

GG-00023
394178
Maths S



Code épreuve : 282

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

Section A :

1) La famille $B(e, n+1)$ contient $n+1$ vecteurs de E . Or E est de dimension n .

Si on supposait que la famille $B(e, n+1)$ était libre, alors on aurait par l'aburde :

$$\text{Vect}(B(e, n+1)) \subset E \Rightarrow \dim B(e, n+1) \leq \dim E$$

Donc on aurait $n+1 \leq n \rightarrow$ Impossible.

Conclusion : La famille $B(e, n+1)$ est bien liée.

2) On sait que $B(e, n+1)$ est une famille liée. Or, toute sous-famille d'une famille liée est elle aussi liée.

Donc $\forall k \geq n+1$, $B(e, k)$ est liée.

Ainsi $\{k \in \mathbb{N}^* \mid B(e, k) \text{ est libre}\} \subset \llbracket 1; n \rrbracket$

Ainsi $\{k \in \mathbb{N}^* \mid B(e, k) \text{ est libre}\}$ est une partie non vide (car pour $k=1$ $B(e, 1) = e$ et $e \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $B(e, 1)$ est bien libre) de $\mathbb{N}$ et finie. Elle admet donc un plus grand élément

Conclusion : $\exists d(e) \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(e) = \max \{k \in \mathbb{N}^* \mid B(e, k) \text{ est libre}\}$

3) On sait que $d(e) = \max \{ k \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre} \}$.

Donc comme $d(e)+1 > d(e)$, alors $\mathcal{B}(e, d(e)+1)$ est liée:

Puisque la famille $\mathcal{B}(e, d(e)+1)$ est liée, alors:

$\exists (\tilde{a}_0 \dots \tilde{a}_{d(e)}) \in \mathbb{K}^{d(e)+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{d(e)+1}}\}$ tq:

$$\sum_{k=0}^{d(e)} \tilde{a}_k \cdot u^k(e) = 0_E \quad (*)$$

• Supposons par l'absurde que $\tilde{a}_{d(e)} = 0$:

$$\text{Alors } (*) \Rightarrow \sum_{k=0}^{d(e)-1} \tilde{a}_k \cdot u^k(e) = 0_E.$$

Or la famille $\mathcal{B}(e, d(e))$ est libre, donc on aurait:

$$\forall k \in [0; d(e)-1], \tilde{a}_k = 0$$

Ainsi on aurait montré, par l'absurde, l'implication suivante:

$$\sum_{k=0}^{d(e)} \tilde{a}_k \cdot u^k(e) = 0_E \Rightarrow \forall k \in [0; d(e)], \tilde{a}_k = 0$$

Donc la famille $\mathcal{B}(e, d(e)+1)$ n'est libre $\rightarrow$ Impossible.

Conclusion: $\tilde{a}_{d(e)} \neq 0$

• Posons alors: $\forall k \in [0; d(e)], a_k = -\frac{\tilde{a}_k}{\tilde{a}_{d(e)}}$, car $\tilde{a}_{d(e)} \neq 0$

En reprenant la relation (*), on a donc:

$$\tilde{a}_{d(e)} \cdot u^{d(e)}(e) = - \sum_{k=0}^{d(e)-1} \tilde{a}_k \cdot u^k(e)$$

D'où, comme $\tilde{a}_{d(e)} \neq 0$

$$u^{d(e)}(e) = \sum_{k=0}^{d(e)-1} \left(\frac{-a_k}{a_{d(e)}} \right) \cdot u^k(e) = \sum_{k=0}^{d(e)-1} a_k \cdot u^k(e)$$

Conclusion: $\exists (a_0 \dots a_{d(e)-1}) \in \mathbb{K}^{d(e)}$ tels que:

$$u^{d(e)}(e) = \sum_{k=0}^{d(e)-1} a_k \cdot u^k(e).$$

• Montrons alors par récurrence $\forall k \in \mathbb{N} \cap [d(e)+\infty[$ la proposition $P(k): u^k(e) \in \text{Vect}(e \dots u^{d(e)-1}(e))$

Initialisation: Pour $k = d(e)$

La proposition est bien vérifiée pour $k = d(e)$ d'après la remarque précédente.

