Partie I Projection sur un convexe fermé.

a) $K =]-\infty, 1] \times]-\infty, 1]$

- Soient $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux éléments de K. Soit $t \in [0,1]$

  $tu + (1-t)v = (tu_1 + (1-t)v_1, tu_2 + (1-t)v_2)$

  $u_1 \leq 1$, $v_1 \leq 1$, $t \in [0,1]$ et $(1-t) \in [0,1]$. Alors $tu_1 + (1-t)v_1 \leq t + (1-t) = 1$.

  De même $tu_2 + (1-t)v_2 \leq 1$. Donc $tu + (1-t)v \in K$.

  $\forall (u,v) \in K^2, \forall t \in [0,1]$, $tu + (1-t)v \in K$. **K est convexe.**

- V1 $]-\infty, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Alors **K est un fermé de $\mathbb{R}^2$** comme produit de deux fermés de $\mathbb{R}$.

  V2 Posons $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $p_1(x) = x_1$ et $p_2(x) = x_2$.

  p_1 et p_2 sont deux applications continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $]-\infty, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

  Alors $p_1^{-1}(]-\infty,1])$ et $p_2^{-1}(]-\infty,1])$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$.

  Alors $K = p_1^{-1}(]-\infty,1]) \cap p_2^{-1}(]-\infty,1])$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.

- Supposons que K soit un borné de $\mathbb{R}^2$

  $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $K \subset B(0,r)$ $\quad (0 = (0,0))$.

  Donc $\forall u \in K$, $\|u\| < r$. Posons $A = (-r, 0)$.

  $A \in K$ car $-r \leq 1$ et $0 \leq 1$. Alors $A \in B(0,r)$. $\|(-r,0)\| < r$.

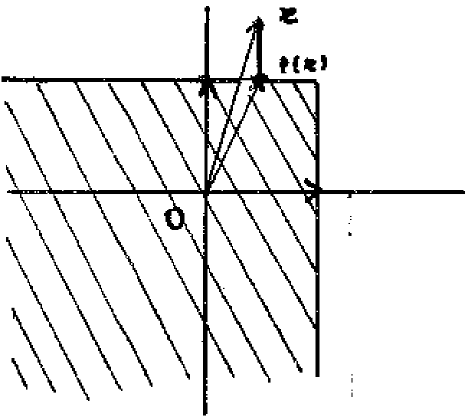
  Donc $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{(-r)^2 + 0^2} < r$!

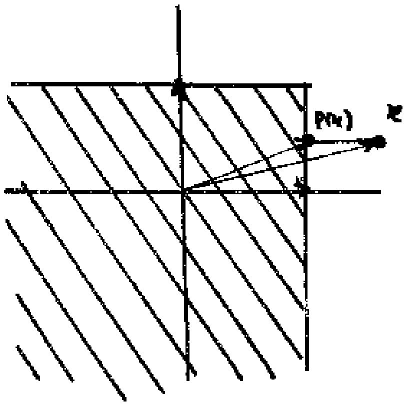
  Ainsi **K n'est pas borné.**

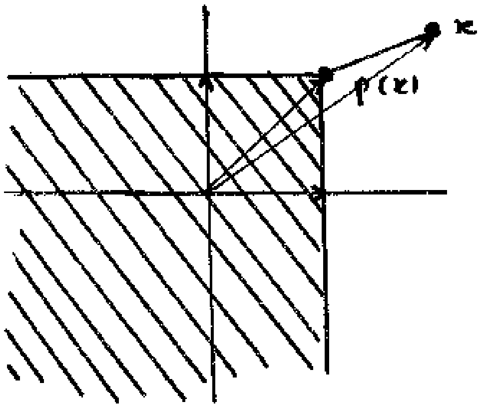
b) et c) $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

Nous allons faire trois figures qui nous permettront de deviner la projection de x sur K.

Rappelons que $(x_1, x_2) \notin K$. On n'a donc pas simultanément $x_1 \leq 1$ et $x_2 \leq 1$.







Ici $0<x_1\le 1$ et $x_2>1$
il semble que $p(x)=(x_1,1)$
1er cas...

Ici $0<x_2\le 1$ et $x_1>1$
il semble que $p(x)=(1,x_2)$
2ème cas

Ici $x_1>1$ et $x_2>1$
il semble que $p(x)=(1,1)$.
3ème cas

1er cas.. $0<x_1\le 1$ et $x_2>1$. Posons $y=(x_1,1)$. $y\in K$.

Soit $z=(z_1,z_2)\in K$. $z_1\le 1$ et $z_2\le 1$.

$$\|x-z\|^2-\|x-y\|^2=(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2-(x_1-x_1)^2-(x_2-1)^2=(x_1-z_1)^2-(x_2-1)^2+(x_2-z_2)^2$$

$$\|x-z\|^2-\|x-y\|^2=(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2-x_2+1)(x_2-z_2+x_2-1)=(x_1-z_1)^2+(1-z_2)(2x_2-1-z_2). \quad (1)$$

$(x_1-z_1)^2\ge 0$, $1-z_2\ge 0$, $2x_2-1-z_2 \geq 2-1-z_2 = 1-z_2\ge 0$. (2)

Alors $\|x-z\|^2-\|x-y\|^2\ge 0$

de plus $\|x-z\|^2-\|x-y\|^2=0 \overset{(1)+(2)}{\iff} \begin{cases} x_1-z_1=0\\ 1-z_2=0\end{cases} \iff z_1=x_1$ et $z_2=1 \iff z=y$.

Alors $\forall z\in K$, $\|x-z\|^2\ge\|x-y\|^2$ et $\|x-z\|^2=\|x-y\|^2 \iff z=y$.

$\forall z\in K$, $\|x-y\|\le\|x-z\|$ avec égalité si et seulement si $z=y$.

donc $\min\limits_{z\in K}\|x-z\|$ existe et y est le seul élément de K qui réalise ce minimum.

$x=(x_1,x_2)$ possède une projection $p(x)$ sur K et une seule qui est $(x_1,1)$ lorsque $\begin{cases}0<x_1\le 1\\ \text{et}\\ x_2>1\end{cases}$

2ème cas.. $0<x_2\le 1$ et $x_1>1$ De même :

$x=(x_1,x_2)$ possède une projection $p(x)$ sur K et une seule qui est $(1,x_2)$ lorsque $\begin{cases}0<x_2<1\\ \text{et}\\ x_1>1\end{cases}$

<u>3ème cas</u>.. $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$. Posons $y = (1,1)$. $y \in K$. Soit $(z_1, z_2) \in K$. $z_1 \le 1$ et $z_2 \le 1$.

$\|x-z\|^2 - \|x-y\|^2 = (x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2 - (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 = (x_1-z_1+x_1-1)(x_1-z_1-x_1+1) +$

$(x_2-z_2+x_2-1)(x_2-z_2-x_2+1) = (2x_1-z_1-1)(1-z_1) + (2x_2-z_2-1)(1-z_2)$.

$2x_1-z_1-1 \geqq 2-z_1-1 = 1-z_1 \geq 0$, $1-z_1 \geq 0$, $2x_2-z_2-1 \geqq 2-z_2-1 = 1-z_2 \geq 0$, $1-z_2 \geq 0$.

Alors 1°/ $\|x-z\|^2 - \|x-y\|^2 \geq 0$

2°/ $\|x-z\|^2 - \|x-y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-z_1 = 0 \text{ et} \\ 1-z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 1 \Leftrightarrow z = y$. Alors :

$\|x-z\| \geq \|x-y\|$ avec égalité si et seulement si $z = y$

<u>$\forall z \in K$, $\|x-y\| \le \|x-z\|$ et $\|x-y\| = \|x-z\| \Leftrightarrow z = y$.</u> Rappelons que $y \in K$.

Donc $\min_{z \in K} \|x-z\|$ et y est le seul élément de K qui réalise ce minimum.

<u>$x = (x_1, x_2)$ possède une projection p(x) sur K et une seule qui est $(1,1)$ lorsque $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$.</u>

d) <u>1er cas</u>.– $0 < x_1 \le 1$ et $x_2 > 1$. $\|x - p(x)\| = \|(x_1, x_2) - (x_1, 1)\| = \|(0, x_2 - 1)\| = \sqrt{0^2 + (x_2-1)^2}$

$\|x - p(x)\| = |x_2 - 1| = x_2 - 1$,

<u>2ème cas</u>.. $0 < x_2 \le 1$ et $x_1 > 1$. De même $\|x - p(x)\| = |x_1 - 1| = x_1 - 1$

<u>3ème cas</u>.. $x_1 > 1$, $x_2 > 1$. $\|x - p(x)\| = \|(x_1, x_2) - (1,1)\| = \|(x_1 - 1, x_2 - 1)\| = \sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2}$

$\|x - p(x)\| = \sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2}$.

