PRELIMINAIRE

• $\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, $\|X\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|\in\mathbb{R}_+$

donc $\|\ \|_\infty$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$.

• Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. $\|X\|_\infty=0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|=0 \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ |x_i|=0$.

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ |x_i|\geq 0$

$\|X\|_\infty \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=0 \Leftrightarrow X=0_{\mathbb{R}^n}$.

$\forall X\in\mathbb{R}^n,\ \|X\|_\infty=0 \Leftrightarrow X=0_{\mathbb{R}^n}$.

• Soient λ un réel et $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$. $\lambda X=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}$.

$\|\lambda X\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda x_i|=\max\limits_{1\leq i\leq n}(|\lambda||x_i|)=|\lambda|\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|=|\lambda|\,\|X\|_\infty$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall X\in\mathbb{R}^n,\ \|\lambda X\|_\infty=|\lambda|\,\|X\|_\infty$.

• Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. $X+Y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$.

$\forall k\in[\![1,n]\!],\ |x_k+y_k|\leq|x_k|+|y_k|\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|+\max\limits_{1\leq i\leq n}|y_i|=\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty$.

Ainsi $\forall k\in[\![1,n]\!],\ |x_k+y_k|\leq\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty$. Alors $\|X+Y\|_\infty=\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k+y_k|\leq\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty$

$\forall(X,Y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \|X+Y\|_\infty\leq\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty$.

Les quatre points précédents permettent de dire que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

PARTIE I

A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q1.. Posons $\forall A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

Montrons que φ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• φ est clairement une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

- Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\varphi(A)=0 \Leftrightarrow \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|=0 \underset{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{1\leq i\leq n}|a_{ij}|\geq 0}{\Leftrightarrow} \forall i\in[\![1,n]\!]\ \sum_{j=1}^n|a_{ij}|=0 \underset{\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ |a_{ij}|\geq 0}{\Leftrightarrow} \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, |a_{ij}|=0.$$

$\varphi(A)=0 \Leftrightarrow \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{ij}=0 \Leftrightarrow A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\underline{\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A)=0 \Leftrightarrow A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$

- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

$$\varphi(\lambda A)=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|\lambda a_{ij}|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|\lambda||a_{ij}|=\max_{1\leq i\leq n}\left(|\lambda|\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\right)=|\lambda|\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$$

$\varphi(\lambda A)=|\lambda|\,\varphi(A)$.

$\underline{\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(\lambda A)=|\lambda|\,\varphi(A).}$

Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n|a_{kj}+b_{kj}|\leq\sum_{j=1}^n|a_{kj}|+\sum_{j=1}^n|b_{kj}|\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|+\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|b_{ij}|.$$

$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n|a_{kj}+b_{kj}|\leq\varphi(A)+\varphi(B)$ donc $\max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{kj}+b_{kj}|\leq\varphi(A)+\varphi(B)$

Ainsi $\varphi(A+B)\leq\varphi(A)+\varphi(B)$

$\underline{\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(A+B)\leq\varphi(A)+\varphi(B).}$

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{\varphi \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$.

Dans la suite, si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nous noterons $\|A\|$ la norme $\varphi(A)$ de A.

Q2 Soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ et $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $Y=AX=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$

$\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $|y_\ell| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}||x_j| \leq \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}| \leq \|X\|_\infty \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|y_k| \leq \|X\|_\infty \|A\|$. Donc $\|Y\|_\infty = \max_{1\leq \ell\leq n} |y_\ell| \leq \|X\|_\infty \|A\|$.

Alors $\|Y\|_\infty \leq \|A\|\,\|X\|_\infty$ et ainsi $\|AX\|_\infty \leq \|A\|\times\|X\|_\infty$.

$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

b) Donnons d'abord quelques idées simples qui peuvent permettre de trouver X_0.

Reprenons les notations du a). Supposons que k soit un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|y_k| = \max_{1\leq \ell\leq n} |y_\ell| = \|Y\|_\infty$ et supposons que $\|AX\|_\infty = \|A\|\,\|X\|_\infty$.

Alors $\|A\|\|X\|_\infty = \|AX\|_\infty = |y_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j\right| \underset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}||x_j| \underset{(2)}{\leq} \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}| \underset{(3)}{\leq} \|X\|_\infty \|A\|$

Alors (1), (2), (3) sont des égalités.

$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j} x_j|$; cela signifie que $a_{\ell 1}x_1, a_{\ell 2}x_2, \dots, a_{\ell n}x_n$ ont même signe.

$\sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}||x_j| = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}|$ suggère (suggère seulement !!) que $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|$.

Enfin $\|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}| = \|X\|_\infty \|A\|$ peut suggérer (suggérer seulement !) que $\sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}| = \|A\|$.

- Trouvons alors plus simple de construire $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|AX_0\| = \|A\|\,\|X_0\|$

$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Alors $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $\|A\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$.

Posons alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0 j} \geq 0 \\ -1 & \text{si } a_{i_0 j} < 0 \end{cases}$. Posons enfin $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Notons que $\|X_0\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \max_{1\leq i\leq n} 1 = 1$.

Notons alors que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \|X_0\|_\infty$. Nous savons déjà que :
$\underline{\|AX_0\|_\infty \leq \|A\| \|X_0\|_\infty}$. Posons $Y_0 = AX_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$|y_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j\right| \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j} x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}||x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \|A\|$$

$\forall j \in [\![1,n]\!], a_{i_0 j} x_j \geq 0$ par construction de X_0.

Ainsi $|y_{i_0}| = \|A\| = \|A\| \times 1 = \|A\| \|X_0\|_\infty$.

Alors $\|Y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |y_i| \geq |y_{i_0}| = \|A\| \|X_0\|_\infty$.

Donc $\underline{\|AX_0\|_\infty \geq \|A\| \|X_0\|_\infty}$. Ainsi $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \|X_0\|_\infty$ et $X_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Finalement $\underline{\underline{\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \exists X_0 \in \mathbb{R}^n, \|AX_0\|_\infty = \|A\| \|X_0\|_\infty \text{ et } X_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}}}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$.

$\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|$.

$\left\{ \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} ; X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \right\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par $\|A\|$. Elle possède alors une borne supérieure, inférieure à $\|A\|$!

$\sup_{X\in\mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ existe et $\sup_{X\in\mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|$.

Or $\exists X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \|X_0\|_\infty$ et $X_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $\|X_0\|_\infty \neq 0$. Ainsi $X_0 \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} = \|A\|$.

$\|A\|$ est alors le plus grand élément de $\left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \; ; X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \right\}$

Alors $\underline{\|A\| = \underset{X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}}{\max} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}}$ ... nécessairement $\underline{\|A\| = \underset{X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}}{\sup} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}}$.

c) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$\|ABX\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq \|A\| \, \|BX\|_\infty \leq \|A\| \, \|B\| \, \|X\|_\infty$.

Alors $\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\frac{\|ABX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\| \, \|B\|$

Ainsi $\|AB\| = \underset{X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}}{\sup} \frac{\|ABX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\| \, \|B\|$.

$\underline{\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \; \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|}$.

<u>Remarque</u>.- Ce résultat et une récurrence simple permettent d'obtenir :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k$.
Inégalité que nous aurons à utiliser dans la suite.

Q3) a) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = (a_{ij}(n))$ et $A = (a_{ij})$.

- Supposons que $(A_n)_{n \geq 0}$ converge vers A. $\lim_{n \to +\infty} \|A_n - A\| = 0$.

a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^n |a_{ij}(n) - a_{ij}| \leq \max_{1 \leq \ell \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{\ell j}(n) - a_{\ell j}| = \|A_n - A\|$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^n |a_{ij}(n) - a_{ij}| \leq \|A_n - A\|$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_{ij}(n) - a_{ij}| \leq \sum_{\ell=1}^n |a_{i\ell}(n) - a_{i\ell}| \leq \|A_n - A\|$.

Finalement $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_{ij}(n) - a_{ij}| \leq \|A_n - A\|$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \|A_n - A\| = 0$ il vient par encadrement : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{n \to +\infty} a_{ij}(n) = a_{ij}$

Réciproquement supposons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{m \to +\infty} a_{ij}(m) = a_{ij}$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij}(m) - a_{ij} | \right) = 0$ (somme d'un nombre fini de suites qui convergent vers 0.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\Delta_i(m) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(m) - a_{ij}|$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{m \to +\infty} \Delta_i(m) = 0$. Utilisons la définition pour montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i(m) = 0$. Nous aurons alors $\lim\limits_{m \to +\infty} \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(m) - a_{ij}| = 0$

donc $\lim\limits_{m \to +\infty} \|A_m - A\| = 0$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists p_i \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq p_i \Rightarrow \Delta_i(m) = |\Delta_i(m)| < \varepsilon$.