Hérédité: Supposons que $P(k)$ est vraie pour $k \geq d(e)$, montrons alors que $P(k+1)$ est aussi vraie:

$$\text{On a } u^{k+1}(e) = u(u^k(e))$$

Or, par hypothèse de récurrence: $u^k(e) \in \text{Vect}(e \dots u^{d(e)-1}(e))$

$$\text{Donc } \exists (\lambda_0 \dots \lambda_{d(e)-1}) \in \mathbb{K}^{d(e)} \text{ tq: } u^k(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} \lambda_i \cdot u^i(e)$$

$$\text{D'où } u^{k+1}(e) = u(u^k(e)) = u\left(\sum_{i=0}^{d(e)-1} \lambda_i \cdot u^i(e)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{d(e)-1} \lambda_i \cdot u^{i+1}(e), \text{ car } u \in \mathcal{L}(E)$$

$$= \sum_{i=1}^{d(e)} \lambda_{i-1} \cdot u^i(e)$$

$$= \sum_{i=1}^{d(e)-1} \lambda_{i-1} \cdot u^i(e) + \lambda_{d(e)-1} \cdot u^{d(e)}(e)$$

$$\text{Or, } \left\{ \sum_{i=1}^{d(e)-1} \lambda_{i-1} \cdot u^i(e) \in \text{Vect}(e \dots u^{d(e)-1}(e)) \right.$$

$$\left. \lambda_{d(e)-1} \cdot u^{d(e)}(e) \in \text{Vect}(e \dots u^{d(e)-1}(e)) \right\}, \text{ d'après l'initialisation}$$

Donc par stabilité par somme de l'ev. Vect($e \dots u^{d(e)-1}(e)$)
On a bien:

$$u^{k+1}(e) = \lambda_{d(e)-1} \cdot u^{d(e)} + \sum_{i=1}^{d(e)-1} \lambda_{i-1} \cdot u^i(e) \in \text{Vect}(e \dots u^{d(e)-1}(e))$$

Conclusion: $\mathcal{P}(d(e))$ est vraie et $\forall k \geq d(e)$, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$

Par principe de récurrence: $\forall k \geq d(e)$, $u^k(e) \in \text{Vect}(e \dots u^{d(e)-1}(e))$

4) On a $E_n(e) = \text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e)) = \mathcal{B}(e, n)$

On, on a montré à la question 2) que $d(e) \leq n$

Avec pour convention
que cette somme est
nulle si $d(e) > n-1$

Donc on peut écrire que:

$$\forall x \in E_n(e), \exists (\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n, \text{ tq: } x = \sum_{k=0}^{d(e)-1} \lambda_k \cdot u^k(e) + \sum_{k=d(e)}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k(e)$$

D'où $u(x) = \sum_{k=0}^{d(e)-1}$

4) On a que $E_n(e) = \text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e))$

Soit donc $x \in E_n(e)$: $\exists (\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq: $x = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k(e)$

$$\begin{aligned} \text{D'où } u(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^{k+1}(e), \text{ car } u \in \mathcal{L}(E) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k-1} u^k(e) + \lambda_{n-1} \cdot u^n(e) \end{aligned}$$

On, on a montré à la question 2) que $d(e) \leq n$, donc
d'après la récurrence précédemment établie:

$$u^n(e) \in \text{Vect}(u^0(e) \dots u^{d(e)-1}(e)) \subset \text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e))$$

Donc par stabilité par somme: $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k-1} \cdot u^k(e) + \lambda_{n-1} u^n(e) \in E_n(e)$

Donc $u(x) \in E_n(e)$.

• Soit maintenant $F \subset E$ tq: $\begin{cases} e \in F \\ u(F) \subset F \end{cases}$

Par un raisonnement similaire à celui que nous venons de

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

faute, on pourrait montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k(F) \subset F$.

Donc en particulier pour e : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k(e) \in F$.

Donc $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $u^k(e) \in F$. (car $e \in F$, donc on a bien pour $k=0$)

Et donc ainsi par stabilité par $+$ et par $\cdot$ avec F , on a bien :
 $\text{Vect}(u^0(e) \dots u^{n-1}(e)) \subset F$.

Soit finalement que $E_u(e) \subset F$.

5) Montrons que : $u(e) = \lambda e \Leftrightarrow d(e) = 1$

$\Rightarrow$ Supposons que l'on ait : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(e) = \lambda e$.

Alors $u(e) \in \text{Vect}(e)$

Donc par un raisonnement similaire à celui de la question 3), on a que $d(e) \leq 1$

Mais $d(e)$ est une famille libre. Donc $d(e) \geq 1$

On a donc bien $d(e) = 1$

$\Leftarrow$ Supposons que $d(e) = 1$

Alors la famille $(e, u(e))$ est liée : les deux vecteurs sont donc colinéaires,
 $\exists (\lambda) \in \mathbb{K}$, $\lambda e = u(e)$.