Ainsi $\|x - p(x)\| = \begin{cases} x_2 - 1 & \text{si } 0 < x_1 \le 1 \text{ et } x_2 > 1 \quad {}^*\text{ou si } x_1 \le 1 \\ x_1 - 1 & \text{si } 0 < x_2 \le 1 \text{ et } x_1 > 1 \quad {}^*\text{ou si } x_2 \le 1 \\ \sqrt{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2} & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 > 1 \end{cases}$

* <u>Remarque</u> .. Si $x_1 \le 1$ nécessairement $x_2 > 1$ car $x = (x_1, x_2) \notin K$

Si $x_2 \le 1$ " " $x_1 > 1$ car $x = (x_1, x_2) \notin K$

```
function distance(x1,x2:real):real;

begin


If x1<=1 then distance:=x2-1
       else if x2<=1 then distance:=x1-1
                     else distance:=sqrt(sqr(x1-1)+sqr(x2-1));


end;
```

e) **1er cas..** $0<x_1\le 1$ et $x_2>1$. $p(x)=(x_1,1)$. Soit $z=(z_1,z_2)\in K$. $z_1\le 1$ et $z_2\le 1$.

$$\langle z-p(x), x-p(x)\rangle = \langle (z_1-x_1, z_2-1), (0, x_2-1)\rangle = \underbrace{(z_2-1)}_{\le 0}\underbrace{(x_2-1)}_{>0} \le 0.$$

$\forall z\in K, \langle z-p(x), x-p(x)\rangle \le 0.$

2ème cas.. $0<x_2\le 1$ et $x_1>1$. $p(x)=(1,x_2)$. Soit $z=(z_1,z_2)\in K$. $z_1\le 1$ et $z_2\le 1$

$$\langle z-p(x), x-p(x)\rangle = \langle (z_1-1, z_2-x_2), (x_1-1,0)\rangle = \underbrace{(z_1-1)}_{\le 0}\underbrace{(x_1-1)}_{>0} \le 0$$

$\forall z\in K, \langle z-p(x), x-p(x)\rangle \le 0.$

3ème cas.. $x_1>1$ et $x_2>1$. $p(x)=(1,1)$. Soit $z=(z_1,z_2)\in K$. $z_1\le 1$ et $z_2\le 1$.

$$\langle z-p(x), x-p(x)\rangle = \langle (z_1-1, z_2-1), (x_1-1, x_2-1)\rangle = \underbrace{(z_1-1)}_{\le 0}\underbrace{(x_1-1)}_{>0}+\underbrace{(z_2-1)}_{\le 0}\underbrace{(x_2-1)}_{>0} \le 0$$

$\forall z\in K, \langle z-p(x), x-p(x)\rangle \le 0.$

f) Soit $z\in K$. $\langle z-p(x), x-p(x)\rangle \le 0$ d'après e)

Alors $\langle z, x-p(x)\rangle - \langle p(x), x-p(x)\rangle \le 0$; $\langle x-p(x), z\rangle \le \langle x-p(x), p(x)\rangle$

Donc $\langle x-p(x), z\rangle \le \langle x-p(x), p(x)-x\rangle + \langle x-p(x), x\rangle = -\|x-p(x)\|^2 + \langle x-p(x), x\rangle$.

$x\notin K$ donc $\|x-p(x)\|^2>0$. Alors $-\|x-p(x)\|^2+\langle x-p(x), x\rangle < \langle x-p(x), x\rangle$.

Alors il existe un réel c tel que $-\|x-p(x)\|^2+\langle x-p(x), x\rangle < c < \langle x-p(x), x\rangle$

car l'intervalle $]-\|x-p(x)\|^2+\langle x-p(x), x\rangle, \langle x-p(x), x\rangle[$ n'est pas vide.

Donc $\langle x-p(x), z\rangle \le -\|x-p(x)\|^2+\langle x-p(x), x\rangle < c < \langle x-p(x), x\rangle$.

Notons que c ne dépend pas de z !

Alors $\exists c \in \mathbb{R}, \forall z \in K, \langle u-p(u), z\rangle < c < \langle u-p(u), u\rangle$.

Remarque. Notons que l'on peut prendre $c = \frac{1}{2}\left[-\|u-p(u)\|^2 + 2\langle u-p(u), u\rangle\right]$ qui est le milieu de l'intervalle $]-\|u-p(u)\|^2 + \langle u-p(u), u\rangle, \langle u-p(u), u\rangle[$.

Alors $c = \frac{1}{2}\left[-\|u\|^2 - \|p(u)\|^2 + 2\langle u, p(u)\rangle + 2\|u\|^2 - 2\langle p(u), u\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\|u\|^2 - \|p(u)\|^2\right]$.

On peut donc prendre $c = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \|p(u)\|^2\right)$.

Q2 Exemple 2.

a) • $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall t \in [0,1], tu + (1-t)v \in E$ car E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi E est convexe.

• Montrons que E est fermé. Montrons donc que $\bar{E}$ est ouvert.

Soit $a \in \bar{E}$. Notons a' la projection orthogonale de a sur E ($\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique ...). Posons $r = \|a-a'\|$

Le théorème de meilleure approximation indique que $\|a-a'\| = \min_{z \in E} \|a-z\|$.

Montrons que la boule ouverte $B(a,r)$ de centre a et de rayon r est contenue dans $\bar{E}$. Soit $x \in B(a,r)$

$\|x-a\| < r = \min_{z\in E}\|a-z\|$. Si $x \in E$: $\|x-a\| < r = \min_{z\in E}\|a-z\| \leq \|a-x\| = \|x-a\|$!!

Donc $x \notin E$.

$\forall x \in B(a,r), x \notin E$. $B(a,r) \subset \bar{E}$.

Ainsi $\forall a \in \bar{E}, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(a,r) \subset \bar{E}$. $\bar{E}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. E est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

b) Le cours indique que E est l'hyperplan d'équation (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ qui est une base orthonormée. Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, différent de $\{0\}$ et $\mathbb{R}^4$.

Le théorème de meilleure approximation montre que $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur E.

Notons q la projection orthogonale sur $E^{\perp}$. $p(x) = x - q(x)$.

$E^{\perp}$ est la droite vectorielle engendrée par $t = (1,1,-1,-1)$.

$\left(\frac{1}{\|t\|} t\right)$ est une base orthonormée de $E^{\perp}$ donc $q(x) = \langle x, \frac{1}{\|t\|} t \rangle \left(\frac{1}{\|t\|} t\right)$ (cours).

$$q(x) = \frac{\langle x, t \rangle}{\|t\|^2} t = \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{4} (1,1,-1,-1).$$

$$p(x) = x - q(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(1,1,-1,-1).$$

$$p(x) = \frac{1}{4}\left(4x_1 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ 4x_2 - x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ 4x_3 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4,\ 4x_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4\right)$$

$$\underline{\underline{p(x) = \frac{1}{4}(3x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4,\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4)}}.$$

$$\min_{\omega \in E} \|x - \omega\| = \|x - p(x)\| = \|q(x)\| = \left\|\frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(1,1,-1,-1)\right\|$$

$$\min_{\omega \in E} \|x - \omega\| = \frac{1}{4}|x_1 + x_2 - x_3 - x_4| \times \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}|x_1 + x_2 - x_3 - x_4|.$$

$$\underline{\underline{\min_{\omega \in E} \|x - \omega\| = \frac{1}{2}|x_1 + x_2 - x_3 - x_4|.}}$$

(Q3) Dans la suite $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$. K est un convexe non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à K

a) $\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K$, $f(y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

$(y_1, y_2, \dots, y_n) \to (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$ est continue et positive sur K et
↑ fonction polynôme...

$t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par composition $\underline{\underline{f \text{ est continue sur } K}}$.

b) • B_0 et K sont deux fermés de $\mathbb{R}^n$ donc $K' = B_0 \cap K$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

• $z_0 \in B_0 \cap K$ donc $K' = B_0 \cap K \neq \emptyset$

• $B_0 \cap K \subset B_0$ donc $K' \subset B_0$. $\forall z \in K'$, $\|z\| = \|z - z_0 + z_0\| \leq \|z - z_0\| + \|z_0\| \underset{z \in B_0}{\leq} \|x - z_0\| + \|z_0\|$

$\forall z \in K'$, $\|z\| \leq \|x - z_0\| + \|z_0\|$. K' est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

K' est une partie non vide fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$

c) f est continue sur K donc sur K'. Comme K' est une partie non vide fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$:

f admet un minimum sur K'. $\exists \hat{z} \in K'$, $f(\hat{z}) = \min\limits_{z \in K'} f(z)$.

d) Soit $z \in K$. Si $z \in K'$, $\|x - z\| = f(z) \geq f(\hat{z}) = \|x - \hat{z}\|$. Supposons que $z \notin K'$.

Alors $z \notin B_0$ car $z \in K$. Donc $\|x - z\| > \|x - z_0\| \underset{z_0 \in K'}{\geq} \|x - \hat{z}\|$.

Finalement $\forall z \in K$, $\|x - \hat{z}\| \leq \|x - z\|$.

Rappelons que $\hat{z} \in K$ car $\hat{z} \in K'$. Ainsi • $\min\limits_{z \in K} \|x - z\|$ existe

• $\hat{z}$ est un élément de K qui réalise ce minimum.

1) x possède une projection sur K et $\hat{z}$ est une projection de x sur K

Q4 a) ceci n'est autre que l'identité du parallélogramme ... mais redémontrons.

$\|2x - (a+b)\|^2 + \|a - b\|^2 = \|(x-a) + (x-b)\|^2 + \|(a-x) + (x-b)\|^2$

$\|2x - (a+b)\|^2 + \|a - b\|^2 = \|x-a\|^2 + \|x-b\|^2 + 2\langle x-a, x-b\rangle + \underbrace{\|a-x\|^2}_{\|x-a\|^2} + \|x-b\|^2 + \underbrace{2\langle a-x, x-b\rangle}_{-2\langle x-a, x-b\rangle}$

Alors $\|2x - (a+b)\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2$.

$\frac{1}{4}\|2x - (a+b)\|^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2\right)$.

donc $\|\frac{1}{2}(2x-(a+b))\|^2+\frac{1}{4}\|a-b\|^2=\frac{1}{2}\|x-a\|^2+\frac{1}{2}\|x-b\|^2$.

$$\|x-\frac{1}{2}(a+b)\|^2+\frac{1}{4}\|a-b\|^2=\frac{1}{2}\|x-a\|^2+\frac{1}{2}\|x-b\|^2.$$

b) $\|x-\frac{1}{2}(u+v)\|^2+\frac{1}{4}\|u-v\|^2=\frac{1}{2}\|x-u\|^2+\frac{1}{2}\|x-v\|^2=\frac{1}{2}d^2+\frac{1}{2}d^2=d^2$.