Posons $p = \max\limits_{1 \le i \le n} (p_i)$. $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq p \Rightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!], m \geq p_i)$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq p \Rightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!], \Delta_i(m) < \varepsilon)$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq p \Rightarrow \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i(m) < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq p \Rightarrow \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i(m) < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{m \to +\infty} \max \Delta_i(m) = 0$. Ceci achève de prouver que $\lim\limits_{m \to +\infty} \|A_m - A\| = 0$

donc que la suite $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers A.

<u>Finalement $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers A si et seulement si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$: $\lim\limits_{m \to +\infty} a_{ij}(m) = a_{ij}$.</u>

Remarque... Il est alors simple de montrer que si $(A_m)_{m \geq 0}$ est une suite convergente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une seule telle que $(A_m)_{m \geq 0}$ converge vers A ; nous dirons alors que A est la limite de $(A_m)_{m \geq 0}$ et nous écrirons $\lim\limits_{m \to +\infty} A_m = A$.

b) Supposons que $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers A et que $(B_n)_{n\geq 0}$ converge vers B. Posons que $C_n = A_n B_n$ et $C = AB$.

Montrons que $(C_n)_{n\geq 0}$ converge vers C.

Posons alors $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$

$A_n = (a_{ij}(n))$, $B_n = (b_{ij}(n))$, $C_n = (c_{ij}(n))$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{ij}(n) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}(n)\, b_{\ell j}(n).$

Or $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers A et $(B_n)_{n\geq 0}$ converge vers B.

Ainsi $\forall (i,j,\ell) \in [\![1,n]\!]^3, \ \lim_{n\to+\infty} a_{i\ell}(n) = a_{i\ell}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_{\ell j}(n) = b_{\ell j}$.

Par conséquent $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \lim_{n\to+\infty} c_{ij}(n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}(n)\, b_{\ell j}(n) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\, b_{\ell j} = c_{ij}$

Alors $(C_n)_{n\geq 0}$ converge vers C.

Si $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers A et $(B_n)_{n\geq 0}$ converge vers B alors $(A_n B_n)_{n\geq 0}$ converge vers AB.

Q4) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|A\| < 1$.

a) Une récurrence simple donne $\forall m \in \mathbb{N}, \ \|A^m\| \leq \|A\|^m$ (Q2 c)...)

$m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|A^m\| \leq \|A\|^m$ et $\lim_{m\to+\infty} \|A\|^m = 0$ car $0 \leq \|A\| < 1$.

Par encadrement $\lim_{m\to+\infty} \|A^m\| = 0$

Ainsi $\lim_{m\to+\infty} A^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

b) Soit λ une valeur propre réelle de A. $\exists X \in \mathbb{R}^n, \ AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Alors $|\lambda|\, \|X\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|A\|\, \|X\|_\infty < \|X\|_\infty$

$\uparrow \|X\|_\infty > 0$ et $\|A\| < 1$

$|\lambda| \, \|X\|_\infty < \|X\|_\infty$ et $\|X\|_\infty > 0$.

Par division il vient : $|\lambda|<1$.

<u>Si λ est une valeur propre réelle de A : $|\lambda|<1$.</u>

Ainsi 1 et -1 ne sont pas des valeurs propres de A.

$A-I$ et $A+I$ sont donc inversibles. Alors $-(A-I)$ et $I+A$ sont inversibles.

Par conséquent <u>$I-A$ et $I+A$ sont inversibles.</u>

c) $IA=AI$ donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{\ell=0}^{m} A^\ell\right)(I-A) = I^{m+1} - A^{m+1} = I - A^{m+1}$.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{m} A^\ell = (I-A^{m+1})(I-A)^{-1}$.

Posons $\forall m \in \mathbb{N}$, $T_m = I - A^{m+1} = (t_{ij}(m))$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $t_{ij}(m) = \begin{cases} 1 - a_{ij}(m+1) & \text{si } i=j \\ -a_{ij}(m+1) & \text{si } i\neq j \end{cases}$

$\lim_{m\to+\infty} A^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$; $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{m\to+\infty} a_{ij}(m) = 0$

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{m\to+\infty} t_{ij}(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$

Alors $(T_m)_{m\geq 0}$ converge vers I.

D'autre part la suite constante $((I-A)^{-1})_{m\geq 0}$ converge vers $(I-A)^{-1}$.

Par produit $(T_m(I-A)^{-1})_{m\geq 0}$ converge vers $I(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1}$.

Alors la suite $\left(\sum_{\ell=0}^{m} A^\ell\right)_{m\geq 0}$ converge vers $(I-A)^{-1}$.

... <u>ou la série de terme général A^m converge et $\sum_{m=0}^{+\infty} A^m = (I-A)^{-1}$.</u>

Q5 a) Posons $\forall m \in \mathbb{N}$, $S_m = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} N^\ell$.

$\forall m \in [\![p-1, +\infty [\![$, $S_m = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} N^\ell = \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{1}{\ell!} N^\ell + \sum_{\ell=p}^{m} \frac{1}{\ell!} \underbrace{N^p N^{m-p}}_{=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} = S_{p-1}$.

$\forall m \in [\![p-1, +\infty [\![$, $\| S_m - S_{p-1} \| = 0$ donc $\lim_{m \to +\infty} \| S_m - S_{p-1} \| = 0$!

Ainsi la suite $(S_m)_{m \geq 0}$ converge vers S_{p-1}.

Alors la série de terme général $\frac{1}{\ell!} N^\ell$ converge et $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} N^\ell = \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{1}{\ell!} N^\ell$.

---

b) • Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $NX = 0_{\mathbb{R}^n}$. Une récurrence simple donne $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $N^\ell X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Rappelons que $\Pi = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} N^\ell = \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{1}{\ell!} N^\ell$

Alors $\Pi X = \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{1}{\ell!} N^\ell X = X + \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\ell!} N^\ell X = X + \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{1}{\ell!} 0_{\mathbb{R}^n} = X$; $\Pi X = X$.

• Réciproquement soit X un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Pi X = X$.

Supposons que $NX \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $\mathcal{I} = \{ i \in \mathbb{N}^* \mid N^i X \neq 0_{\mathbb{R}^n} \}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ contenue dans $[\![1, p-1]\!]$ ($\forall i \in [\![p, +\infty [\![$, $N^i X = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $N^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

Ainsi $\mathcal{I}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$. $\mathcal{I}$ possède un plus grand élément q. $q \in [\![1, p-1]\!]$, $N^q X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall k \in [\![q+1, +\infty [\![$, $N^k X = 0_{\mathbb{R}^n}$

Alors $X = \Pi X = \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{1}{\ell!} N^\ell X = \sum_{\ell=0}^{q} \frac{1}{\ell!} N^\ell X$; ainsi $\sum_{\ell=1}^{q} \frac{1}{\ell!} N^\ell X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

En multipliant par N^{q-1} on obtient :

$\sum_{l=1}^{q} \frac{1}{l!} N^{l+q-1} X = 0_{\mathbb{R}^n}$. Or $N^{l+q-1}X = 0_{\mathbb{R}^n}$ si $l+q-1 > q$ donc si $l > 1$. Alors $\frac{1}{1!} N^{1+q-1} X = 0_{\mathbb{R}^n}$, ainsi $N^q X = 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui contredit la définition de q. Alors $NX \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ est impossible. $NX = 0_{\mathbb{R}^n}$!

Ceci achève de montrer que : $\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M-I)X = 0_{\mathbb{R}^n}\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid NX = 0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Q6 • Rappel.. Pour tout réel x, la série de terme général $\frac{x^m}{m!}$ converge et $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$.

• Remarque.. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont n réels nous noterons $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale (δ_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$.

$\exists (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = \mathrm{Diag}(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k)$

Alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} D^l = \mathrm{Diag}\left(\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} d_1^l, \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} d_2^l, \ldots, \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} d_n^l\right)$

Posons $\forall m \in \mathbb{N}$, $S_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} D^l = (A_{i,j}(m))$ et $\Delta = \mathrm{Diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n}) = (\hat{\delta}_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $A_{i,j}(m) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} d_i^l & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{m \to +\infty} A_{i,j}(m) = \begin{cases} e^{d_i} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{m \to +\infty} A_{i,j}(m) = \hat{\delta}_{ij}$. Alors $(S_m)_{m \geq 0}$ converge vers $\hat{\Delta}$

la série de terme général $\frac{1}{l!} D^l$ converge et $\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} D^l = \hat{\Delta}$.