Donc e est un vecteur propre de u .

On a donc bien montré l'équivalence.

6) Montrons l'équivalence: μ homotétie $\Leftrightarrow \forall e \in E \setminus \{0_E\}, d(e) = 1$

$\Rightarrow$ / Supposons que μ est une homotétie, alors:
 $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \mu = \lambda \text{id}$.

Soit alors $e \in E \setminus \{0_E\}$:

On a $\mu(e) = \lambda e$

Donc d'après la question 5), $d(e) = 1$.

$\Leftarrow$ / Supposons que $\forall e \in E \setminus \{0_E\}, d(e) = 1$.

Alors d'après la question 5), tout vecteur e non nul de E est un vecteur propre de μ .

• Numérons E d'une base $\mathcal{B}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m)$:

$\exists (d_1 \dots d_m) \in \mathbb{K}^m$ tq $\forall k \in [1; m], \mu(\varepsilon_k) = d_k \cdot \varepsilon_k$ (*)

Soit alors $\vec{1} = (1 \dots 1)$ (le vecteur n'ayant que des 1 dans la base $\mathcal{B}$)

Posons $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $\mu(\vec{1}) = \lambda \vec{1}$

Montrons alors que $\forall k \in [1; m], d_k = \lambda$:

• On a l'égalité $\vec{1} = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k$

D'où $\mu\left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k\right) = \mu(\vec{1}) = \lambda \cdot \vec{1} = \lambda \sum_{k=1}^m \varepsilon_k$

Or, $\mu\left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^m \mu(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^m d_k \cdot \varepsilon_k$.

On a donc l'égalité: $\sum_{k=1}^m d_k \varepsilon_k = \sum_{k=1}^m \lambda \varepsilon_k$.

Ainsi, par unicité de la décomposition dans une base:

$\forall k \in [1; m], d_k = \lambda$.

Donc en reprenant (*): $\forall k \in [1; m], \mu(\varepsilon_k) = \lambda \varepsilon_k$

Ainsi u et λId coïncident sur une base, donc : $u = \lambda \text{Id}$.

Conclusion: u homotétie $\Leftrightarrow \forall e \in E \setminus \{0_E\}, d(e) = 1$.

7) $\Rightarrow$ / Supposons que u est un endomorphisme cyclique:

Alors d'après la définition de l'énoncé:

$$E = E_u(e) = \text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e))$$

Par conséquent $B(e, n)$ est une famille génératrice de E , mais aussi de cardinal minimal (car $\dim E = n$). C'est donc aussi une famille libre de E .

Donc $(e \dots u^{n-1}(e))$ est libre. D'où $d(e) \geq n$

Or, on a montré en 1) que $B(n+1, e)$ était liée, d'où $d(e) \leq n$

Ainsi $d(e) = n$

Conclusion: $\exists e \in E \setminus \{0_E\} \text{ tq } d(e) = n$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que: $\exists e \in E \setminus \{0_E\}, d(e) = n$

Alors $B(e, n)$ est libre, donc $B(e, n)$ est une famille libre de cardinal maximal de E . C'est donc une base de E .

Ainsi $E = \text{Vect}(B(e, n)) = E_u(e)$

Conclusion: u est bien un endomorphisme cyclique.

Conclusion générale: u endomorphisme cyclique $\Leftrightarrow \exists e \in E \setminus \{0_E\}, d(e) = n$.

Section B.

8) Comme u est un endomorphisme cyclique, alors: $d(e) = n$

Donc d'après 3): $u^n(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot u^k(e)$.

Soit donc $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$, alors: $u(u^k(e)) = u^{k+1}(e)$

Donc dans la base $\mathcal{B}(E, m)$, on a:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}(E, m)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} e \\ u(e) \\ u^2(e) \\ \vdots \\ u^{m-1}(e) \end{matrix}$$

$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}(E, m)}(u)$ est bien la matrice de Frobenius.

$$\begin{aligned} \underline{9)} \quad P_A(u)(e) &= (u^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot u^k)(e) \\ &= u^m(e) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot u^k(e) \end{aligned}$$

$$= \underline{O_E}, \text{ d'après le calcul fait en 8).}$$

• De plus: $\forall k \in [1; m-1]$: En notant $Q_k = X^k$

$$P_A(u)(u^k(e)) = (P_A(u) \circ Q_k(u))(e)$$

$$\begin{aligned} &= (Q_k(u) \circ P_A(u))(e), \text{ car toutes les puissances de } u \text{ commutent avec tout polynôme en } u \\ &= Q_k(u)(O_E), \text{ d'après 9)} \end{aligned}$$

$$= \underline{O_E}, \text{ car } Q_k(u) \in \mathcal{A}(E).$$

Conclusion: $\forall k \in [0; m-1]$, $P_A(u)(u^k(e)) = O_E$.