$u\in K, v\in K$, $\frac{1}{2}\in[0,1]$ donc $\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}u+(1-\frac{1}{2})v\in K$.

Alors $\|x-\frac{1}{2}(u+v)\|\geq d$.

Ainsi $d^2=\|x-\frac{1}{2}(u+v)\|^2+\frac{1}{4}\|u-v\|^2\geq d^2+\frac{1}{4}\|u-v\|^2$. Donc $\frac{1}{4}\|u-v\|^2\leq 0$.

Plus de doute $\frac{1}{4}\|u-v\|^2=0$. $\|u-v\|^2=0$. $\|u-v\|=0$. $u=v$.

Ceci montre l'unicité de la projection de x sur K.

x possède une unique projection sur K.

Q5 a) Soit $z\in K$ et $t\in[0,1]$. $tz+(1-t)p(x)\in K$ car K est convexe (et $p(x)\in K$).

Alors $\|x-p(x)\|\leq\|x-(tz+(1-t)p(x))\|$.

$$\|x-p(x)\|^2\leq\|x-(tz+(1-t)p(x))\|^2$$

b) Soit $z\in K$. Soit $t\in]0,1]$

$\|x-p(x)\|^2\leq\|x-(tz+(1-t)p(x))\|^2=\|x-p(x)-t(z-p(x))\|^2=\|x-p(x)\|^2+\|t(z-p(x))\|^2-2\langle x-p(x),t(z-p(x))\rangle$.

Alors $0\leq t^2\|z-p(x)\|^2-2t\langle z-p(x),x-p(x)\rangle$. Comme t est strictement positif il vient en divisant par t : $0\leq t\|z-p(x)\|^2-2\langle z-p(x),x-p(x)\rangle$.

$\forall t\in]0,1]$, $0\leq t\|z-p(x)\|^2-2\langle z-p(x),x-p(x)\rangle$. En faisant tendre t vers 0 par valeurs supérieures on obtient : $-2\langle z-p(x),x-p(x)\rangle\geq 0$.

Alors $\langle z-p(x),x-p(x)\rangle\leq 0$ et ceci pour tout $z\in K$.

c) Soit y un vecteur de K tel que $\forall z \in K$, $\langle z-y, x-y\rangle \leq 0$.

Soit $z \in K$.

$$\|x-z\|^2 = \|(x-y)+(y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\langle x-y, y-z\rangle + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

$$\begin{cases} \|y-z\|^2 \geq 0 \\ 2\langle x-y, y-z\rangle = -2\underbrace{\langle z-y, x-y\rangle}_{\leq 0} \geq 0 \end{cases}$$

Alors $\|x-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$

$\forall z \in K$, $\|x-y\|^2 \leq \|x-z\|^2$ et $y \in K$.

Alors $\underline{\underline{y = p(x)}}$.

Finalement si y est un élément de $\mathbb{R}^n$:

$$y = p(x) \iff \begin{cases} y \in K \\ \forall z \in K, \ \langle z-y, x-y\rangle \leq 0 \end{cases}$$

d) $x \notin K$ et $p(x) \in K$ donc $x \neq p(x)$.

Alors $0 < \|x-p(x)\|^2 = \langle x-p(x), x-p(x)\rangle = \langle x-p(x), x\rangle - \langle x-p(x), p(x)\rangle$.

Donc $\underline{\underline{\langle x-p(x), p(x)\rangle < \langle x-p(x), x\rangle}}$.

Posons $c = \frac{1}{2}\left[\langle x-p(x), x\rangle + \langle x-p(x), p(x)\rangle\right]$

Alors $\langle x-p(x), p(x)\rangle < c < \langle x-p(x), x\rangle$.

Soit $z \in K$. $\langle z-p(x), x-p(x)\rangle \leq 0$. $\langle x-p(x), z\rangle - \langle x-p(x), p(x)\rangle \leq 0$.

$\langle x-p(x), z\rangle \leq \langle x-p(x), p(x)\rangle < c < \langle x-p(x), x\rangle$.

$\underline{\underline{\langle x-p(x), z\rangle < c < \langle x-p(x), x\rangle \text{ pour tout } z \text{ dans } K.}}$

Alors $\underline{\underline{x-p(x) \text{ sépare les ensembles } K \text{ et } \{x\}}}$.

<u>Remarque</u> : $c = \frac{1}{2}\left[\langle x-p(x), x\rangle + \langle x-p(x), p(x)\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 - \|p(x)\|^2\right]$

PARTIE II. Un cas particulier

(Q6) * Soient $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ et $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ deux éléments de K. Soit $t\in[0,1]$.

$$tu+(1-t)v=(tu_1+(1-t)v_1,tu_2+(1-t)v_2,\dots,tu_n+(1-t)v_n).$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(tu_i+(1-t)v_i)^2=\sum_{i=1}^n \alpha_i\left[t^2u_i^2+(1-t)^2v_i^2+2t(1-t)u_iv_i\right].$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(tu_i+(1-t)v_i)^2=\sum_{i=1}^n \alpha_i\left[tu_i^2+(1-t)v_i^2+(t^2-t)u_i^2+\underbrace{((1-t)^2-(1-t))}_{t(t-1)}v_i^2+2t(1-t)u_iv_i\right]$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(tu_i+(1-t)v_i)^2=t\sum_{i=1}^n \alpha_iu_i^2+(1-t)\sum_{i=1}^n \alpha_iv_i^2+\sum_{i=1}^n \alpha_i\left[t(t-1)\left[u_i^2+v_i^2-2u_iv_i\right]\right]$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(tu_i+(1-t)v_i)^2\underset{\substack{(u,v)\in K^2\\ t\geqslant 0\ (1-t)\geqslant 0}}{\leqslant} t\times 1+(1-t)\times 1-t(1-t)\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_i-v_i)^2=1-\underbrace{t(1-t)}_{\geqslant 0}\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i(u_i-v_i)^2}_{\geqslant 0}$$

Alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i(tu_i+(1-t)v_i)^2\leqslant 1$. Alors $tu+(1-t)v\in K$.

$\forall u\in K,\ \forall v\in K,\ \forall t\in[0,1],\ tu+(1-t)v\in K$. **K est convexe.**

Remarque.. Nous aurions pu pour gagner du temps utiliser la convexité de $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

* Posons $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n \alpha_ix_i^2$

φ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, et $]-\infty,1]$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Alors $K=\varphi^{-1}(]-\infty,1])$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ d'après le rappel proposé.

* $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_i>0$. Posons alors $c=\sqrt{\dfrac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i}}$!! Soit $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in K$.

$$\|z\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n z_k^2}\underset{c>0}{=}c\sqrt{\frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^n z_k^2}\ .\ \text{Notons que } \frac{1}{c^2}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i$$

$$\|z\|=c\sqrt{\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i\right)\sum_{k=1}^n z_k^2}=c\sqrt{\sum_{k=1}^n\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i\right)z_k^2}\underset{\substack{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i\leqslant\alpha_k \text{ et } z_k^2\geqslant 0}}{\leqslant}c\sqrt{\sum_{k=1}^n\alpha_kz_k^2}\underset{z\in K}{\leqslant}c\sqrt{1}=c.$$

Alors $\forall z \in K$, $\|z\| \leq C$. Kest borné.

donc K est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.

Remarque.. $\vec{0} \in K$ donc K n'est pas vide.

(Q7) a) * Notons que K_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$K_1 = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in K \mid \sum_{i=1}^{n} z_i^2 < 1\} = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 < 1\}$

Alors $K_1 = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 < 1\}$

Rappelons que $\varphi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$K_1 = \varphi^{-1}(]-\infty, 1[) = \varphi^{-1}(\overline{[1, +\infty[}) = \overline{\varphi^{-1}([1, +\infty[)}$.

$\varphi^{-1}([1, +\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque de l'intervalle fermé $[1, +\infty[$ de $\mathbb{R}$. Alors $\overline{\varphi^{-1}([1, +\infty[)}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi K_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarques 1.. On ne demandait pas franchement de prouver que K_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2.. On aurait sans doute pu admettre le rappel concernant les images réciproques, pour les ouverts.

* $\forall z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in K$, $f(z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$.

f est alors de classe C^1 sur K car elle coïncide avec une fonction polynôme.

donc f est de classe C^1 sur K_1 (car $K_1 \subset K$).

b) Soit $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in K_1$.

$\nabla f(z) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], -2(x_k - z_k) = 0$.

$\nabla f(z) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], z_k = x_k \Leftrightarrow z = x$. Or x n'appartient pas à K

donc x n'appartient pas à K_1. La restriction de f à K_1 n'admet pas de point critique.

Supposons que $p(x) \in K_1$.

Alors $p(x) \in K_1$ et $\forall z \in K_1$, $f(z) = \|x - z\|^2 \geqslant \|x - p(x)\|^2 = f(p(x))$.

La restriction de f à K_1 admet un minimum en $p(x)$.

Alors la restriction de f à <u>l'ouvert</u> K_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K_1 et admet un minimum local (!!) en $p(x)$. Le cours montre alors que $p(x)$ est un point critique de la restriction de f à K_1. Ceci est impossible. Donc $p(x) \notin K_1$.

$p(x) \in K$ et $p(x) \notin K_1$. Alors $p(x) \in K \setminus K_1$ donc <u>$p(x)$ appartient à K_0</u>.