Si D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ de $M_n(\mathbb{R})$:
1/ la série de terme général $\frac{1}{\ell!} D^\ell$ converge
2/ $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} D^\ell = \mathrm{Diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n})$

b) $A \in M_n(\mathbb{R})$, D est une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $A = PDP^{-1}$.

Une récurrence simple donne $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $A^\ell = PD^\ell P^{-1}$

Alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} A^\ell = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} PD^\ell P^{-1} = P\left(\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} D^\ell\right) P^{-1}$.

Rappelons que la série de terme général $\frac{1}{\ell!} D^\ell$ converge et posons $\hat{\Delta} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} D^\ell$

La suite constante égale à P converge vers P et la suite $\left(\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} D^\ell\right)_{m\geq 0}$ converge vers $\hat{\Delta}$.

Alors Q3 montre que la suite $\left(P\left(\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} D^\ell\right)\right)_{m\geq 0}$ converge vers $P\hat{\Delta}$

La suite constante égale à P^{-1} converge vers P^{-1} donc Q3 montre encore que la suite $\left(P\left(\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} D^\ell\right) P^{-1}\right)_{m\geq 0}$ converge vers $P\hat{\Delta}P^{-1}$.

Ainsi la suite $\left(\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} A^\ell\right)_{m\geq 0}$ converge vers $P\hat{\Delta}P^{-1}$.

Ainsi
1/ la série de terme général $\frac{1}{\ell!} A^\ell$ converge.
2/ $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell = P\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} D^\ell\right) P^{-1}$.

▼ Remarque.. Il semble difficile de continuer pour montrer la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\ell!} A^\ell$ converge lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$, non ??

Pour cela nous allons généraliser le résultat qui dit qu'une série de réels absolument convergente est convergente.

Lemme.. | Soit $(A_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$
si la série de terme général $\|A_n\|$ converge alors la série de terme général A_n converge.

<u>Preuve</u>

Posons $\forall m \in [\![n_0, +\infty [\![$, $A_n = (a_{ij}(n))$ et $S_n = \sum_{\ell = n_0}^{n} A_\ell$.

Pour $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $S_m = \left(\sum_{\ell = n_0}^{m} a_{ij}(\ell) \right)$.

Il s'agit de montrer que la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ la suite $\left(\sum_{\ell = n_0}^{n} a_{ij}(\ell) \right)_{n \geq n_0}$ est convergente, donc de montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ la série de terme général $a_{ij}(n)$ est convergente.

Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Soit $m \in [\![n_0, +\infty [\![$

$|a_{ij}(n)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}(n)| \leq \max_{1 \leq \ell \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{\ell,k}(n)| = \|A_n\|$.

Ainsi $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $0 \leq |a_{i,j}(n)| \leq \|A_n\|$ et la série de terme général $\|A_n\|$ converge par hypothèse. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|a_{i,j}(n)|$.

La série de terme général $a_{i,j}(n)$ est alors absolument convergente donc convergente.

Ce qui achève la preuve du lemme.

<u>Preuve de la convergence de la sére de terme général $\frac{1}{m!} A^m$ ou $A \in M_n(\mathbb{R})$.</u>

Il suffit de montrer que la série de terme général $\|\frac{1}{n!} A^n\|$ ou $\frac{1}{n!} \|A^n\|$ converge. Or :

1.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|\frac{1}{n!} A^n\| = \frac{1}{n!} \|A^n\| \overset{(*)}{\leq} \frac{\|A\|^n}{n!}$; ← (*) vu dans Q4

2.. la série de terme général $\frac{\|A\|^n}{n!}$ ← d'après le cours.

Les règles de comparaison avec les séries à termes positifs donnent alors la convergence de la série de terme général $\|\frac{1}{n!} A^n\|$. Le lemme donne la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n!} A^n$ ▼

(Q7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. I et $\frac{1}{n}A$ commutent donc $A_n = (I + \frac{1}{n}A)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} A^\ell$

$$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - A_n = \sum_{\ell=0}^{n} \left[1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right] \frac{1}{\ell!} A^\ell.$$

$\binom{n}{\ell} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{\ell!}$ ... à un chouïa... fait par le bijok !

$$\left\| \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - A_n \right\| = \left\| \sum_{\ell=0}^{n} \left[1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right] \frac{1}{\ell!} A^\ell \right\| \leq \sum_{\ell=0}^{n} \left\| \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right) \frac{1}{\ell!} A^\ell \right\|.$$

$$\left\| \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - A_n \right\| \leq \sum_{\ell=0}^{n} \left| \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right) \frac{1}{\ell!} \right| \|A^\ell\|.$$

vu en Q4...

$$\left\| \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - A_n \right\| \leq \sum_{\ell=0}^{n} \left| 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell} \right| \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell} \leq \frac{n^\ell}{n^\ell} = 1 \text{ pour tout } \ell \in [\![0, n]\!]$$

(nouais...)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\| \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - A_n \right\| \leq \sum_{\ell=0}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right) \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell.$

---

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{\ell=0}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right) \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell - \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} \|A\|^\ell.$

même chose que dans a)

$$\sum_{\ell=0}^{n} \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right) \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell - \left(1 + \frac{1}{n} \|A\|\right)^n.$$

Notons que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell = e^{\|A\|}$.

$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\|A\|\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} \|A\| = \|A\|$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\|A\|\right)\right] = \|A\|$.

Par continuité de la fonction exponentielle $\lim_{n \to +\infty} \left[e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\|A\|\right)} \right] = e^{\|A\|}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\|A\|\right)^n = e^{\|A\|}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sum\limits_{\ell=0}^{n} \left(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-\ell+1)}{n^\ell}\right)\frac{1}{\ell!}\|A\|^\ell\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}\|A\|^\ell - \left(1+\frac{1}{n}\|A\|\right)^n\right] =$

$e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0$. Le résultat de a) et le théorème d'encadrement donnent alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \sum\limits_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - A_n \right\| = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|A_n - e^A\| = \|A_n - \sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}A^\ell + \sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}A^\ell - e^A\|$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \|A_n - e^A\| \leq \|A_n - \sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}A^\ell\| + \|\sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}A^\ell - e^A\|$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n - \sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}A^\ell\| = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\|\sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}A^\ell - e^A\| = 0$.

Donc par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|A_n - e^A\| = 0$.

La suite (A_n) converge vers e^A ou la suite $\left(\left(I+\frac{1}{n}A\right)^n\right)$ converge vers e^A.

B Propriété de l'exponentielle de matrice

▼ Commençons par prouver le résultat admis. Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\hat{A}_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} A^l$, $\hat{B}_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} B^l$ et $S_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} (A+B)^l$.

Montrons d'abord que $\lim_{m\to+\infty} (\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ ou que $\lim_{m\to+\infty} \|\hat{A}_m\hat{B}_m - S_m\| = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$\forall l \in [\![0,m]\!]$, $(A+B)^l = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} A^i B^{l-i}$ car $AB=BA$.

$$S_m = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} A^i B^{l-i} = \sum_{i=0}^{m} \left(A^i \sum_{l=i}^{m} \frac{1}{l!} \frac{l!}{i!\,(l-i)!} B^{l-i} \right).$$

$$S_m = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} A^i \sum_{l=i}^{m} \frac{1}{(l-i)!} B^{l-i} \right) = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} A^i \sum_{j=0}^{m-i} \frac{1}{j!} B^j \right).$$

Alors $\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m = \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} B^j \right) - \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} A^i \sum_{j=0}^{m-i} \frac{1}{j!} B^j \right)$

donc $\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} A^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} B^j \right)$ ... à un petit abus près.

On montre rigoureusement de la même manière que :

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \|A\|^l \times \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \|B\|^l - \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} (\|A\|+\|B\|)^l = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} \|A\|^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} \|B\|^j \right).$$

$$\|\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m\| = \left\| \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} A^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} B^j \right) \right\| \leq \sum_{i=0}^{m} \left\| \frac{1}{i!} A^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} B^j \right\|.$$

$$\|\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m\| \leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \left\| A^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} B^j \right\| \leq \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} \|A^i\| \left\| \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} B^j \right\| \right).$$

$$\|\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m\| \leq \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} \|A\|^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \left\| \frac{1}{j!} B^j \right\| \right) = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} \|A\|^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} \|B^j\| \right)$$

$$\|\hat{A}_m \hat{B}_m - S_m\| \leq \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{i!} \|A\|^i \sum_{j=m-i+1}^{m} \frac{1}{j!} \|B\|^j \right) = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \|A\|^l \times \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \|B^l\| - \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} (\|A\|+\|B\|)^l$$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\hat{A}_n\hat{B}_n - S_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\hat{A}_n\hat{B}_n - S_n\| = 0$.