Donc $P_A(u)$ s'annule sur la base $\mathcal{B}(E, m)$. Ainsi $P_A(u) = O_{\mathcal{A}(E)}$.

$$\underline{10)} \text{ Soient } (\lambda_0 \cdots \lambda_{m-1}) \in \mathbb{A}^m \text{ tq: } \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \cdot u^k = O_{\mathcal{A}(E)}$$

$$\text{Alors en particulier: } \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \cdot u^k \right)(e) = O_E$$

$$\text{Or, } \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \cdot u^k \right)(e) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k u^k(e)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 24

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On, la famille $B(e, m)$ est libre, donc :

$$\sum_{k=0}^{m-1} u^k(e) \cdot \lambda_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in [0; m-1], \lambda_k = 0$$

On a donc montré l'implication :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \forall k \in [0; m-1], \lambda_k = 0.$$

Conclusion : La famille $(u^0 \dots u^{m-1})$ est donc libre.

11) Puisque $(u^0 \dots u^{m-1})$ est libre, alors si on supposait que :
 $\exists P \in \mathbb{K}_{m-1}[X] \setminus \{0\} \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors en considérant le

même raisonnement qu'à la question précédente, on aurait :

$$P = 0_{\mathbb{K}_{m-1}[X]} \rightarrow \text{Ceci est absurde.}$$

Donc : $\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \deg P \geq m$

Pour, comme $\deg P_A = m$, on en déduit que P_A est un polynôme annulateur de u de degré minimal.

12) En notant $\text{Rac}(P_A)$ l'ensemble des racines de P_A

• Montrons que l'on a $\text{Rac}(P_A) = \text{Sp}(u)$.

• $Sp(u) \subset Rac(P_A)$:

Soit $\lambda \in Sp(u)$ et $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$

On a $u(x) = \lambda x$.

On sait donc d'après le cours que : $\forall P \in B[x], P(u)(x) = P(\lambda)x$
(Ce que l'on pourrait montrer par récurrence sur les puissances de u).

Donc on a en particulier par $P_A(u) = 0_{X(E)}$:

$$P_A(u)(x) = P_A(\lambda) \cdot x = 0_E.$$

Or, $x \neq 0_E$, donc on a bien $P_A(\lambda) = 0$

Ainsi $\lambda \in Rac(P_A)$, ce qui montre que $Sp(u) \subset Rac(P_A)$.

• Réciproquement, montrons que $Rac(P_A) \subset Sp(u)$.

~~D'après le théorème de factorisation dans $B[x]$, on peut montrer qu'il existe deux polynômes T (que l'on prend comme indice) et W (un élément simple de $B[x]$ n'ayant aucune racine dans B) tels que :~~

~~$$P_A(x) = T(x) \times W(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k) \times W(x)$$~~

~~Avec cette écriture on a donc : $Rac(P_A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$~~

Natons $Rac(P_A) = (\lambda_1 \dots \lambda_r)$, de la sorte :

$$P_A(x) = \prod_{k=1}^r (x - \lambda_k)^{m_k} \times Q(x), \text{ où } Q \in K[x]$$

• Supposons par l'aburde que $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ tq $d_i \notin Sp(u)$.

Comme d_i n'appartient pas au spectre de u , alors:
 $u - d_i$ est bijectif.

Donc par composition $(u - d_i)^{m_i}$ est bijectif.

Pourtant de cette observation:

$$\text{On a } P_A(u) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (u - d_k \text{Id})^{m_k} \circ (u - d_i \text{Id})^{m_i} \circ Q(u) = 0_{X(E)}.$$

Comme tout polynôme en u commute avec tout autre polynôme en u , on a:

$$P_A(u) = 0_{X(E)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (u - d_k \text{Id})^{m_k} \circ Q(u) \circ (u - d_i \text{Id})^{m_i}$$

Donc en composant par $(u - d_i)^{-m_i}$, on aurait:

$$P_A(u) \circ (u - d_i)^{-m_i} = 0_{X(E)} \circ (u - d_i)^{-m_i} = 0_{X(E)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (u - d_k \text{Id})^{m_k} \circ Q(u)$$

Donc le polynôme $\underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (x - d_k) \times Q(x)}_{W(x)}$ annule un polynôme annulateur

de u . Or $\deg W(x) = n - m_i < n = \deg P_A$.