<u>c)</u> Posons $p(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_{i_0} < 0$

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z_i = \begin{cases} -y_{i_0} & \text{si } i = i_0 \\ y_i & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$. Posons $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 \underset{\uparrow\, p(x) \in K}{\leqslant} 1$. Donc <u>$z \in K$</u>.

$$f(p(x)) - f(z) = \sum_{i=1}^n \left[(x_i - y_i)^2 - (x_i - z_i)^2 \right] \overset{x_i - y_i = x_i - z_i \text{ si } i \neq i_0}{=} (x_{i_0} - y_{i_0})^2 - (x_{i_0} - z_{i_0})^2.$$

$$f(p(x)) - f(z) = x_{i_0}^2 + y_{i_0}^2 - 2x_{i_0} y_{i_0} - x_{i_0}^2 + 2x_{i_0} z_{i_0} - z_{i_0}^2 \underset{z_{i_0} = -y_{i_0}}{=} -4 x_{i_0} y_{i_0} \underset{\begin{cases} x_{i_0} > 0 \\ y_{i_0} < 0 \end{cases}}{>} 0.$$

Alors $f(p(x)) > f(z)$, $z \in K$ et $f(p(x))$ est le minimum de f sur K.

Ceci est donc contradictoire. Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i \geqslant 0$.

<u>Les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles</u>

Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = 0$.

Or $p(x) \in K_0$ donc $\displaystyle 1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \times 0^2 = 0$!!

Donc <u>les composantes de $p(x)$ ne sont pas toutes nulles</u>. Finalement :

<u>Les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, non toutes nulles</u>.

Q8 ⚠ mettons un peu d'ordre dans tout cela avant de commencer !

* $\Omega = \{(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ z_i > 0 \text{ et } (z_1, \cdots, z_{n-1}, 0) \in K_1\}$

$\Omega = \{(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ z_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1\}$

$\Omega = (]0, +\infty[)^{n-1} \cap \{(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1\}$

$(]0,+\infty[)^{n-1}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ comme produit de $n-1$ ouverts de $\mathbb{R}$.

En remplaçant n par $n-1$ dans ce que nous avons fait au début de Q7 a

on obtient que $\{(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ comme intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$.

* . $\forall (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \in \Omega,\ \frac{1}{\alpha_n}(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2) > 0$.

. $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \to \frac{1}{\alpha_n}(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2)$ est de classe C^1 sur Ω (fonction polynôme).

. $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

Alors ψ est définie et de classe C^1 sur Ω (... par composition).

$(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \to x_n$ est de classe C^1 sur Ω car c'est une fonction constante.

Alors $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \to x_n - \psi(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$ est de classe C^1 sur Ω.

Ainsi $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \to (x_n - \psi(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}))^2$ est de classe C^1 sur Ω.

Or $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - z_i)$ est également de classe C^1 sur Ω car c'est une fonction polynôme.

Par somme H est définie et de classe C^1 sur Ω.

* Il est maintenant raisonnable de supposer que $(z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H.

Et de poser $z_n^* = \psi(z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*)$.

a) $z_n^* = \psi(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (z_i^*)^2\right)} > 0$ car

$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (z_i^*)^2 < 1$ puisque $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*, 0) \in K_1$.

donc $z_n^* > 0$.

$z_n^* = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (z_i^*)^2\right)}$; $\alpha_n (z_n^*)^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (z_i^*)^2$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (z_i^*)^2 = 1$. Ainsi $\underline{\underline{z^* \in K_0}}$.

b) $\forall (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \Omega$, $H(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}))^2$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \forall (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \Omega$, $\frac{\partial H}{\partial z_k}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = -2(x_k - z_k) + 2\left(-\frac{\partial \psi}{\partial z_k}(z_1, \dots, z_{n-1})\right)(x_n - \psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}))$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \forall (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \Omega$, $\frac{\partial \psi}{\partial z_k}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \frac{\frac{1}{\alpha_n}(-2\alpha_k z_k)}{2\psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})} = -\frac{\alpha_k}{\alpha_n} \frac{z_k}{\psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})}$.

Alors $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \forall (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \Omega$, $\frac{\partial H}{\partial z_k}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = -2x_k + 2z_k + 2\frac{\alpha_k}{\alpha_n} \frac{z_k}{\psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})} \times (x_n - \psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}))$

Or $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H et

$z_n^* = \psi(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$. $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{\partial H}{\partial z_k}(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*) = 0$ et $\psi(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*) = z_n^*$

donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $0 = -2x_k + 2z_k^* + \frac{2\alpha_k}{\alpha_n} \times \frac{z_k^*}{z_n^*}(x_n - z_n^*)$.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $x_k = z_k^*\left[1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_n}\left(\frac{x_n}{z_n^*} - 1\right)\right] = z_k^*\left[1 + \alpha_k \lambda\right]$.

$\lambda = \frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{x_n}{z_n^*} - 1\right)$

Ainsi $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $z_k^* = \frac{x_k}{1 + \alpha_k \lambda}$.

<u>Remarque</u>. Comme $x_k = z_k^*(1 + \alpha_k \lambda) > 0$: $1 + \alpha_k \lambda \neq 0$ ce qui autorise la division précédente.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $z_i^* = \dfrac{x_i}{1+\alpha_i \lambda}$.

$\lambda = \dfrac{1}{\alpha_n}\left(\dfrac{x_n}{z_n^*} - 1\right)$; $\alpha_n \lambda = \dfrac{x_n}{z_n^*} - 1$; $\dfrac{x_n}{z_n^*} = 1 + \alpha_n \lambda$ et $x_n > 0$.

Alors $1+\alpha_n \lambda \neq 0$ et $z_n^* = \dfrac{x_n}{1+\alpha_n \lambda}$.

Finalement $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $z_i^* = \dfrac{x_i}{1+\alpha_i \lambda}$.

c) $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\left(-\dfrac{1}{\alpha_i}\right)$. $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*) \in \Omega$ donc $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $z_i^* > 0$.

Or $x_i > 0$ pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$. Alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $1+\alpha_i \lambda = \dfrac{x_i}{z_i^*} > 0$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_i \lambda > -1$ et $\alpha_i > 0$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda > -\dfrac{1}{\alpha_i}$.

Nous avons vu également que $z_n^* > 0$. donc $1+\alpha_n \lambda = \dfrac{x_n}{z_n^*} > 0$ et $\alpha_n > 0$.

Alors $\lambda > -\dfrac{1}{\alpha_n}$. Finalement $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda > -\dfrac{1}{\alpha_i}$.

Dans ces conditions $\lambda > \max\limits_{1 \leq i \leq n}\left(-\dfrac{1}{\alpha_i}\right) = \beta$. $\underline{\underline{\lambda > \beta}}$.

d) Soit $y \in]\beta, +\infty[$. $y > \max\limits_{1 \leq i \leq n}\left(-\dfrac{1}{\alpha_i}\right)$; $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y > -\dfrac{1}{\alpha_i}$ et $\alpha_i > 0$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i y + 1 > 0$

Dans ces conditions $L : y \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2}$ est définie et de classe C^1

(fonction rationnelle) sur $]\beta, +\infty[$.

$\forall y \in]\beta, +\infty[$, $L'(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i^2)(-2)\alpha_i (1+\alpha_i y)^{-3} = -2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 x_i^2}{(1+\alpha_i y)^3} < 0$;

L est strictement décroissante sur $]\beta, +\infty[$. $\forall i \in [\![1, n]\!], 1+\alpha_i y < 0$

$\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2} = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$. $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} L(y) = 0$.

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lim_{y \to \beta^+} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i \beta)^2} & \text{si } \beta \neq -\dfrac{1}{\alpha_i} \\ +\infty & \text{si } \beta = -\dfrac{1}{\alpha_i} \end{cases}$$

Or $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $\beta = -\dfrac{1}{\alpha_{i_0}}$.

donc $\displaystyle\lim_{y \to \beta^+} L(y) = \lim_{y\to\beta^+} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2} = +\infty$

L est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]\beta,+\infty[$ et,

$\displaystyle\lim_{y\to\beta^+} L(y) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} L(y) = 0$.

Alors L définit une bijection de $]\beta,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Donc $\exists!\, \lambda_0 \in]\beta,+\infty[$, $L(\lambda_0) = 1$.

$$\exists!\, \lambda_0 \in]\beta,+\infty[, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0 \alpha_i)^2} = 1.$$

$0 \in]\beta,+\infty[$ → $L(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$. Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 > 1$ car $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin K$.

donc $L(0) > L(\lambda_0)$ et L est strictement décroissante sur $]\beta,+\infty[$.

Alors $\underline{\lambda_0 > 0}$.

Rappelons que $\lambda > \beta$.

De plus $\displaystyle L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i \lambda)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(x_i / z_i^*)^2} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (z_i^*)^2 \overset{z^* \in K_0}{=} 1$.

Alors $\lambda = \lambda_0$.

Donc $z^* = \left(\dfrac{x_1}{1+\lambda_0 \alpha_1}, \dfrac{x_2}{1+\lambda_0 \alpha_2}, \dots, \dfrac{x_n}{1+\lambda_0 \alpha_n} \right)$ ... où λ_0 est l'unique

élément de $]\beta,+\infty[$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0 \alpha_i)^2} = 1$.

Q9 a) Soit $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ un élément de K. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 \leq 1$.

Attention ici le z^* défini dans Q8 !

$$\langle z-z^*, x-z^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_i^*)(x_i - z_i^*).$$

$$\langle z-z^*, x-z^* \rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \frac{x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)\left(x_i - \frac{x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \frac{x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)\frac{\lambda_0\alpha_i x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}.$$

$$\langle z-z^*, x-z^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_0\alpha_i x_i z_i}{1+\lambda\alpha_i} - \lambda_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)^2}}_{=1}.$$

$$\langle z-z^*, x-z^* \rangle = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i z_i}{1+\lambda_0\alpha_i} - 1\right).$$ Comme $\lambda_0 > 0$ pour montrer que $\langle z-z^*, x-z^*\rangle \leq 0$

il suffit de montrer que $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i z_i}{1+\lambda_0\alpha_i} \leq 1$

Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i z_i}{1+\lambda_0\alpha_i} \leq \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{\alpha_i}\,x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\times\sqrt{\alpha_i}\,z_i\right)\right| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{\alpha_i}\,x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)^2}}_{=1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\alpha_i}\,z_i)^2}.$$

Alors $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i z_i}{1+\lambda_0\alpha_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i^2} \underset{z\in K}{\leq} \sqrt{1} = 1$.

ceci achève de montrer que

$z^* \in K$ et $\forall z\in K$, $\langle z-z^*, x-z^*\rangle \leq 0$. Alors, d'après Q5 c) $\underline{z^* = p(x)}$.