$\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\|A\|^\ell = e^{\|A\|}$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\|B\|^\ell = e^{\|B\|}$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}(\|A\|+\|B\|)^\ell = e^{\|A\|+\|B\|}$.

donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \left[\sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\|A\|^\ell \times \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\|B\|^\ell - \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}(\|A\|+\|B\|^\ell)\right] = e^{\|A\|}e^{\|B\|} - e^{\|A\|+\|B\|} = 0$

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \|\hat{A}_n\hat{B}_n - S_n\| \leq \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\|A\|^\ell \times \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\|B\|^\ell - \sum\limits_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}(\|A\|+\|B\|)^\ell$

Il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\hat{A}_n\hat{B}_n - S_n\| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\hat{A}_n\hat{B}_n - S_n) = 0_{\mathcal{M}_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{A}_n = e^A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{B}_n = e^B$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{A}_n\hat{B}_n = e^Ae^B$.

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e^{A+B}$.

V1 On peut sans doute en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_nB_n - S_n) = e^Ae^B - e^{A+B}$!

Alors $e^Ae^B - e^{A+B} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_nB_n - S_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc $e^{A+B} = e^Ae^B$.

V2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|e^Ae^B - e^{A+B}\| = \|e^Ae^B - \hat{A}_n\hat{B}_n + \hat{A}_n\hat{B}_n - S_n + S_n - e^{A+B}\|$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|e^Ae^B - e^{A+B}\| \leq \|e^Ae^B - \hat{A}_n\hat{B}_n\| + \|\hat{A}_n\hat{B}_n - S_n\| + \|S_n - e^{A+B}\|$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $\|e^Ae^B - e^{A+B}\| = 0$ donc $e^Ae^B - e^{A+B} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $e^{A+B} = e^Ae^B$.

---

on reprend le cours du sujet...

Q1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A et $(-A)$ commutent donc .

$$e^{A+(-A)} = e^Ae^{-A} \quad \text{et} \quad e^{(-A)+A} = e^{-A}e^A$$

Alors $e^Ae^{-A} = e^{-A}e^A = e^{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$. Posons $S = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} S^k = \frac{1}{0!}S^0 + 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = I.$$

Alors $\left(\sum\limits_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}S^\ell\right)_{n\geq 0}$ converge vers I ; $e^S = I$, $e^{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} = I$

Ainsi $e^Ae^{-A} = e^{-A}e^A = I$. $\underline{e^A \text{ est inversible et } (e^A)^{-1} = e^{-A}}$.

(Q2) $\boxed{\text{Ici les dents se gâtent !}}$ La matrice S_A n'est pas toujours unique* et rien n'indique alors que toutes les matrices S_A solutions, vérifient $\|S_A\|<1$ lorsque $\|A\|<1$!!

* Nous y reviendrons plus tard (remarque p 18)

« $e^A - I = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell} = A\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}\right) = A\left(I + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}\right)$ »

<u>Nous considérerons que dans la suite la matrice S_A dont on parle est $\sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$.</u>

Dans la suite nous utiliserons aussi les résultats suivants

- Si (A_n) et (B_n) sont deux suites d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers A et B, (A_n+B_n) est une suite qui converge vers $A+B$.
- En particulier si (A_m) est une suite d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A et si $C \in M_n(\mathbb{R})$, (A_m+C) et $(C+A_m)$ convergent respectivement vers $A+C$ et $C+A$. <u>Exercice.</u>- Montrer ces résultats.

a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. $\forall \ell \in [\![2,+\infty[\![$, $\left\|\frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}\right\| = \frac{1}{\ell!}\|A^{\ell-1}\| \leq \frac{1}{\ell!}\|A\|^{\ell-1} \leq \frac{1}{(\ell-1)!}\|A\|^{\ell-1}$.

De plus la série de terme général $\frac{1}{(\ell-1)!}\|A\|^{\ell-1}$ est convergente (cours !). Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs donnent alors la convergence de la série de terme général $\left\|\frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}\right\|$.

Le lemme de la page 12 donne alors la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$. Ainsi <u>$\sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$ existe</u>. Posons alors $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$

$\lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}\right) = S_A$ donc $\lim_{m \to +\infty} \left(A \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}\right) = A S_A$

Alors $\lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell}\right) = A S_A$

donc $\lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell}\right) = A + A S_A = A(I + S_A)$.

Or $e^A = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell\right)$ donc $e^A - I = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell - I\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell\right)$

Donc $e^A - I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell = A(I+S_A)$; $\underline{e^A - I = A(I+S_A)}$.

$\underline{\text{Si } A\in M_n(\mathbb{R})}$ 1) $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$ existe ;

2) $\underline{e^A - I = A(I+S_A)}$.

<u>Remarque</u>.. Si A est inversible, $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$ est l'unique matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $e^A - I = A(I+S_A)$ et $S_A = A^{-1}(e^A - I) - I$.

Supposons A non inversible. $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit M la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est X et les autres colonnes nulles.

Alors $AM = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ et $M \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

$e^A - I = A(I+S_A) = A(I+S_A) + AM = A(I+S_A+M)$.

$e^A - I = A(I+S_A+M)$ et $S_A + M \neq S_A$. Il n'y a donc pas unicité de la matrice S_A du texte !!

<u>Rappelons que dans la suite si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$.</u>

<u>b)</u> Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ell(x) = e^x - 1 - 2x$. ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ell'(x) = e^x - 2$. ℓ' est donc strictement positive sur $]\ln 2, +\infty[$,

strictement négative sur $[0, \ln 2[$ et nulle en $\ln 2$.

Alors ℓ est strictement décroissante sur $[0, \ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

$\ell(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \ell(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 2\right)\right) = +\infty$. $\ell(\ln 2) = 1 - 2\ln 2$.

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$\ell'(x)$		$-$	0	$+$	
$\ell(x)$	0	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. Supposons $A \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$

$$\forall m \in [\![2,+\infty[\![,\ \left\| \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| \leq \sum_{\ell=2}^{m} \left\| \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| = \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} \|A^{\ell-1}\| \leq \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} \|A\|^{\ell-1}.$$

$$\forall m \in [\![2,+\infty[\![,\ \left\| \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| \leq \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} \|A\|^{\ell-1} \underset{A \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}}{=} \frac{1}{\|A\|} \left[\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} \|A\|^{\ell} - \|I\| - \|A\| \right].$$

$$\forall m \in [\![2,+\infty[\![,\ \|S_A\| = \left\| S_A - \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} + \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| \leq \left\| S_A - \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| + \left\| \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\|.$$

$$\forall m \in [\![2,+\infty[\![,\ \|S_A\| \leq \left\| S_A - \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| + \frac{1}{\|A\|} \left[\sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!} \|A\|^{\ell} - \|I\| - \|A\| \right].$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ il vient :

$\|S_A\| \leq \frac{1}{\|A\|} \left[e^{\|A\|} - \|I\| - \|A\| \right]$ car $\lim_{m \to +\infty} \left\| S_A - \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right\| = 0$ puisque S_A est la limite de la suite $\left(\sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} \right)_{m \geq 2}$.

Notons que $\|I\| = 1$. Ainsi $\|S_A\| \leq \frac{1}{\|A\|}\left(e^{\|A\|} - 1 - \|A\|\right) = \frac{1}{\|A\|}\left(\ell(\|A\|) + \|A\|\right)$.

$\ell(0) = 0$ et ℓ est strictement décroissante sur $[0, \ln 2]$ donc $\forall t \in]0, \ln 2]$, $\ell(t) < \ell(0) = 0$.

$\ell(1) = e - 3 < 0$ et ℓ est strictement croissante sur $[\ln 2, 1]$ donc $\forall t \in [\ln 2, 1[$, $\ell(t) < \ell(1) < 0$.

Finalement $\forall t \in]0,1[$, $\ell(t) = e^t - 1 - 2t < 0$.

$\forall t \in]0,1[$, $\ell(t) + t < t$; $\forall t \in]0,1[$, $\frac{\ell(t)+t}{t} < 1$.