Donc W annule un polynôme annulateur de u de degré inférieur à P_A , alors même que P_A est un polynôme annulateur de A de degré minimal. $\rightarrow$ Impossible.

Conclusion $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $d_i \in Sp(u)$.

Donc $Rac(P_A) \subset Sp(u)$.

Conclusion générale: $Rac(P_A) = S_1(u)$.

(Voir feuille 11 pour la suite, pour la partie 2...)

13) Pour que u soit diagonalisable, il suffit que P_A soit scindé dans $\mathbb{K}$, de la sorte, la somme des multiplicités vaut $n = \dim E$, et comme chaque racine est vp. de u , alors on a :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = n$$

Donc u est bien diagonalisable. Mais on aurait aussi le réciproque, car chaque vp. est racine de P_A .

Conclusion: u diagonalisable $\Leftrightarrow P_A$ est scindé dans $\mathbb{K}$.

Section C:

14) La matrice de f est symétrique réelle, d'après le théorème spectral f est diagonalisable (dans une BON formée de vecteurs propres).

16) On remarque que :

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 + V_3 \\ f(V) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \\ f^2(V) = \lambda_1^2 V_1 + \lambda_2^2 V_2 + \lambda_3^2 V_3 \end{cases}$$

Or, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible (c'est bien une matrice de Vandermonde).

Pour $(V, f(V), f^2(V))$ est une famille libre.

Puis $d(V) \geq 3$. Mais d'après 1), $d(V) \leq 3$.

Ainsi $d(V) = 3 \Rightarrow f$ est cyclique, d'après 2).

Section D:

19) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2$. D'après le théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[x]$:

$$\exists (W, W') \in \mathbb{R}[x]^2, \text{ tq } \begin{cases} P = \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k)^{m_k} \times W(x) \\ Q = \prod_{k=1}^n (x - \beta_k)^{m_k} \times W'(x) \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Où (W, W') sont deux éléments simples de $\mathbb{R}[x]$ n'admettant aucune racine réelle.

- Si $\forall k \in [1; \min(P, 2)]$, $d_k \neq \mu_k$, et que W et W' ne partagent aucun facteur commun, alors on pose $\Delta = 1$
- Sinon, on pose D_0 le produit des facteurs en commun à W et W' , et/ou des termes en $(x - \lambda)$ communs à P et Q .

→ Symbole "divise"

En considérant alors $H = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists D \in \mathbb{R}[x] \text{ tq } D \mid P \text{ et } D \mid Q \text{ et } \deg D = k\}$
on remarque alors que $H \subset [0; n]$. → à cause de D_0

Donc H est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus grand élément. Soit S ce maximum

On pose Δ le polynôme correspondant à S , et on le normalise par son coefficient dominant.

Ainsi Δ ainsi construit convient

Conclusion: $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[x], \exists \Delta \in \mathbb{R}[x] \text{ tq } \Delta \mid P, \Delta \mid Q \text{ et } \deg \Delta = \max H$.

Soit $Q \in \mathbb{R}[x]$

20) Comme $\downarrow$ appartient à $\mathbb{R}[x]$, alors d'après le théorème de d'Allembert-Goursat: $\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } Q(\lambda) = 0$.

• On considère alors $\Delta = \text{pgcd}(P, P')$. avec $\deg \Delta \geq 1$

$\exists (T_1, T_2) \in \mathbb{R}[x], P = \Delta T_1 \text{ et } P' = \Delta T_2 \quad (*)$

En particulier pour $\Delta \in \mathbb{R}[x], \exists \lambda \in \mathbb{C}, \Delta(\lambda) = 0$

→ d'après (*)

D'où comme $\Delta \mid P$ et $\Delta \mid P'$, alors $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) = 0$

On a donc : $\deg \Delta \geq 1 \Rightarrow P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) = 0$

• Réciproquement si $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) = 0$, alors λ est racine d'ordre au moins 2 de P et d'ordre au moins de P' .

Pose $P = (x - \lambda)^2 \times Q(x)$ et $P'(x) = (x - \lambda) + (x - \lambda)^2 Q'(x)$

P' est $(x - \lambda) \mid P$ et $(x - \lambda) \mid P'$.