$z^* \in K_0 \subset K$.

b) Ici dans une douce euphorie on se laisserait aller à écrire que :

$p(x) = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*) = \left(\frac{x_1}{1+\lambda_0\alpha_1}, \frac{x_2}{1+\lambda_0\alpha_2}, \dots, \frac{x_n}{1+\lambda_0\alpha_n}\right)$ pour pouvoir

faire la suite.

Le problème est que ce z^* est virtuel ! Il est défini à partir d'un point critique $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$ de H dont on a supposé l'existence.

Si H n'a pas de point critique tout ce qui précède est sans objet !

Notons que ce qui précède a montré que si $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $z_i^* = \dfrac{x_i}{1+\lambda_0 \alpha_i}$ où λ_0 est l'unique réel de $]\beta, +\infty[$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0 \alpha_i)^2} = 1$.

Donc H a au plus un point critique. Notons que H a un point critique.

Soit λ_0 l'unique réel de $]\beta, +\infty[$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0 \alpha_i)^2} = 1$.

Posons $\forall i \in [\![1, \underline{\underline{n}}]\!]$, $v_i = \dfrac{x_i}{1+\lambda_0 \alpha_i}$.

Notons que $v = (v_1, v_2, \dots, \underline{\underline{v_{n-1}}})$ est un point critique de H.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $v_i = \dfrac{x_i}{1+\lambda_0 \alpha_i} > 0$ $(x_i > 0, \alpha_i > 0, \lambda_0 > 0)$. Notons que l'on a également $v_n > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0 \alpha_i)^2} - \alpha_n v_n^2 = 1 - \alpha_n v_n^2 \underset{\alpha_n v_n^2 > 0}{<} 1 .$$

Alors $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, 0) \in K_1$.

Donc $\underline{v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \in \Omega}$. Notons que $\nabla H(v) = 0_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Notons que : $\dfrac{\partial H}{\partial x_k}(v) = 0$.

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}(v) \underset{\uparrow}{=} -2x_k + 2v_k + 2\frac{\alpha_k}{\alpha_n} \frac{v_k}{\psi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})} (x_n - \psi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})) .$$

calcul déjà fait p 14 !

$$\psi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i^2\right)} \underset{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^2 = 1}{=} \sqrt{\frac{1}{\alpha_n} \alpha_n v_n^2} \underset{v_n \geq 0}{=} v_n$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}(v) = -2x_k + 2v_k + 2\frac{\alpha_k}{\alpha_n} \frac{v_k}{v_n}(x_n - v_n) = 2\left[-x_k + v_k\left(1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_n}\left(\frac{x_n}{v_n} - 1\right)\right)\right].$$

$$\frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{x_n}{v_n} - 1\right) = \frac{1}{\alpha_n}\left(\frac{x_n}{\frac{x_n}{1+\lambda_0 \alpha_n}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha_n}(1 + \lambda_0 \alpha_n - 1) = \lambda_0 .$$ Alors $\dfrac{\partial H}{\partial x_k}(v) = 2\left[-x_k + v_k(1 + \lambda_0 \alpha_k)\right]$.

$$\frac{\partial H}{\partial u_\ell}(v) = 2\left[-x_\ell + v_\ell(1+\lambda_0\alpha_\ell)\right] = 2\left[-x_\ell + \frac{x_\ell}{1+\lambda_0\alpha_\ell}(1+\lambda_0\alpha_\ell)\right] = 0.$$

$\forall \ell \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{\partial H}{\partial u_\ell}(v) = 0$. v est un point critique de H.

Ainsi <u>H admet un point critique et un seul</u>. C'est le point $\left(\frac{x_1}{1+\lambda_0\alpha_1}, \frac{x_2}{1+\lambda_0\alpha_2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1+\lambda_0\alpha_{n-1}}\right)$ où λ_0 est l'unique réel de $]0, +\infty[$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)^2} = 1$.

Alors le z^* n'est plus virtuel (!) et on peut dire que :

$$p(x) = \left(\frac{x_1}{1+\lambda_0\alpha_1}, \frac{x_2}{1+\lambda_0\alpha_2}, \dots, \frac{x_n}{1+\lambda_0\alpha_n}\right).$$

$\langle z - z^*, x - z^*\rangle \leq 0$, pour tout $z \in K$. $\forall z \in K$, $\langle x - z^*, z\rangle \leq \langle x - z^*, z^*\rangle$.

$\forall z \in K$, $\langle x - p(x), z\rangle = \langle x - z^*, z\rangle \leq \langle x - z^*, z^*\rangle = \langle x - p(x), p(x)\rangle$.

$\forall z \in K$, $\langle x - p(x), z\rangle \leq \langle x - p(x), p(x)\rangle$

$p(x) \neq x$ car $p(x) \in K$ et $x \notin K$. Alors $\|x - p(x)\|^2 \neq 0$.

Donc $\langle x - p(x), x - p(x)\rangle = \|x - p(x)\|^2 > 0$.

Ainsi $\langle x - p(x), x\rangle - \langle x - p(x), p(x)\rangle > 0$; $\langle x - p(x), p(x)\rangle < \langle x - p(x), x\rangle$.

$\forall z \in K$, $\langle x - p(x), z\rangle \leq \langle x - p(x), p(x)\rangle < \langle x - p(x), x\rangle$.

Posons $c = \frac{1}{2}\left[\langle x - p(x), p(x)\rangle + \langle x - p(x), x\rangle\right]$; $c = \frac{1}{2}\left[\langle x - p(x), x + p(x)\rangle\right] = \frac{\|x\|^2 - \|p(x)\|^2}{2}$

Alors $\forall z \in K$, $\langle x - p(x), z\rangle \leq \langle x - p(x), p(x)\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$.

<u>Donc $\forall z \in K$, $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$ avec $c = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 - \|p(x)\|^2\right]$.</u>

$$c = \frac{1}{2}\left[\langle x - p(x), p(x)\rangle + \langle x - p(x), x\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i^*)z_i^* + \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i^*)x_i\right]$$

$$c = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)\frac{x_i}{1+\lambda_0\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{x_i}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)x_i\right]$$

$$c = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_0\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_0\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)}\right]$$

$$c = \frac{\lambda_0}{2}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)^2}}_{=1} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i x_i^2}{1+\lambda_0\alpha_i}\right] = \frac{\lambda_0}{2}\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i^2}{1+\lambda_0\alpha_i}\right].$$

Alors $\forall y \in K$, $\langle x - p(x), y\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$ avec $c = \frac{\lambda_0}{2}\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i^2}{1+\lambda_0\alpha_i}\right]$.

<u>Exercice</u>.- Retrouver $p(x) = \left(\frac{x_1}{1+\lambda_0\alpha_1}, \frac{x_2}{1+\lambda_0\alpha_2}, \dots, \frac{x_n}{1+\lambda_0\alpha_n}\right)$ en utilisant le lagrangien $\mathcal{L} : (y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda) \to \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i^2 - 1\right)$!!

PARTIE III

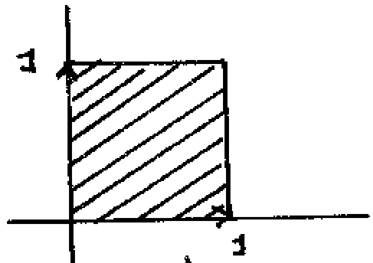
<u>Exercice</u> .. $n=2$. $K_1 = \mathbb{R}\times\{0\}$ et $K_2=\{0\}\times\mathbb{R}$.

Q1.. Notez que K_1 et K_2 sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^2$ tels que $K_1\cap K_2=\{(0,0)\}$.

Q2.. Notez qu'il n'existe pas d'élément non nul de $\mathbb{R}^2$ qui sépare K_1 et K_2.

Q3.. Dualité ?

Q10 Posons $K=[0,1]\times[0,1]$ - Notons que K appartient à $\mathcal{B}_2$!



i) • Soient $u=(u_1,u_2)$ et $v=(v_1,v_2)$ deux éléments de K. Soit $t\in[0,1]$. $tu+(1-t)v=(tu_1+(1-t)v_1, tu_2+(1-t)v_2)$

u_1,u_2,v_1,v_2 sont dans $[0,1]$

tu_1 et tu_2 sont dans $[0,t]$ et $(1-t)v_1$ et $(1-t)v_2$ sont dans $[0,1-t]$.

Alors $tu_1+(1-t)v_1$ et $tu_2+(1-t)v_2$ sont dans $[0,1]$. Alors $tu+(1-t)v\in K$

<u>K est convexe.</u>

• $[0,1]$ et $[0,1]$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$. Alors <u>$K=[0,1]\times[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$</u>

• $\forall (x_1,x_2)\in K$, $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$. <u>$K \subset \{x\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{x}\geq 0\}$</u>

• $\forall\ x=(x_1,x_2)\in K$, $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leq\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. <u>K est borné.</u>

ii) <u>$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\in K$ et les coordonnées de $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sont strictement positives.</u>

iii) Soit $(x,y)\in K\times\mathbb{R}^2$ tel que $x\geq y\geq\vec{0}$. Posons $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$.

$1\geq x_1\geq y_1\geq 0$ et $1\geq x_2\geq y_2\geq 0$. Alors $y=(y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1]=K$.

<u>$\forall x\in K, \forall y\in\mathbb{R}^2$, $[x\geq y\geq\vec{0}]\Rightarrow y\in K$.</u>

<u>Remarque</u>.. De même $[0,1]^n$ appartient à $\mathcal{B}_n$.