Alors $\|S_A\| \leq \frac{\ell(\|A\|) + \|A\|}{\|A\|} < 1$ car $\|A\| \in]0,1[$.

Si $A \neq 0$ et si $\|A\| < 1$ alors $\|S_A\| < 1$.

Si $A = 0$: $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1} = 0$ donc $\|S_A\| = 0 < 1$.

Finalement : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \|A\| < 1 \Rightarrow \|S_A\| < 1$ (... pour $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$)

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $e^A = I$ et $\|A\| < 1$.

Alors $A(I + S_A) = 0$ (où $S_A = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell-1}$) et $\|S_A\| < 1$.

Ainsi $\|A\| = \|-AS_A\| = \|AS_A\| \leq \|A\| \|S_A\|$.

$0 \leq \|A\|(\|S_A\| - 1)$ et $\|S_A\| - 1 < 0$ donc $\|A\| \leq 0$. Or $\|A\| \geq 0$.

Finalement $\|A\| = 0$. $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $e^A = I$ et $\|A\| < 1 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice.. Retrouver le résultat en utilisant I A Q4 b.

Q3 a) Soit $A \in S_n$. Il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$. $A = PDP^{-1}$.

Nous avons vu dans A) Q6 que $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell = P\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} D^\ell\right) P^{-1}$.

Ainsi $e^A = P e^D P^{-1} = P e^D\, {}^tP$.

Nous avons également vu que e^D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n})$.

Alors 1) e^A est semblable à $\mathrm{Diag}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n})$ donc $\mathrm{Sp}\, e^A = \{e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}\}$, ainsi les valeurs propres de e^A sont strictement positives.

2) e^D est symétrique car e^D est diagonale ; ainsi :

${}^te^A = {}^t(P e^D\, {}^tP) = {}^t({}^tP)\, {}^t(e^D)\, {}^tP = P e^D\, {}^tP = e^A$ et e^A est symétrique.

Finalement $\forall A \in S_n$, $e^A \in S_n^{++}$.

b) Posons $\forall A \in S_n$, $\varphi(A) = e^A$. D'après a) φ est une application de S_n dans S_n^{++}. Montrons que φ est surjective.

Soit $B \in S_n^{++}$. Il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ telles que $P^{-1}BP = {}^tPBP = \Delta$.

$\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\} = \mathrm{Sp}\,\Delta = \mathrm{Sp}\,B \subset \mathbb{R}_+^*$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\beta_k>0$.

Posons $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k = \ln\beta_k$, $D=\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $A = PDP^{-1}$.

$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\dots,e^{\alpha_n})P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)P^{-1}$.

$e^A = P\Delta P^{-1} = B$.

De plus ${}^tA = {}^t(PDP^{-1}) = {}^tP^{-1}\,{}^tD\,{}^tP = {}^t({}^tP)D\,{}^tP = PD\,{}^tP = PDP^{-1} = A$; ainsi

A est symétrique.

Finalement $A\in\mathcal{S}_n$ et $\psi(A)=B$.

<u>$\forall B\in\mathcal{S}_n^{++}$, $\exists A\in\mathcal{S}_n$, $\psi(A)=B$. ψ est une surjection de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n^{++}$.</u>

Q4 a) A est semblable à une matrice diagonale $D=\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.
B est semblable à une matrice diagonale $D'=\mathrm{Diag}(\alpha'_1,\alpha'_2,\dots,\alpha'_n)$.

e^A (resp. e^B) est alors semblable à $e^D=\mathrm{Diag}(e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\dots,e^{\alpha_n})$ (resp. $e^{D'}=\mathrm{Diag}(e^{\alpha'_1},e^{\alpha'_2},\dots,e^{\alpha'_n})$).

Ainsi $\mathrm{Sp}\,A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$, $\mathrm{Sp}\,B=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$,

$$\{e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\dots,e^{\alpha_n}\} = \mathrm{Sp}\,e^A \underset{A=B}{\overset{\uparrow}{=}} \mathrm{Sp}\,e^B = \{e^{\beta_1},e^{\beta_2},\dots,e^{\beta_n}\}.$$

Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}A$. $\exists i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda=\alpha_i$. $e^\lambda = e^{\alpha_i}\in\mathrm{Sp}\,A=\mathrm{Sp}\,B=\{e^{\beta_1},e^{\beta_2},\dots,e^{\beta_n}\}$.

$\exists j\in[\![1,n]\!]$, $e^\lambda=e^{\alpha_i}=e^{\beta_j}$. Alors $\lambda=\alpha_i=\beta_j\in\mathrm{Sp}\,B$.

Donc $\mathrm{Sp}A\subset\mathrm{Sp}B$. De même $\mathrm{Sp}B\subset\mathrm{Sp}A$. Finalement $\mathrm{Sp}A=\mathrm{Sp}B$.

<u>A et B ont les mêmes valeurs propres.</u>

b) $\forall m\in\mathbb{N}$, $A\displaystyle\sum_{k=0}^m\frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^m\frac{1}{k!}A^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^m\frac{1}{k!}A^k\right)A$.

Or $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^m\frac{1}{k!}A^k = e^A$. Ainsi $Ae^A=e^AA$ ... ou <u>$Ae^B=e^BA$</u>

c) i) Il existe une base orthonormée $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de v respectivement associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons $\mathcal{B}' = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. $M_{\mathcal{B}'}(v) = \mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Notons que P est orthogonale ...

$B = M_{\mathcal{B}}(v)$. $\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = M_{\mathcal{B}'}(v) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(v) P = P^{-1} B P$.

Donc $P^{-1} e^B P = \mathrm{Diag}(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n})$.

Alors $M_{\mathcal{B}'}(e^v) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(e^v) P = P^{-1} e^B P = \mathrm{Diag}(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n})$.

Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e^v(t_k) = e^{\beta_k} t_k$.

Soit $x = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ un élément de $\mathbb{R}^n$ soit λ un réel.

$v(x) = \sum_{k=1}^n x_k v(t_k) = \sum_{k=1}^n x_k \beta_k t_k$. $e^v(x) = \sum_{k=1}^n x_k e^v(t_k) = \sum_{k=1}^n x_k e^{\beta_k} t_k$.

$x \in \mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$

$\Updownarrow$ $v(x) = \lambda x$

$\Updownarrow$ $\sum_{k=1}^n x_k \beta_k t_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k t_k$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \beta_k = \lambda x_k$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ ou $\beta_k = \lambda$

$x \in \mathrm{Ker}(e^v - e^\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$

$\Updownarrow$ $e^v(x) = e^\lambda x$

$\Updownarrow$ $\sum_{k=1}^n x_k e^{\beta_k} t_k = \sum_{k=1}^n e^\lambda x_k t_k$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k e^{\beta_k} = e^\lambda x_k$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ ou $e^{\beta_k} = e^\lambda$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0$ ou $\beta_k = \lambda$

$\Updownarrow$ $x \in \mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Finalement $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Ker}(e^v - e^\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Traitons enfin le problème posé.

Soit F un sous-espace propre de v et λ la valeur propre associée à ce sous-espace propre.

$F = \mathrm{Ker}\,(v - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Ker}\,(e^v - e^\lambda Id_{\mathbb{R}^n})$ et $F \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Ainsi F est encore un sous-espace propre de e^v. F est le sous-espace propre de e^v associé à la valeur propre e^λ.

<u>Si F est un sous-espace propre de v, F est un sous-espace propre de e^v.</u>

<u>ii)</u> • Montrons que F est stable par u. Rappelons que $F = SEP(v,\lambda) = SEP(e^v, e^\lambda)$.
Soit $x \in F$. Notons que $Ae^B = e^B A$ donc $u \circ e^v = e^v \circ u$.

$u(e^v(x)) = e^v(u(x))$ et $e^v(x) = e^\lambda x$ donc $u(e^\lambda x) = e^v(u(x))$.

Alors $e^v(u(x)) = e^\lambda u(x)$. $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(e^v - e^\lambda Id_{\mathbb{R}^n}) = F$.

$\forall x \in F, u(x) \in F$.

• Considérons alors l'application u_F de F dans F définie par $\forall x \in F, u_F(x) = u(x)$.

→ u étant linéaire, u_F est linéaire, ainsi u_F est un endomorphisme de F.

→ u étant symétrique, u_F est un endomorphisme symétrique de F. Ainsi u_F est diagonalisable.