Donc $\deg(\text{pgcd}(P, P')) \geq 1$ (car c'est celui de $\deg$ maximal, et $\deg(x - \lambda) \geq 1$)

Donc on a bien $\deg(\text{pgcd}(P, P')) \geq 1$.

Conclusion : $\deg(\text{pgcd}(P, P')) \geq 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) = 0$.

21) fonction $b = \text{racSimp}(a)$

$p = \text{poly}(\text{coeff}, "x", 'c')$

$d = \text{bezout}(p, \text{derivat}(p))$

$b = \text{degree}(d) \geq 1$

end function.

Suite question 22

Geometric

On a montré à la question 13 que M est diagonalisable si et seulement si P_A est scindé dans $\mathbb{R}[x]$.

Donc M est diagonalisable si et seulement si P_A n'a que des racines simples.

Il faut donc juste appliquer la fonction précédente pour le polynôme P_A . Car si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.

22) Soit $\tilde{P}: x \mapsto P(x)$.

$\tilde{P}$ est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{B}$.

Posons alors $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $I_k = [x_k; x_{k+1}]$.

- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\tilde{P}$ est continue sur I_k , et $\tilde{P}(x_k)$ et $\tilde{P}(x_{k+1})$ sont de signes opposés. Donc $0 \in \tilde{P}(I_k)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires: $\exists \alpha_k \in I_k$ tel que $\tilde{P}(\alpha_k) = 0$.

- Ainsi, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\tilde{P}(\alpha_k) = P(\alpha_k) = 0$

Donc P admet bien n racines.

De plus, comme $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $P(x_k) \neq 0$, on $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$, alors on en déduit que :

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\alpha_k \in I_k$, et $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$

Conclusion: P admet bien n racines distinctes.

23) Soit $z \in \mathbb{B}$ tel que $P(z) = 0$.

est $P(z) = 0$, alors $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0$, par productivité

- Si $|z| \geq 1$, alors, $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ (*)

$$\text{D'où } P(z) = 0 \Rightarrow z^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

$$\text{Donc } |z^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|, \text{ par inégalité triangulaire}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \times |z|^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \times |z|^{n-1}, \text{ d'après (*)}$$

Donc en divisant par $|z|^{n-1} > 0$, on a bien:

$$\underline{|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}$$

• Puis si $|z| \leq 1$, et bien on a notre majoration.

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{R} \text{ tq } P(z) = 0, \quad P(z) \leq \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$

24) ~~fonction~~ ~~val = racSimpApprox(c, pas)~~
 ~~$a = \frac{m - pas}{2}$~~
 ~~$b = 1$~~
~~for $k : (m - pas)/2 : pas : (m + pas)/2 - pas$~~

24) fonction $val = \text{racSimpApprox}(c, pas)$

$a = 1 \quad S = 0$

$b = 1 \quad A = 0$

for $k : (m - pas)/2 : pas : (m + pas)/2 - pas$

$a = k$

$b = k + 1$

if $p(a) \times p(b) < 0$ then $S = S + 1$

else $S = S$

end

$A = (S == m)$

$val = A$

end fonction.

25) On applique la fonction précédente à P_p . Si on détecte m changements de signe dans P_p est bien racine (d'après 22), donc d'après 13) A est diagonalisable.

Toutefois, si le pas est trop gros, ou si P_p est constant sur l'intervalle, on peut ne détecter aucun changement de signe, ce qui explique l'apparition de "imc".

Partie II :

Section A :

26) Soit $B = (e_1 \dots e_p)$ une base de vecteurs propres.

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (u - \lambda_1 Id) \circ \dots \circ (u - \lambda_k Id) (u_k) = \bigcirc_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (u - \lambda_i Id) \circ (u - \lambda_k Id) (u_k)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 394178

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

En effet, on peut bien commuter les expressions (ce que montre (*)) car u commute avec tout polynôme en u .

$$\text{D'où } (u - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{Id}) = \bigcirc_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (u - \lambda_i \text{Id}) (0_E) = \underline{0_E}.$$

Donc $(u - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{Id})$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur une base, c'est donc lui aussi l'endomorphisme nul.

27) Comme les $(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ sont distinctes, elles ne peuvent pas toutes être nulles.

