$, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \underbrace{\binom{2m}{m}}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\binom{2m}{m+1}}_{\in \mathbb{N}} > 0 \quad (\text{strict car } m+1 \neq \lfloor \frac{2m}{2} \rfloor)$$

Donc :

$$\underline{\forall m \in \mathbb{N}, c_m \in \mathbb{N}^*}$$

Q3. On a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, c_{m+1} = \frac{1}{m+2} \binom{2m+2}{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+2} \frac{(2m+2)!}{(m+1)!^2}$$

$$= \frac{1}{m+2} \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)^2} \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

$$= \frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+2)(m+1)} \underbrace{\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}}_{= c_m}$$

$$= \frac{2(m+1)(2m+1)}{(m+2)(m+1)}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$

Q4.

```
function c = catalan(n)
    x = cumprod([1:2n])
    y = cumprod([1:n])
    c = x(2n) / ((n+1) * (y(n))^2)
endfunction
```

Q5. a. On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} - c_n &= \left(\underbrace{\frac{2(2n+1)}{n+2} - 1}_{\geq 1} \right) c_n \\ &\geq \underbrace{c_n}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

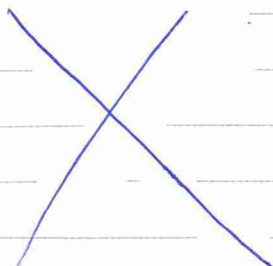
Donc :

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Q5. b. Supposons par l'absurde que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel (positif) p

~~$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a donc :~~

~~$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq p$~~



Ox: $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{c_{n+1} - c_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} = \left(\frac{2(2n+1)}{(n+2)} - 1 \right) \underbrace{c_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p}$
 car $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Donc: $\frac{2(2n+1)}{(n+2)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui est absurde

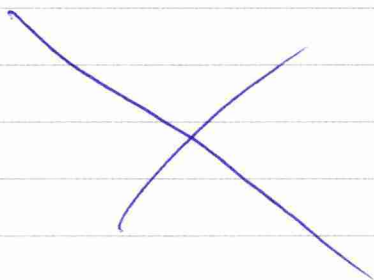
Ex: $\frac{2(2n+1)}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ donc $\frac{2(2n+1)}{(n+2)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$

Donc:

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

Q6.a. On a:

$$\forall R \in \mathbb{N}^+, \frac{c_{R+1}}{c_R} = \frac{2(2R+1)}{R+2} = 4 \left(\frac{R + \frac{1}{2}}{R+2} \right)$$



Q6.b. On a ainsi d'après Q6.a. (on admet ce résultat):

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \prod_{k=1}^n 4 \left(\frac{k}{k+2} \right)^{\frac{3}{2}} \ll \underbrace{\prod_{k=1}^n \frac{c_{k+1}}{c_k}}_{= \frac{c_n}{c_1}} \ll \prod_{k=1}^n 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{\frac{3}{2}} = c_n \text{ car } c_1 = 1$$

$$\text{Ox: } \prod_{k=1}^{n-1} 4 \left(\frac{k}{k+2} \right)^{\frac{3}{2}} = 4^{n-1} \frac{n!^{\frac{3}{2}}}{(n+1)!^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

et de manière analogue: $\prod_{k=1}^{n-1} 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^+, \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \ll c_n \ll \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S empyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q7.a. On a :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, T_n &= \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-k) c_k c_{n-k}}{2} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n}{2} c_k c_{n-k} - \sum_{k=0}^n \frac{k}{2} c_k c_{n-k}
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, T_n &= \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n (n-k) c_k c_{n-k} \quad \left. \begin{array}{l} \text{somme} \\ \text{"descendante"} \\ \text{changement d'indice} \\ i = n-k \end{array} \right\} \\
 &= n \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} - \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k} \\
 &= n S_n - T_n
 \end{aligned}$$

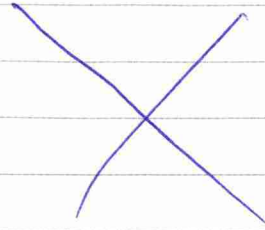
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$

Q7.b. On a :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k c_k c_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n k c_k \frac{2(2(n-k)+1)}{n-k+2} c_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k \frac{2(2(n-k)+1)}{n-k+2} c_{n-k} \\
 &\quad + (n+1) c_{n+1} + c_{n+1}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} =$$



Q7.c. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$P(n) : "S_n = c_{n+1}"$$

- Au rang $n = 0$, on a :

$$S_0 = 1 \text{ et } c_1 = 1$$

$$\text{Donc : } S_0 = c_1$$

Donc : $P(0)$ est vraie

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$$

D'après Q7.a., on a :

$$\left(1 + \frac{n+1}{2}\right) S_{n+1} = c_{n+1} + (2n+2) S_n$$

$\underbrace{= c_{n+1}}_{= c_{n+1} \text{ d'après } P(n)}$

$$\text{d'où : } \left(\frac{n+3}{2}\right) S_{n+1} = (2n+3) c_{n+1}$$

$$\text{Donc : } S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3} c_{n+1}$$

$$= c_{n+2} \text{ d'après Q3.}$$

Donc : $P(n+1)$ est vraie

- On en déduit par récurrence que :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}}$$

Q8. a. D'après Q6. b., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{4^k}{2\sqrt{k}} x^k \leq \sum_{k=1}^N c_k x^k \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^N \frac{4^k}{2\sqrt{k}} x^k$$

Donc :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 0} c_n x^n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}} \text{ converge}$$

$$\text{Or : } \forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^N \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \sum_{n=0}^N (4x)^n$$

$$\text{Or : } \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, 4x \in]-1, 1[$$

$$\text{Donc : } \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \sum_{n \geq 0} (4x)^n \text{ converge}$$

$$\text{Donc : Pour tout } x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \sum_{n \geq 0} \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}} \text{ converge}$$

Donc :

$$\text{Pour tout } x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \sum_{n \geq 0} c_n x^n \text{ converge}$$

Q8. b. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left(\sum_{i=0}^N c_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j \right) = \sum_{(i,j) \in [0,N]^2} c_i c_j x^i x^j$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} x^n &= \sum_{k=0}^{2N} \sum_{n=k}^{2N} c_k c_{n-k} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{2N} c_k \underbrace{\sum_{n=k}^{2N} c_{n-k} x^n}_{= \sum_{m=0}^{2N-k} c_m x^{m+k}} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \sum_{m=0}^{2N-k} c_k c_m x^m x^k \end{aligned}$$