<u>La restriction de u à F induit un endomorphisme de F diagonalisable.</u>

<u>d)</u> Le concepteur ne semble pas ici avoir les idées très claires. Alors abrégeons !!

Soit F un sous-espace propre de v. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $F = SEP(v,\lambda)$.

D'après <u>c)</u> $F = SEP(e^v, e^\lambda)$. Comme $e^u = e^v$: $F = SEP(e^u, e^\lambda)$.

Ainsi $F = \mathrm{Ker}\,(e^u - e^\lambda Id_{\mathbb{R}^n})$. Or $\mathrm{Ker}\,(e^u - e^\lambda Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})$ (u et v jouent le même rôle ... ce qui est vrai pour v est vrai pour u).

Ainsi $F = SEP(v,\lambda) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id_{\mathbb{R}^n})$.

Alors λ est valeur propre de u et $SEP(u,\lambda) = SEP(v,\lambda)$.

De même si λ est valeur propre de u : λ est valeur propre de v et $SEP(v,\lambda) = SEP(u,\lambda)$.

Finalement u et v ont les mêmes sous-espaces propres.

Donc <u>u et v ont les mêmes vecteurs propres</u>.

Reprenons une base $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de v associées aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Nous avons vu que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $SEP(v,\beta_i) = SEP(u,\beta_i)$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v(t_i) = \beta_i t_i = u(t_i)$.

u et v coïncident alors sur la base $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de $\mathbb{R}^n$, donc $u = v$.

Finalement $A = B$.

<u>$\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^2$, $e^A = e^B \Rightarrow A = B$.</u>

<u>Remarque.</u> L'application φ définie dans B Q3 b) est une bijection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

<u>Remarque</u>.. Nous aurions pu pour traiter <u>d)</u> construire une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres pour u et pour v en utilisant c) ii).

Cette 24^{ième} page achève la partie I

PARTIE II

(Q1) Une récurrence simple montre que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![0,i-1]\!]$, $f^k(e_i) = e_{i-k}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^{(i-1)}(e_i) = e_{i-(i-1)} = e_1$ et $f^{(i)}(e_i) = f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![i,+\infty[\![$, $f^k(e_i) = f^{k-i}(f^i(e_i)) = f^{k-i}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Résumons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} \text{ si } k \leq i-1 \\ 0_{\mathbb{R}^n} \text{ sinon} \end{cases}$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} & \text{si } i \geq k+1 \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \text{sinon} \end{cases}$

Notons que $\forall k \in [\![n,+\infty[\![$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $i < k+1$.

Donc $\forall k \in [\![n,+\infty[\![$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^k(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$. $\forall k \in [\![n,+\infty[\![$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

$\forall k \in [\![n,+\infty[\![$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ et $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} \text{ si } i \geq k+1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Alors $\forall k \in [\![n,+\infty[\![$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $N^k = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ \hline 0_{k,k} & 0_{k,n-k} \end{array}\right)$.

(Q2) a) $e^{Q_p} = e^{p(N-I)} = e^{pN-pI} = e^{pN}e^{-pI}$

$$e^{Q_p} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(pN)^\ell}{\ell!} \times \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}(-pI)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{p^\ell}{\ell!} N^\ell \times \underbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-p)^\ell}{\ell!}}_{e^{-p}} I = e^{-p} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{p^k}{\ell!} N^k \dots \text{ree}$$

$$e^{Q_p} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j.$$

b) Posons $R_p = (r_{i,j}(p))$ et $N = (n_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{i,j}(p) = \begin{cases} p\, n_{ij} \text{ si } i \neq j \\ (1-p) + p\, n_{ij} \text{ si } i = j \end{cases}$ et $n_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{i,j}(p) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1 \\ 1-p \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\quad R_p = \begin{pmatrix} 1-p & p & & (0) \\ & 1-p & \ddots & \\ & & \ddots & p \\ (0) & & & 1-p \end{pmatrix}$

Si $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |r_{i,j}(p)| = |r_{i,i}(p)| + |r_{i,i+1}(p)| = |1-p| + |p| = 1-p+p = 1$.

Si $i = n$, $\sum_{j=1}^{n} |r_{i,j}(p)| = \sum_{j=1}^{n} |r_{n,j}(p)| = |r_{n,n}(p)| = |1-p| = 1-p$.

Ainsi $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |r_{i,j}(p)| = \max(1, 1-p) = 1$. $\underline{\underline{\|R_p\| = 1.}}$

Pour $Q_p = (q_{i,j}(p))$. $Q_p = R_p - I$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad q_{i,j}(p) = \begin{cases} r_{i,j}(p) - 1 & \text{si } i=j \\ r_{i,j}(p) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad q_{i,j}(p) = \begin{cases} -p & \text{si } i=j \\ p & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad Q_p = \begin{pmatrix} -p & p & & (0) \\ & -p & \ddots & \\ & & \ddots & p \\ (0) & & & -p \end{pmatrix}$$

On montre alors sans difficulté que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |q_{i,j}(p)| = \begin{cases} 2p & \text{si } i \neq n \\ p & \text{si } i = n \end{cases}$

Alors $\|Q_p\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |q_{i,j}(p)| = \max(2p, p) = 2p$. $\underline{\underline{\|Q_p\| = 2p.}}$

$$\|e^{Q_p}\| = \left\| \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left\| e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j \right\| = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} \|N^j\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} \|N\|^j.$$

$N = (n_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |n_{i,j}| = |n_{i,i+1}| = 1$ et $\sum_{j=1}^{n} |n_{n,j}| = 0$

$\|N\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |n_{i,j}| = \max(1, 0) = 1$

$$\text{Alors } \|e^{Q_p}\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} = e^{-p} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p^j}{j!} \underset{p \geq 0 \text{ et } e^{-p} \geq 0}{\leq} e^{-p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{p^j}{j!} = e^{-p} e^{p} = 1.$$

$\underline{\underline{\|e^{Q_p}\| \leq 1.}}$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ commutent deux à deux $(\dots \varphi_\ell = p(N-I) \dots)$

(Q3) a) $\prod_{\ell=1}^{m} e^{\varphi_\ell} = e^{\varphi_1} e^{\varphi_2} \times \dots \times e^{\varphi_m} = e^{\sum_{\ell=1}^{m} \varphi_\ell} = e^{\sum_{\ell=1}^{m} p_\ell (N-I)} = e^{(-\sum_{\ell=1}^{m} p_\ell)(I-N)}$

$$\prod_{\ell=1}^{m} e^{\varphi_\ell} = e^{(-\sum_{\ell=1}^{m} p_\ell)(I-N)}$$

b) $\prod_{\ell=1}^{m} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{m} e^{\varphi_\ell} = R_1 \prod_{\ell=2}^{m} R_\ell - e^{\varphi_1} \prod_{\ell=2}^{m} R_\ell + e^{\varphi_1} \prod_{\ell=2}^{m} R_\ell - e^{\varphi_1} \prod_{\ell=2}^{m} e^{\varphi_\ell}$.

$\prod_{\ell=1}^{m} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{m} e^{\varphi_\ell} = (R_1 - e^{\varphi_1}) \prod_{\ell=2}^{m} R_\ell - e^{\varphi_1} \left(\prod_{\ell=2}^{m} e^{\varphi_\ell} - \prod_{\ell=2}^{m} R_\ell\right) \dots$ BOF

c) Montrons par récurrence que : $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\| \prod_{\ell=1}^{i} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i} e^{\varphi_\ell} \| \leq \sum_{\ell=1}^{i} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \|$.

→ c'est clair pour $i = 1$ car $\| R_1 - e^{\varphi_1} \| \leq \| R_1 - e^{\varphi_1} \|$!!

→ Supposons la propriété vraie pour i dans $[\![1, m-1]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

On montre sans difficulté comme dans b) que :

$\prod_{\ell=1}^{i+1} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i+1} e^{\varphi_\ell} = (R_{i+1} - e^{\varphi_{i+1}}) \prod_{\ell=1}^{i} R_\ell + e^{\varphi_{i+1}} \left(\prod_{\ell=1}^{i} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i} e^{\varphi_\ell} \right)$. Alors

$\| \prod_{\ell=1}^{i+1} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i+1} e^{\varphi_\ell} \| \leq \| (R_{i+1} - e^{\varphi_{i+1}}) \prod_{\ell=1}^{i} R_\ell \| + \| e^{\varphi_{i+1}} \left(\prod_{\ell=1}^{i} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i} e^{\varphi_\ell} \right) \|$.

$$\leq \| R_{i+1} - e^{\varphi_{i+1}} \| \, \| \prod_{\ell=1}^{i} R_\ell \| + \underbrace{\| e^{\varphi_{i+1}} \|}_{\leq 1} \, \underbrace{\| \prod_{\ell=1}^{i} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i} e^{\varphi_\ell} \|}_{\leq \sum_{\ell=1}^{i} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \|}$$. Alors

$\| \prod_{\ell=1}^{i+1} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i+1} e^{\varphi_\ell} \| \leq \| R_{i+1} - e^{\varphi_{i+1}} \| \underbrace{\prod_{\ell=1}^{i} \| R_\ell \|}_{=1} + \sum_{\ell=1}^{i} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \|$.