Donc dans le développement de $\prod (x - \lambda_i)$, il y'aura bien au moins un double produit non nul (par exemple devant x^{n-1})

Donc il existe une famille $(d_0 \dots d_p)$ de scalaires non tous nuls tels que :

$$\underline{\sum_{k=0}^p d_k \cdot u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$$

On remarque en particulier que $d_p = 1$ (car $\prod_i (x - \lambda_i)$ et de coefficient dominant vaut 1).

Ainsi la famille $(u^0 \dots u^p)$ est bien liée.

28) Si u est diagonalisable, alors d'après 13) $p = n$.

29) On remarque que :

$$\begin{cases} e = e_1 + \dots + e_p \\ u(e) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \\ \vdots \\ u^{m-1}(e) = \lambda_1^{m-1} e_1 + \dots + \lambda_p^{m-1} e_p \end{cases}$$

On, la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & & \lambda_p^{m-1} \end{pmatrix}$ est une matrice inversible.*

* On pourrait montrer cela en faisant l'étude de

$$\text{l'isomorphisme } \psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}[x]_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1} \\ p \mapsto (p(d_0) \dots p(d_m)) \end{pmatrix},$$

ou simplement en reconnaissant une matrice de Vandermonde.

Pour comme V est inversible, et que V est la matrice représentant $B(e, m)$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$, alors on en déduit que $B(e, m)$ est libre.

Pour d'après 7), le vecteur e vérifie les conditions nécessaires pour que μ soit cyclique.

Conclusion: μ est cyclique.

Section B:

31) Soit $(\lambda_0 \dots \lambda_{n-1})$ tels que: $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k(e) = 0_E$.

• Supposons par l'absurde que les (λ) ne sont pas tous nuls.
Notons alors $i_0 = \min \{ k \in \{0; n-1\}, \lambda_k \neq 0 \}$.

$$\text{On a donc } \sum_{k=i_0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k(e) = 0_E$$

En composant $n-1-i_0$ fois par u , il ne subsiste que:

$$u^{n-1-i_0} \left(\sum_{k=i_0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^k(e) \right) = \sum_{k=i_0}^{n-1} \lambda_k \cdot u^{n-1+k-i_0}(e) = \lambda_{i_0} \cdot u^{n-1}(e) = 0_E$$

Or, $u^{n-1}(e) \neq 0$, donc on a $\lambda_{i_0} = 0 \rightarrow$ Impossible.

Conclusion: $\forall i \in \{0; n-1\}, \lambda_i = 0$.

La famille $(u^i(e))_{i \in \{0; n-1\}}$ est donc libre.

32) On voit que $\text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e)) \subset E$.

$$\text{Donc } \dim \text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e)) \leq \dim E = n$$

Mais $\dim \text{Vect}(e \dots u^{n-1}(e)) = n$, car la famille est libre.

On a donc bien $n \leq m$.

• Si maintenant $n = m$, alors d'après 71, u est cyclique.

~~Montrons maintenant la réciproque~~
Mais on a aussi la réciproque, car si u est cyclique, alors,
 $\exists e \in E$ tq $(e \dots u^{m-1}(e))$ soit libre.

Donc cette famille ne contient pas de vecteur nul, sinon elle serait liée. D'où $n \geq m$, mais on a aussi montré que $n \leq m$ en 32).

Donc $n = m$

Conclusion: u est cyclique $\Leftrightarrow n = m$.

Section C:

→ On aurait pu prendre un degré quelconque

33) Soit $x \in \mathbb{R}$: En notant $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$

$$P(x+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (x+t)^{n-1} \times a_{n-1}, \text{ car } a_{n-1} \neq 0$$

$$\text{On } t+x \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \text{ d'où } (t+x)^{n-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{n-1}$$

$$\text{Ainsi } P(x+t) e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_{n-1} \times t^{n-1} \times e^{-t}.$$

$$\text{On, } (a_{n-1} \times t^{n-1} \times e^{-t}) \times t^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{n+1} \times a_{n-1} \times e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } a_{n-1} \times t^{n-1} \times e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{Et donc } \underline{P(x+t) e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$\text{On } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge (Critère de Riemann, } \alpha > 1)$$

Donc par comparaison de fonction positive $\int_1^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt$ cv.

On, $t \mapsto P(x+t) e^{-t}$ est continue, donc $\int_0^1 P(x+t) e^{-t} dt$ converge aussi.