(Q11) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $t \in]0,1[$.

Posons $\forall b \in]a,+\infty[$, $\varphi(b) = \ln(ta+(1-t)b) - t\ln a - (1-t)\ln b$.

φ est dérivable sur $]a,+\infty[$ et $\forall t \in]a,+\infty[$, $\varphi'(t) = \dfrac{1-t}{ta+(1-t)b} - (1-t)\dfrac{1}{b}$.

$\forall t \in]a,+\infty[$, $\varphi'(t) = (1-t)\dfrac{b - ta - (1-t)b}{(ta+(1-t)b)b}$.

$\forall t \in]a,+\infty[$, $\varphi'(t) = \dfrac{t(1-t)(b-a)}{b(ta+(1-t)b)} > 0$. φ est strictement croissante sur $]a,+\infty[$

De plus $\lim\limits_{b \to a} \varphi(b) = \ln(ta+(1-t)a) - t\ln a - (1-t)\ln a = \ln a - \ln a = 0$.

Alors $\forall b \in]a,+\infty[$; $\varphi(b) > 0$. $\forall b \in]a,+\infty[$, $\ln(ta+(1-t)b) - t\ln a - (1-t)\ln b > 0$

donc $\forall b \in]a,+\infty[$, $\ln(ta+(1-t)b) > t\ln a + (1-t)\ln b$.

Finalement : $\forall t \in]0,1[$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $a < b \Rightarrow \ln(ta+(1-t)b) > t\ln a + (1-t)\ln b$.

$\ln$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : $\forall t \in]0,1[$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq b \Rightarrow \ln(ta+(1-t)b) > t\ln a + (1-t)\ln b$

(Q12) a) $K \in \mathcal{B}_n$. donc K est une partie de $\mathbb{R}^n$, non vide, fermée et bornée.

g coïncide sur K avec une fonction polynôme donc g est continue sur K.

Alors les deux points précédents permettent de dire que g possède un maximum sur K.

b) Soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un élément de K tel que $g(u) = \max\limits_{x \in K} g(x)$.

$K \in \mathcal{B}_n$ donc $\exists\, v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i > 0$.

Ainsi $\prod\limits_{i=1}^{n} u_i = g(u) \geq g(v) = \prod\limits_{i=1}^{n} v_i > 0$, donc $\prod\limits_{i=1}^{n} u_i > 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_i > 0$.

Si $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in K$ et si $g(u) = \max\limits_{x \in K} g(x)$ alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u_i > 0$.

c) Soit $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ et $u'=(u'_1,u'_2,\dots,u'_n)$ deux éléments de K tels que :

$g(u)=g(u')=\max\limits_{x\in K} g(x)$. Supposons que $u\neq u'$.

Alors $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$, $u_{i_0}\neq u'_{i_0}$. Rappelons que $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $u_i>0$ et $u'_i>0$.

Pour fixer les idées supposons que $u_{i_0}<u'_{i_0}$ (ce qui n'est pas indispensable avec la remarque de Q11).

Soit $t\in\,]0,1[$. $\ln$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$\ln(tu_{i_0}+(1-t)u'_{i_0})>t\ln u_{i_0}+(1-t)\ln u'_{i_0}$.

De plus $\forall i\in[\![1,n]\!]-\{i_0\}$, $\ln(tu_i+(1-t)u'_i)\geqslant t\ln u_i+(1-t)\ln u'_i$ car $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(tu_i+(1-t)u'_i)>\sum\limits_{i=1}^{n}(t\ln u_i+(1-t)\ln u'_i)$.

Donc $\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n}(tu_i+(1-t)u'_i)\right)>t\ln\prod\limits_{i=1}^{n}u_i+(1-t)\ln\prod\limits_{i=1}^{n}u'_i\overset{g(u)=g(u')}{=}\underbrace{t\ln g(u)+(1-t)\ln g(u)}_{\ln g(u)}$

Alors $\prod\limits_{i=1}^{n}(tu_i+(1-t)u'_i)>g(u)$.

$u\in K$, $u'\in K$, $t\in\,]0,1[$ et K est convexe donc $tu+(1-t)u'\in K$.

De plus $g(tu+(1-t)u')=\prod\limits_{i=1}^{n}(tu_i+(1-t)u'_i)>g(u)$.

$g(tu+(1-t)u')>g(u)=\max\limits_{x\in K}g(x)$.

Ceci est contradictoire donc $u=u'$.

Ainsi il existe un élément u de K et un seul tel que $g(u)=\max\limits_{x\in K}g(x)$.

Q13 a) dans cette question très lourde nous posons $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $u_i=\phi_i^*(K)$.

Rappelons que $(u_1,u_2,\dots,u_n)\in K$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $u_i>0$ et $g(u_1,u_2,\dots,u_n)=\max\limits_{x\in K}g(x)$.

Alors $F=\left\{\left(\frac{x_1}{u_1},\frac{x_2}{u_2},\dots,\frac{x_n}{u_n}\right);(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K\right\}$.

Montrons que F appartient à $\mathcal{B}_n$ en s'appuyant sur le fait que K appartient à $\mathcal{B}_n$.

Montrons donc que F vérifie i), ii), iii).

$*$ i) (*) Montrons que F est convexe. Soient $x'=(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$ et $y'=(y'_1,y'_2,\dots,y'_n)$ deux éléments de F. Soit $t\in[0,1]$.

$\exists x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K, \exists y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in K$ tels que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x'_i=\frac{x_i}{u_i}$ et $y'_i=\frac{y_i}{u_i}$.

Posons $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)=tx+(1-t)y$. $z\in K$ car K est convexe.

Alors $tx'+(1-t)y'=\left(\frac{tx_1+(1-t)y_1}{u_1},\frac{tx_2+(1-t)y_2}{u_2},\dots,\frac{tx_n+(1-t)y_n}{u_n}\right)=\left(\frac{z_1}{u_1},\frac{z_2}{u_2},\dots,\frac{z_n}{u_n}\right)$

avec $(z_1,z_2,\dots,z_n)\in K$. Donc $tx'+(1-t)y'\in F$.

$\forall (x',y')\in F^2, \forall t\in[0,1]$, $tx'+(1-t)y'\in F$. <u>F est convexe.</u>

$*$ Montrons que F est fermé. Montrons alors que $\overline{F}$ est un ouvert.

Soit $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\overline{F}$. Posons $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $b_i=u_ia_i$.

Alors $(a_1,a_2,\dots,a_n)=\left(\frac{b_1}{u_1},\frac{b_2}{u_2},\dots,\frac{b_n}{u_n}\right)$. Comme $(a_1,a_2,\dots,a_n)\notin F$: $(b_1,b_2,\dots,b_n)\notin K$.

Posons $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. $b\in\overline{K}$ et $\overline{K}$ est ouvert car K est fermé.

$\exists r\in\mathbb{R}_+^*$, $B(b,r)\subset\overline{K}$. Posons $r'=\frac{r}{M}$ ($M>0$) où $M=\max(u_1,u_2,\dots,u_n)$ (ce choix un peu arbitraire s'éclairera dans la suite)! $r'>0$ car $M>0$ et $r>0$.

Montrons que $B(a,r')\subset\overline{F}$. Soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in B(a,r')$. Montrons que $x\notin F$.

$\|x-a\|<r'$. $\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)^2}<r'$. Posons $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ avec

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $y_i=x_iu_i$. Alors $x=\left(\frac{y_1}{u_1},\frac{y_2}{u_2},\dots,\frac{y_n}{u_n}\right)$. Pour montrer que $x\notin F$ il suffit de montrer que $y\notin K$.

$$r'>\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n\frac{(y_i-b_i)^2}{u_i^2}}\underset{\forall i\in[\![1,n]\!],\,0<u_i\leq M}{\geq}\sqrt{\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^n(y_i-b_i)^2}\underset{M>0}{=}\frac{1}{M}\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i-b_i)^2}.$$

Alors $\frac{r}{M}>\frac{1}{M}\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i-b_i)^2}$; $\|y-b\|<r$. $y\in B(b,r)\subset\overline{K}$. Alors $y\notin K$ donc

$x\notin F$. Ainsi $B(a,r')\subset\overline{F}$.

$\forall a\in\overline{F}, \exists r'\in\mathbb{R}_+^*$, $B(a,r')\subset\overline{F}$. $\overline{F}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donc <u>F est un fermé</u>.

$*$ Montrons que F est borné(e).

K est borné(e). $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in K$, $\|x\| \leq C$. Posons $m = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $m > 0$.

Soit $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in F$.

$\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x'_i = \frac{x_i}{u_i}$.

$$\|x'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{u_i^2}} \underset{\uparrow}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{m^2}} = \frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{1}{m}\|x\| = \frac{C}{m}.$$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \geq m > 0$

donc $\forall x' \in F$, $\|x'\| \leq \frac{C}{m}$. F est une partie bornée.

$*$ Soit $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in F$. $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x'_i = \frac{x_i}{u_i}$.

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$ donc $(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \vec{0}$.

Mais $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geq 0$ et $u_i > 0$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x'_i \geq 0$. $x' \geq \vec{0}$.

$F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \vec{0}\}$.

ii). $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$.

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x'_i = \frac{x_i}{u_i}$. Alors x' est un élément de F dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Il existe un élément de F dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

iii) Soit $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ un élément de F. Soit $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

Supposons que $x' \geq y' \geq \vec{0}$ et montrons que $y' \in F$.

$\exists x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x'_i = \frac{x_i}{u_i}$.

Posons $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = u_i y'_i$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq y'_i = \frac{y_i}{u_i} \leq x'_i = \frac{x_i}{u_i}$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i > 0$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq y_i \leq x_i$. $x \in K$ et $x \geq y \geq \vec{0}$ donc $y \in K$

Ainsi $y' = \left(\frac{y_1}{u_1}, \frac{y_2}{u_2}, \dots, \frac{y_n}{u_n}\right) \in F$.