Ainsi $\| \prod_{\ell=1}^{i+1} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i+1} e^{\varphi_\ell} \| \leq \| R_{i+1} - e^{\varphi_i} \| + \sum_{\ell=1}^{i} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \| = \sum_{\ell=1}^{i+1} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \|$.

Ceci achève la récurrence. $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\| \prod_{\ell=1}^{i} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{i} e^{\varphi_\ell} \| \leq \sum_{\ell=1}^{i} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \|$

En particulier $\| \prod_{\ell=1}^{m} R_\ell - \prod_{\ell=1}^{m} e^{\varphi_\ell} \| \leq \sum_{\ell=1}^{m} \| R_\ell - e^{\varphi_\ell} \|$.

Q4) a) Soit $i \in [\![1,m]\!]$. Montrons le fait que :

$$\|e^{\varphi_i}-R_i\| = |e^{-\rho_i}-1+\rho_i| + \rho_i|e^{-\rho_i}-1| + e^{-\rho_i}\sum_{\ell=2}^{n-1}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!}.$$

$$e^{\varphi_i}-R_i = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^j}{j!}N^j - (1-\rho_i)I - \rho_i N$$

$$e^{\varphi_i}-R_i = \sum_{j=2}^{n-1} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^j}{j!}N^j + e^{-\rho_i}I + e^{-\rho_i}\rho_i N - (1-\rho_i)I - \rho_i N.$$

$$e^{\varphi_i}-R_i = \sum_{j=2}^{n-1} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^j}{j!}N^j + (e^{-\rho_i}-1+\rho_i)I + \rho_i(e^{-\rho_i}-1)N.$$

$$e^{\varphi_i}-R_i = (e^{-\rho_i}-1+\rho_i)I + \rho_i(e^{-\rho_i}-1)N + \sum_{j=2}^{n-1} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^j}{j!}N^j.$$

<u>A quelques abus près</u> si $\ell \in [\![1,n]\!]$, la $\ell^{ième}$ ligne de $e^{\varphi_i}-R_i$ est

$$\left(0\ 0 \cdots 0\ \underbrace{e^{-\rho_i}-1+\rho_i}_{\ell^{ième}\text{ élément}}\ \ \rho_i(e^{-\rho_i}-1)\ \ e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^2}{2!}\ \ e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^3}{3!}\ \cdots\ e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^{n-\ell}}{(n-\ell)!}\right)$$

La somme des valeurs absolues de cette $\ell^{ième}$ ligne est alors :

$|e^{-\rho_i}-1+\rho_i| + \rho_i|e^{-\rho_i}-1| + \sum_{\ell=2}^{n-} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!}$. Notons γ_ℓ cette somme.

En fait et sans abus $\gamma_\ell = |e^{-\rho_i}-1+\rho_i| + \rho_i|e^{-\rho_i}-1| + \sum_{k=2}^{n-\ell} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^k}{k!}$ si

$\ell \in [\![1,n-2]\!]$. $\gamma_{n-1} = |e^{-\rho_i}-1+\rho_i| + \rho_i|e^{-\rho_i}-1|$ et $\gamma_n = |e^{-\rho_i}-1+\rho_i|$.

En tout état de cause : $\max\limits_{1\leq \ell\leq n}|\gamma_\ell| = |e^{-\rho_i}-1+\rho_i| + \rho_i|e^{-\rho_i}-1| + \sum_{\ell=2}^{n-1} e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!}$.

Ce qui donne : $\|e^{\varphi_i}-R_i\| = |e^{-\rho_i}-1+\rho_i| + \rho_i|e^{-\rho_i}-1| + e^{-\rho_i}\sum_{\ell=2}^{n-1}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!}$.

---

b) Nous savons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geq 1-x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}-1+x \geq 0$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!],\ e^{-\rho_i}-1+\rho_i \geq 0$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |e^{-\rho_i}-1+\rho_i| = e^{-\rho_i}-1+\rho_i$.

De plus $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\rho_i \geq 0$. Alors $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $e^{-\rho_i}-1 \leq 0$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $|e^{-\rho_i}-1| = 1-e^{-\rho_i}$.

Finalement : $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\|e^{\varphi_i}-R_i\| = e^{-\rho_i}-1+\rho_i+\rho_i(1-e^{-\rho_i})+e^{-\rho_i}\sum_{\ell=2}^{n-1}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!}$.

$\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\|e^{\varphi_i}-R_i\| = e^{-\rho_i}\left(\sum_{\underline{\underline{\ell=0}}}^{n-1}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!}\right) - e^{-\rho_i} - \rho_i e^{-\rho_i} + e^{-\rho_i} - 1 + \rho_i + \rho_i - \rho_i e^{-\rho_i}$

Notons alors que : $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!} \underset{\uparrow \atop \rho_i \geq 0}{\leq} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!} = e^{\rho_i}$ et $e^{-\rho_i} \geq 0$

Alors $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $e^{-\rho_i}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\rho_i^\ell}{\ell!} \leq 1$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\|e^{\varphi_i}-R_i\| \leq 1-e^{-\rho_i}-\rho_i e^{-\rho_i}+e^{-\rho_i}-1+\rho_i+\rho_i-\rho_i e^{-\rho_i}$!!

$\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\|e^{\varphi_i}-R_i\| \leq 2\rho_i(1-e^{-\rho_i})$.

Or $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\rho_i \geq 0$ et $1-e^{-\rho_i} \leq \rho_i$. Finalement :

$\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\|e^{\varphi_i}-R_i\| \leq 2\rho_i^2$ ... ou $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\|\exp(\varphi_i)-R_i\| \leq 2\rho_i^2$

$$\left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m}\exp(\varphi_k)\right\| \leq \sum_{k=1}^{m}\|R_k-\exp(\varphi_k)\| \leq \sum_{k=1}^{m} 2\rho_k^2$$

$$\left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m}\exp(\varphi_k)\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} 2\rho_k^2 .$$

PARTIE III

(Q1) a) Nous allons montrer plus que ce qui est demandé pour pouvoir traiter b)

dans b) il est indispensable d'avoir la totalité de $\prod_{i=1}^{m} R_i$.

Nous allons montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1,m]\!]$:

$$\prod_{i=1}^{k} R_i = \begin{pmatrix} P(S_k=0) & P(S_k=1) & \cdots & P(S_k=n-2) & P(S_k=n-1) \\ 0 & P(S_k=0) & \cdots & P(S_k=n-3) & P(S_k=n-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & P(S_k=0) & P(S_k=1) \\ 0 & \cdots & & 0 & P(S_k=0) \end{pmatrix}$$

C'est beaucoup plus simple à faire si l'on se contente de faire les produits matriciels avec des tableaux. C'est plus technique si l'on utilise les éléments génériques des matrices. C'est ce que nous allons faire.

Etape 1 Formalisation du résultat que nous voulons obtenir.

On pose $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $R_k = (r_{i,j}(k))$ et $T_k = \prod_{i=1}^{k} R_i = (t_{i,j}(k))$.

On pose également $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}(k) = \begin{cases} P(S_k = j-i) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $U_k = (u_{i,j}(k))$.

Le but est de prouver que $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $T_k = U_k$ ... par récurrence.

Notons que $\forall k \in [\![1,m]\!], \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $r_{i,j}(k) = \begin{cases} 1-p_k & \text{si } i=j \\ p_k & \text{si } i+1=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Etape 2. Loi de S_1. $S_1(\Omega) = \{0,1\}$. $P(S_1=0) = 1-p_1$ et $P(S_1=1) = p_1$

Notons que $\forall x \in [\![2,+\infty[\![$, $P(S_1 = x) = 0$

Etape 3 .. Initialisation de la récurrence. Soit à montrer que $T_1 = U_1$ ou que $R_1 = U_1$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrons que $r_{i,j}(1) = u_{i,j}(1)$.