Une première application de la relation de Chevalier à des intégrales impropres convergentes:

$$\underline{\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt \text{ converge.}}$$

$$\text{Ainsi: } \forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \underline{\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt \text{ converge.}}$$

• Montrons que $x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt$ converge.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé:

Comme la convergence de l'intégrale a été montrée pour tout $P \in E$, alors en particulier:

Pour la famille $(Q_0, \dots, Q_{n-1})$ tq $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, Q_k = (X - x_0)^k$

$$\text{On, } \int_0^{+\infty} Q_k(x) e^{-t} dt$$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $P \in E$ et $x \in \mathbb{R}$: Par $P = \sum_{k=0}^p a_k x^k$, on a :

$$\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^p a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i x^{k-i} e^{-t} dt$$

$$\text{On, } \sum_{k=0}^p a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i x^{k-i} = \sum_{i=0}^p \sum_{k=i}^p a_k \binom{k}{i} t^i x^{k-i}$$

$$\text{D'où } \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt = \sum_{i=0}^p \sum_{k=i}^p a_k \binom{k}{i} x^{k-i} \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt \quad (*)$$

• Justification de (*): On a cela par linéarité des intégrales impropres convergentes, et car $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} x^k (x+t) e^{-t} dt$ converge d'après 33).

$$\text{On } \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt = \Gamma(i+1) = i!$$

$$\text{D'où, } \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt = \sum_{i=0}^p \sum_{k=i}^p a_k \binom{k}{i} x^{k-i} i! = Q(x)$$

On remarque alors que Q est une fonction polynomiale.

Conclusion: $\left(x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt \right) \in E$.

39) On a par linéarité de l'évaluation que: $\forall (P, Q) \in E$
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda P + Q)(x+t) = \lambda P(x+t) + Q(x+t)$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x+t) e^{-t} dt = I$

$$I = \int_0^{+\infty} \lambda P(x+t) e^{-t} + Q(x+t) e^{-t} dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(x+t) e^{-t} dt, \text{ par linéarité des intégrales impropres convergentes.}$$

Ainsi, $\forall (P, Q) \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \mu(\lambda P + Q) = \lambda \mu(P) + \mu(Q)$.

Conclusion: $\mu \in \mathcal{L}(E)$.

32) Soit $P \in E$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A P(x+t) e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$$

Soient $\begin{cases} \varphi: t \mapsto P(x+t) \\ \psi: t \mapsto -e^{-t} \end{cases}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.

On a pour intégration par parties sur $[0, A]$, pour $A \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \int_0^A P(x+t) e^{-t} dt &= [P(x+t) (-e^{-t})]_0^A + \int_0^A P'(x+t) e^{-t} dt \\ &= P(x) - P(A+x) e^{-A} + \int_0^A P'(x+t) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Or, d'après 33), $P(A+x) e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

Puis, comme, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A P'(x+t) e^{-t} dt = \mu(P')(x)$

On a finalement bien:

$\forall x \in \mathbb{R}, \mu(P)(x) = P(x) + \mu(P')(x)$.

36) Comme $\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$, on pourrait alors montrer par récurrence, en se servant des mêmes arguments qu'à la question précédente que:

Si $\deg P = p$

$$\forall k \in \mathbb{I} 1; p \mathbb{I}, u(P)(x) = \sum_{i=0}^{k-1} P^{(i)}(x) + u(P^{(k)})(x)$$

Or, on peut aller plus loin, lorsque l'on a $u(P^{(p)})(x)$ c'est alors comme $P^{(p+1)} = 0_E$, on a: $u(P^{(p)})(x) = P^{(p)}(x) \cdot \underbrace{u(1)}_{p+1}$

$$\text{D'où } u(P)(x) = \sum_{k=0}^p P^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}(x), \text{ car } \forall k \geq p+1, P^{(k)}(x) = 0$$

Ainsi, on a bien $u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$.

37) Soit $\varphi: (E 0; +\infty[\rightsquigarrow [x; +\infty[$
 $t \longmapsto x+t=u$

• φ est une fonction affine, donc bijective, et de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, [x; +\infty[)$.

On a donc par changement de variable affine, (On a directement l'égalité car on voit que l'intégrale converge):

$$\int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t} dt = \int_x^{+\infty} P(u) e^{-u+x} du = e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds.$$

38) $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds$ est la primitive de $f(t) = P(t) e^{-t}$

l'annulant en $+\infty$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx} \left(\int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds \right) = -P(x) e^{-x}$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, u'(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds - P(x)$

$$= u(P)(x) - P(x)$$

$$= \underline{u(P')}(x) \text{ d'après 35).}$$

Conclusion:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mu(P)'(x) = \mu(P')(x).$$

$$\text{Donc } \mu(P)' = \mu(P').$$