$\forall x' \in F,\ \forall y' \in \mathbb{R}^n,\quad x' \geq y' \geq \vec{0} \Rightarrow y' \in F.$

ceci achève de montrer que F appartient à $\mathcal{B}_n$.

b) Soit $y=(y_1, y_2, \dots, y_n) \in F$, $\exists\, t=(t_1, t_2, \dots, t_n) \in K$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \frac{t_i}{a_i}$.

$$\prod_{i=1}^n y_i = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\prod_{i=1}^n a_i} = \frac{g(t)}{g(a)} \leq 1 \quad \text{car} \quad g(a) = \max_{x \in K} g(x) \text{ et } g(a) > 0.$$

$\forall y=(y_1, y_2, \dots, y_n) \in F,\ \prod_{i=1}^n y_i \leq 1.$

Q14 a) Posons $\forall x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = \prod_{i=1}^n x_i$.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_i(x) = x_i$.

$f_0, f_1, \dots, f_n$ sont des applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynômes.

De plus $[1,+\infty[$ et $[0,+\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Alors $f_0^{-1}([1,+\infty[)$, $f_1^{-1}([0,+\infty[)$, $f_2^{-1}([0,+\infty[)$, …, $f_n^{-1}([0,+\infty[)$ sont $n+1$ fermés de $\mathbb{R}^n$.

Or $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \vec{0} \text{ et } \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\} = f_1^{-1}([0,+\infty[) \cap f_2^{-1}([0,+\infty[) \cap \dots \cap f_n^{-1}([0,+\infty[) \cap f_0^{-1}([1,+\infty[)$

Donc A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de $n+1$ fermés de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : On pouvait simplifier en disant que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \vec{0}\} = [0,+\infty[\times [0,+\infty[\times \dots \times [0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme produit de n fermés de $\mathbb{R}$.

b) Soient $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de A. Soit $t \in [0,1]$

$tx + (1-t)y = (tx_1 + (1-t)y_1,\ tx_2 + (1-t)y_2,\ \dots,\ tx_n + (1-t)y_n)$

ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'' t = -\frac{1}{t^2} < 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \overset{\blacktriangle}{>} 0$, $y_i \overset{\blacktriangledown}{>} 0$ et $tx_i + (1-t)y_i > 0$. En particulier $tx + (1-t)y \geq \vec{0}$!

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\ln(tx_i + (1-t)y_i) \geq t \ln x_i + (1-t) \ln y_i$.

Alors $\ln\left(\prod_{i=1}^n (tx_i + (1-t)y_i)\right) = \sum_{i=1}^n \ln(tx_i + (1-t)y_i) \geq t \sum_{i=1}^n \ln x_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \ln y_i$.

($\blacktriangle$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geq 0$ et $\prod_{i=1}^n x_i \geq 1$! $\blacktriangledown$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i \geq 0$ et $\prod_{k=1}^n y_k \geq 1$!).

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(tx_i+(1-t)y_i)\right) \geq t\ln\prod_{i=1}^{n}x_i+(1-t)\ln\prod_{i=1}^{n}y_i \underset{\uparrow}{\geq} 0$$
$$t\geq 0,\ 1-t\geq 0,\ \prod_{i=1}^{n}x_i\geq 1,\ \prod_{i=1}^{n}y_i\geq 1$$

Alors $\prod_{i=1}^{n}(tx_i+(1-t)y_i)\geq 1$.

ceci achève de montrer que $tx+(1-t)y\in A$.

$\forall (x,y)\in A^2,\ \forall t\in[0,1],\ tx+(1-t)y\in A$. A est convexe.

Q15 * → $\vec{1}$ appartient clairement à A.

→ $(\phi_1^*(K),\phi_2^*(K),\dots,\phi_n^*(K))\in K$ donc $\left(\frac{\phi_1^*(K)}{\phi_1^*(K)},\frac{\phi_2^*(K)}{\phi_2^*(K)},\dots,\frac{\phi_n^*(K)}{\phi_n^*(K)}\right)\in F$

Ainsi $\vec{1}\in F$.

donc $\vec{1}\in A\cap F$

* Soit $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in A\cap F$. Alors $\prod_{i=1}^{n}z_i\geq 1$ car $z\in A$ et $\prod_{i=1}^{n}z_i\overset{\text{Q13 b)}}{\leq} 1$ car $z\in F$

donc $\prod_{i=1}^{n}z_i=1$.

Posons $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F$, $\hat{g}(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i$. comme $F\in\mathcal{B}_n$ Q12 indique

que $\max_{x\in F}\hat{g}(x)$ existe et que $\exists!\, u\in F$, $\hat{g}(u)=\max_{x\in F}\hat{g}(x)$.

Or $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F$, $\hat{g}(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i\leq 1=\prod_{i=1}^{n}z_i\underset{z\in F}{\underset{\uparrow}{=}}\hat{g}(z)$.

donc $\max_{x\in F}\hat{g}(x)=\hat{g}(z)$.

mais $\vec{1}\in F$ et $\hat{g}(\vec{1})=1=\hat{g}(z)=\max_{x\in F}\hat{g}(x)$. donc $z=\vec{1}$

Ce qui montre que $A\cap F\subset\{\vec{1}\}$.

Finalement $A\cap F=\{1\}$.

A et F sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que $A\cap F=\{1\}$.

d'après le "rappel" il existe un élément non nul h de $\mathbb{R}^n$ et un réel c tels que:

$\forall x\in F,\ \forall y\in A,\ \langle h,y\rangle\leq c\leq\langle h,x\rangle$

$\vec{1} \in A \cap F$ donc $\langle h, \vec{1}\rangle \leq c \leq \langle h, \vec{1}\rangle$. Alors $c = \langle h, \vec{1}\rangle$.

Donc il existe un vecteur non nul h de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\forall x \in A, \forall y \in F$, $\langle h, y\rangle \leq \langle h, \vec{1}\rangle \leq \langle h, x\rangle$

Q16 a) On pose $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ et on suppose que $\vec{0} \geq h$. On rappelle que $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et que : $\forall x \in A, \forall y \in F$, $\langle h, y\rangle \leq \langle h, \vec{1}\rangle \leq \langle h, x\rangle$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \langle h, k\vec{1}\rangle$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = k\sum_{i=1}^{n} h_i$.

$\vec{0} \geq h$ et $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $\sum_{i=1}^{n} h_i < 0$. Alors $\lim_{k\to+\infty} v_k = -\infty$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\vec{1} \in A$ ($\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 0$ et $\prod_{\ell=1}^{n} k = k^n \geq 1$)

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\langle h, \vec{1}\rangle \leq \langle h, k\vec{1}\rangle = v_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\langle h, \vec{1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i \leq v_k$ et $\lim_{k\to+\infty} v_k = -\infty$!

Ceci est impossible. Donc on n'a pas $\vec{0} \geq h$.

Alors $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$, $h_{i_0} > 0$.

b) Supposons qu'il existe i_1 dans $[\![1, n]\!]$ tel que $h_{i_1} \leq 0$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ w_i^{(k)} = \begin{cases} 1/k & \text{si } i = i_0 \\ k & \text{si } i = i_1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w_i^{(k)} \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\prod_{i=1}^{n} w_i^{(k)} = 1$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $w^{(k)} \in A$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\langle h, \vec{1}\rangle \leq \langle h, w^{(k)}\rangle = z_k$ ou

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} h_i \leq \frac{1}{k} h_{i_0} + k h_{i_1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0, i \neq i_1}}^{n} h_i = z_k.$$

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = \begin{cases} -\infty & \text{si } h_{i_1} < 0 \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0, i\neq i_1}}^{n} h_i & \text{si } h_{i_1} = 0 \end{cases}$$

La suite $(\mathcal{S}_k)_{k\geq 1}$ est minorée par $\sum_{i=1}^{n} l_i$ donc on ne peut avoir $\lim_{k\to+\infty} \mathcal{S}_k = -\infty$.

Alors $h_{i_1} = 0$. Dans ces conditions $(\mathcal{S}_k)_{k\geq 1}$ est minorée par $\sum_{i=1}^{n} l_i$ et converge vers $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0, i\neq i_1}}^{n} l_i$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} l_i \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0, i\neq i_1}}^{n} l_i$. $l_{i_0} + l_{i_1} \leq 0$. Alors $l_{i_0} \leq 0$ car $l_{i_1} = 0$.

ceci est encore impossible car $l_{i_0} > 0$.

Alors il n'existe pas d'élément i_1 de $[\![1,n]\!]$ tel que $l_{i_1} \leq 0$.

Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!],\ l_i > 0$.

(Q17) Soient i_2 et i_3 deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Montrons que $l_{i_2} = l_{i_3}$.

Posons $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } i = i_2 \\ \alpha & \text{si } i = i_3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Clairement $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $t^{(\alpha)} = (t_1^{(\alpha)}, t_2^{(\alpha)}, \dots, t_n^{(\alpha)}) \in A$ ($t^{(\alpha)} \geq \vec{0}$ et $\prod_{i=1}^{n} t_i^{(\alpha)} = 1 \geq 1$)

Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{i=1}^{n} l_i = \langle l, \vec{1} \rangle \leq \langle l, t^{(\alpha)} \rangle = \frac{1}{\alpha} l_{i_2} + \alpha l_{i_3} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_2, i\neq i_3}}^{n} l_i$.

Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{1}{\alpha} l_{i_2} + \alpha l_{i_3} - l_{i_2} - l_{i_3} = \frac{1-\alpha}{\alpha} l_{i_2} + (\alpha - 1) l_{i_3} = (\alpha - 1)\left[l_{i_3} - \frac{1}{\alpha} l_{i_2}\right]$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq (\alpha - 1)\left[l_{i_3} - \frac{1}{\alpha} l_{i_2}\right]$.