Si $i>j$ c'est clair car $r_{i,j}(1) = 0$ et $u_{i,j}(1) = 0$. Supposons $i \leq j$.

Pour $i=j$ $r_{i,j}(1) = 1-p_1 = P(S_1=0) = P(S_1 = j-i) = u_{i,j}(1)$.

Pour $i+1=j$ $r_{i,j}(1) = p_1 = P(S_1=1) = P(S_1 = j-i) = u_{i,j}(1)$.

Pour $i+1<j$ $r_{i,j}(1) = 0 = P(S_1 = j-i) = u_{i,j}(1)$. Ce qui achève de montrer que $T_1 = R_1 = U_1$.

<u>Etape 4. Lien entre la loi de S_{k+1} et la loi de S_k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.</u>

Soit k un élément de $[\![1, n-1]\!]$. Soit s un élément de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}$!)

$\{S_{k+1} = s\} \subset \{S_k = s\} \cup \{S_k = s-1\}$.

Alors $\{S_{k+1} = s\} = (\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\}) \cup (\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s-1\})$. Les deux événements de cette réunion sont disjoints donc :

$P(S_{k+1} = s) = P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\}) + P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s-1\})$.

Supposons $P(S_k = s) \neq 0$. $P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\}) = P(S_k = s)\, P_{\{S_k = s\}}(S_{k+1} = s)$

Si $\{S_k = s\}$ est réalisé, $\{S_{k+1} = s\}$ se réalise si et seulement si la $(k+1)^{\text{ième}}$ pièce donne Face.

Ainsi $P_{\{S_k = s\}}(S_{k+1} = s) = 1 - p_{k+1}$. Donc $P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\}) = P(S_k = s) \times (1 - p_{k+1})$.

Ce dernier résultat vaut encore si $P(S_k = s) = 0$ car dans ce cas

$P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\}) = 0$ dans la mesure où $\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\} \subset \{S_k = s\}$.

Finalement on a toujours $P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s\}) = (1 - p_{k+1})\, P(S_k = s)$.

On montre de la même manière que $P(\{S_{k+1} = s\} \cap \{S_k = s-1\}) = p_{k+1}\, P(S_k = s-1)$.

Finalement $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \forall s \in \mathbb{N}, P(S_{k+1} = s) = (1 - p_{k+1}) P(S_k = s) + p_{k+1} P(S_k = s-1)$.

<u>Etape 5</u>. <u>Hérédité</u>. Supposons pour k dans $[\![1, n-1]\!]$, $T_k = U_k$ et montrons que $T_{k+1} = U_{k+1}$.

$T_{k+1} = T_k R_{k+1} = U_k R_{k+1}$. U_k et R_{k+1} sont triangulaires supérieures donc T_{k+1} l'est également. Alors T_{k+1} et U_{k+1} sont toutes les deux triangulaires supérieures.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow t_{i,j}(k+1) = 0 = u_{i,j}(k+1)$.

Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \leqslant j$. Montrons que $t_{i,j}(k+1) = u_{i,j}(k+1)$.

<u>1er Cas</u>. $j \geqslant 2$.

$$t_{i,j}(k+1) = \sum_{e=1}^{n} u_{i,e}(k)\, r_{e,j}(k+1) = u_{i,j}(k)\, r_{j,j}(k+1) + u_{i,j-1}(k)\, r_{j-1,j}(k)$$

$$t_{i,j}(k+1) = P(S_k = j-i)(1 - p_{k+1}) + P(S_k = j-1-i)\, p_k \underset{\text{Etape 4}}{=} P(S_{k+1} = j-i) = u_{i,j}(k+1).$$

2ème cas : $j = 1$. Alors $i = 1$ car $i \leq j$.

$$t_{i,j}(\ell+1) = t_{1,1}(\ell+1) = \sum_{\ell=1}^{n} u_{1,\ell}(\ell)\, r_{\ell,1}(\ell+1) = u_{1,1}(\ell)\, r_{1,1}(\ell+1)$$

$$t_{i,j}(\ell+1) = P(S_\ell = 1-1)(1-p_1) = P(S_\ell = 0)(1-p_1) + \underset{\text{car } P(S_\ell = 0-1) = 0}{P(S_\ell = 0-1)\,p_1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{étape 4 avec } s=0}}{=} P(S_{\ell+1} = 0) = u_{1,1}(\ell+1)$$

$t_{i,j}(\ell+1) = u_{1,1}(\ell+1) = u_{i,j}(\ell+1)$.

Ceci achève de montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}(\ell+1) = u_{i,j}(\ell+1)$.

Alors $T_{\ell+1} = U_{\ell+1}$. Ceci termine la récurrence.

Etape 5 : Conclusion. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\prod_{i=1}^{k} R_i = T_k = U_k = (u_{ij}(k))$

avec : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $u_{ij}(k) = \begin{cases} P(S_k = j-i) & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi si $k \in [\![1,n]\!]$ les $k+1$ premiers éléments de la première ligne de $\prod_{i=1}^{k} R_i$ sont $P(S_k = 0), P(S_k = 1), \dots, P(S_k = k)$ et ils "représentent" la loi de S_k

---

b) $\prod_{i=1}^{n} R_i = (t_{i,j}(n)) = (u_{ij}(n))$ donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}(n) = \begin{cases} P(S_k = j-i) & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Intéressons-nous alors à l'élément générique de $\prod_{i=1}^{m} e^{Q_i}$.

$$\prod_{i=1}^{m} e^{Q_i} = e^{\left[-\sum_{\ell=1}^{m} p_\ell\right](I-N)} = e^{-\lambda(I-N)} = e^{-\lambda I + \lambda N} = e^{-\lambda I} e^{\lambda N}.$$

$$\prod_{i=1}^{m} e^{Q_i} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}(-\lambda I)^\ell \times \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}(\lambda N)^\ell = \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}(-\lambda)^\ell\right)}_{e^{-\lambda}} I \times \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} N^\ell.$$

$$\prod_{i=1}^{m} e^{Q_i} = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} N^\ell.$$

Posons $W = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} N^\ell = (w_{ij})$.

Notons encore w l'endomorphisme de matrice W dans $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

$w = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} f^\ell$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $w(e_j) = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \underbrace{f^\ell(e_j)}_{= \begin{cases} e_{j-\ell} \text{ si } j-\ell>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $w(e_j) = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} e_{j-\ell}$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $w(e_j) = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{j} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} e_i$ et $w(e_j) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,j} e_i$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $w_{i,j} = \begin{cases} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons $Z = \prod_{i=1}^{m} R_i - \prod_{i=1}^{m} e^{Q_i} = (z_{i,j})$

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $z_{i,j} = t_{i,j}(n) - w_{i,j} = \begin{cases} P(S_m = j-i) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |z_{i,j}| = \sum_{j=i}^{n} \left| P(S_m = j-i) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} \right|$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |z_{i,j}| = \sum_{\ell=0}^{n-i} \left| P(S_m = \ell) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right|$.

La suite $\left(\sum_{j=1}^{n} |z_{i,j}| \right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est clairement décroissante donc

$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |z_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |z_{1,j}| = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| P(S_m = \ell) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right|$.

Alors $\|Z\| = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| P(S_m = \ell) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right|$.

Donc $\left\| \prod_{i=1}^{m} R_i - \prod_{i=1}^{m} e^{Q_i} \right\| = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left| P(S_m = \ell) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right|$.

c) D'après II Q4 b) $\|\prod_{i=1}^{m} P_i - \prod_{i=1}^{m} e\,\varphi_i\| \leq 2\sum_{\ell=1}^{m} p_\ell^2 = 2\sum_{i=1}^{m} p_i^2$

Ainsi $\sum_{\ell=0}^{n-1} |P(S_m=\ell) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}| \leq 2\sum_{i=1}^{m} p_i^2$ et ceci pour tout n tel que $n > m$.

$\forall k \in [\![m+1, +\infty [\![$, $|P(S_m=k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}| = |-e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}| = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Ainsi la série de terme général $|P(S_m=\ell) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}|$ converge. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus il vient :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} |P(S_m=\ell) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}| \leq 2\sum_{i=1}^{m} p_i^2.$$

(Q2) RAS ! On lance successivement les m pièces et on compte le nombre de Pile.

```
Function Sm(prob: tab): integer;
Var k,compte: integer;
begin
compte:=0;
For k:=1 to m do
If random < tab[k] then compte:=compte+1;
Sm:=compte;
end;
```