Alors ① $\forall \alpha \in]1, +\infty[$, $0 \leq l_{i_3} - \frac{1}{\alpha} l_{i_2}$ et ② $\forall \alpha \in]0,1[$, $0 \geq l_{i_3} - \frac{1}{\alpha} l_{i_2}$

En faisant tendre α vers 1 par valeurs supérieures dans ① et α vers 1 par valeurs inférieures dans ② il vient : $0 \leq l_{i_3} - l_{i_2}$ et $0 \geq l_{i_3} - l_{i_2}$. Ainsi $l_{i_3} - l_{i_2} = 0$.

Donc $l_{i_2} = l_{i_3}$. $\forall (i_2, i_3) \in [\![1,n]\!]^2$, $i_2 \neq i_3 \Rightarrow l_{i_2} = l_{i_3}$.

Toutes les coordonnées de l sont égales. Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $l_i = \gamma$. $\gamma > 0$.

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in F$. $\gamma \sum_{i=1}^{n} y_i = \langle l, y \rangle \leq \gamma \sum_{i=1}^{n} 1 = \langle l, \vec{1} \rangle \leq \langle l, x \rangle = \gamma \sum_{i=1}^{n} x_i$

En divisant par γ qui est strictement positif il vient : $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$

PARTIE IV. La solution de Nash

(Q18) P1 exprime que si $K \in \mathcal{B}_n$, $\phi(K)$ est un élément maximal de K.

ce qui signifie que si $K \in \mathcal{B}_n$, $\phi(K)$ est un élément de K tel qu'il n'existe pas d'élément de K strictement plus grand que $\phi(K)$ au sens de l'ordre $\leq$ défini sur $\mathbb{R}^n$.

P2 exprime une invariance par changement d'échelle ou une invariance linéaire

P3 exprime que si K et K' sont deux éléments de $\mathcal{B}_n$ tels que $K \subset K'$ si $\varphi(K') \in K$, alors $\varphi(K') = \varphi(K)$ donc que les éléments de K' n'appartenant pas à K n'influent pas sur la valeur de $\phi(K')$; l'élimination des éléments de $K' \setminus K$ ne change pas la valeur de $\phi(K)$.

P4 exprime que si $K \in \mathcal{B}_n$ et si l'on fait une transposition (et même une permutation) sur "le rang" des éléments de K, ϕ opère la même transposition.

(Q19) * ϕ^* est bien une application de $\mathcal{B}_n$ dans $\mathbb{R}^n$.

* P1 soit $K \in \mathcal{B}_n$. $\phi^*(K)$ est l'unique vecteur de K auquel la fonction g atteint son maximum. Soit x un élément de K tel que $x \geq \phi^*(K)$.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geq \phi_i^*(K) > 0$ ← Q12 b.

Supposons que $x \neq \varphi(K)$. Alors $\exists\, i_0 \in [\![1, n]\!]$, $x_{i_0} > \phi_{i_0}^*(K)$.

Alors $g(x) = \prod_{i=1}^n x_i > \prod_{i=1}^n \phi_i^*(K) = \phi^*(K) = \max_{y \in K} g(y)$ et $x \in K$!!

ceci est impossible.

Donc $\phi^*(K) \in K$ et il n'existe pas d'élément $x \in K$ tel que $x \neq \phi(K)$ et $x \geq \phi(K)$.

D'où P1.

* P2 Soit $K \in \mathcal{B}_n$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i > 0$.

Exercice.. Montrer que $a \otimes K \in \mathcal{B}_n$! Posons $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^*(K)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \phi^*(a \otimes K)$ et $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = a \otimes u$

1) $\omega = a \otimes u \in a \otimes K$ car $u \in K$.

2) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in a \otimes K$. $\exists\, x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in K$, $x = a \otimes x'$.

$$g(x) = \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n (a_i x'_i) = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) g(x') \underset{\prod_{i=1}^n a_i > 0}{\leq} \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) g(u) = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)\left(\prod_{i=1}^n u_i\right) = \prod_{i=1}^n (a_i u_i).$$

$g(x) \leq g(a * u) = g(\omega)$.

Alors $\omega \in a \otimes K$ et $\forall x \in a \otimes K$, $g(x) \leq g(\omega)$. Alors $\omega = \phi^*(a \otimes K)$.

donc $\phi^*(a \otimes K) = \omega = a \otimes u = a \otimes \phi^*(K)$. Ceci achève de montrer P2 .

* P3 Soit $(K, K') \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n$ tel que $K \subset K'$. Supposons que $\phi^*(K') \in K$.

$K \subset K'$ donc $\max_{x \in K} g(x) \leq \max_{x' \in K'} g(x') = g(\phi^*(K'))$.

or $\phi^*(K') \in K$ donc $g(\phi^*(K')) \leq \max_{x \in K} g(x)$.

Alors $\max_{x \in K} g(x) \leq g(\phi^*(K')) \leq \max_{x \in K} g(x)$; $g(\phi^*(K')) = \max_{x \in K} g(x)$ et

$\phi^*(K') \in K$. Or $\phi^*(K)$ est l'unique élément de K qui réalise le maximum de g sur K. Ainsi $\phi^*(K') = \phi^*(K)$. Ceci achève de montrer P3 .

* P4 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$

Exercice. Montrer que $K[i,j] \in \mathcal{B}_n$.

Posons $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^*(K)$ et $v = u([i,j]) = (\phi^*(K))[i,j]$.

Montrons que v réalise le maximum de g sur $K[i,j]$

Soit $x \in K[i,j]$. $\exists x' \in K$, $x = x'[i,j]$.

notons que le produit des coordonnées de x est le même que le produit des coordonnées de x'.

Alors $g(x) = g(x') \leq g(u) = g(u[i,j]) = g(v)$.

$\forall x \in K[i,j]$, $g(x) \leq g(v)$ et $v = u[i,j] \in K[i,j]$ car $u \in K$.

Alors v réalise le maximum de g sur $K[i,j]$ donc $v = \phi^*(K[i,j])$.

Alors $(\phi^*(K))[i,j] = u[i,j] = v = \phi^*(K[i,j])$. ceci achève la preuve de P4

<u>ϕ^* est une application de $\mathcal{B}_n$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie P1, P2, P3 et P4.</u>

Q20 <u>Exercice.</u> notons que K_0 appartient à $\mathcal{B}_n$!

a) Posons $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) = \phi(K_0)$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

notons que $K_0[i,j] = K_0$ (preuve évidente).

Alors $u[i,j] = (\phi(K_0))[i,j] = \phi(K_0[i,j]) = \phi(K_0) = u$ d'après P3.

Donc $u[i,j] = u$. Alors $u_i = u_j$ et ceci pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Dans ces conditions $u_1 = u_2 = \dots = u_n$. Posons $\alpha = u_1$. $u = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$.

$u \in K_0$ donc $\alpha \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha \leq n$; $\alpha \geq 0$ et $n\alpha \leq n$; $0 \leq \alpha \leq 1$.

Supposons $\alpha < 1$. Alors $\vec{1} \in K_0$, $\vec{1} \neq u = \phi(K_0)$ et $\vec{1} \geq u = \phi(K_0)$

ceci est impossible d'après P1. Finalement $\alpha = 1$. Alors $u = \vec{1}$.

ce qui donne <u>$\phi(K_0) = \vec{1}$.</u>

<u>b)</u>
- $F \in \mathcal{B}_n$
- Soit $x' \in F$, $x' \geq \vec{0}$
- Soit $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \in F$. d'après Q17 $\sum_{i=1}^{n} x_i' \leq n$.

Les trois points précédents montrent que F est un élément de $\mathcal{B}_n$ contenu dans K_0

Nous avons vu en p15 que $\vec{1} \in F$. Ainsi $\phi(K_0) \in F$.

En rappelant que $K_0 \in \mathcal{B}_n$, P3 permet de dire que $\phi(F) = \phi(K_0)$.

Alors $\phi(F) = \vec{1}$

Posons $a = \left(\frac{1}{\phi_1^*(K)}, \frac{1}{\phi_2^*(K)}, \dots, \frac{1}{\phi_n^*(K)}\right)$. Observons alors que $F = a \otimes K$.

Comme F et K sont dans $\mathcal{B}_n$. $\vec{1} = \phi(F) = \phi(a \otimes K) = a \otimes \phi(K)$.

Posons $\phi(K) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

$(1, 1, \dots, 1) = \left(\frac{1}{\phi_1^*(K)}, \frac{1}{\phi_2^*(K)}, \dots, \frac{1}{\phi_n^*(K)}\right) \otimes (t_1, t_2, \dots, t_n)$

$(1, 1, \dots, 1) = \left(\frac{1}{\phi_1^*(K)} \times t_1, \frac{1}{\phi_2^*(K)} \times t_2, \dots, \frac{1}{\phi_n^*(K)} \times t_n\right)$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{\phi_i^*(K)} \times t_i = 1$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = \phi_i^*(K)$.

Ainsi $\phi(K) = \phi^*(K)$ et ceci pour tout K dans $\mathcal{B}_n$. Alors $\phi = \phi^*$.

ϕ^* est donc l'unique application de $\mathcal{B}_n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant P_1, P_2, P_3 et P_4.

ϕ^* est l'unique règle de partage sur $\mathcal{B}_n$.

Tiens c'est fini ! En fait il reste du travail !

1. Montrer que $K_0 \in \mathcal{B}_n$ (aisé)

2. Montrer que si $K \in \mathcal{B}_n$ et si a est un élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont strictement positives alors $a \otimes K \in \mathcal{B}_n$ (s'inspirer de $F \in K_n$).

3. Montrer que si $K \in \mathcal{B}_n$, si $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ et si $i \neq j$, alors $K[i, j] \in \mathcal{B}_n$.