

Partie I Le plus petit des plus grands et les plus grands des plus petits.

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{Q1} \quad u(A) &= \min \{ \max \{-2, 3\}, \max \{1, -1\} \} = \min \{ 3, 1 \} = 1. \\ v(A) &= \max \{ \min \{-2, 1\}, \min \{3, -1\} \} = \max \{-2, -1\} = -1. \\ u(A) &= 1 \text{ et } v(A) = -1. \end{aligned} \right\} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} u(A) &= \min \{ \max \{-1, 6, -2\}, \max \{0, 1, 0\}, \max \{-1, 3, -1\} \}. \\ u(A) &= \min \{ 6, 1, 3 \} = 1. \\ v(A) &= \max \{ \min \{-1, 0, -1\}, \min \{6, 1, 3\}, \min \{-2, 0, -1\} \}. \\ v(A) &= \max \{-2, 1, -1\} = 1. \\ u(A) &= v(A) = 1. \end{aligned} \right\} A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{Q2} \quad \text{q) } j_0 \in \mathbb{I}_{1,p} \text{ et } i_0 \in \mathbb{I}_{1,n}.$$

$$\Delta_{j_0} = \min_i a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq \max_j a_{i_0 j} = \epsilon_{i_0}.$$

$$\underline{v_{j_0} \in \mathbb{I}_{1,p}, \forall i_0 \in \mathbb{I}_{1,n}, \Delta_{j_0} \leq \epsilon_{i_0}.$$

$$\text{b) } v(A) = \max_j \min_i a_{ij} \text{ donc } \exists j_0 \in \mathbb{I}_{1,p}, v(A) = \min_i a_{ij_0} = \Delta_{j_0}.$$

$$u(A) = \min_i \max_j a_{ij} \text{ donc } \exists i_0 \in \mathbb{I}_{1,n}, u(A) = \max_j a_{i_0 j} = \epsilon_{i_0}.$$

$$\text{Ainsi } v(A) = \Delta_{j_0} \leq \epsilon_{i_0} \leq u(A). \quad \underline{v(A) \leq u(A)}.$$

$\textcircled{Q3}$ Voici un programme complet. Il donne $u(A)$ et $v(A)$ à partir de A .
 Il est une procédure Entre Matrice qui prend la matrice de A .
 J'ai également ajouté dans la déclaration des fonctions demandées les dimensions de la matrice.

```
Program hec2002M1;
```

```
uses crt;
```

```
const MaxLigne=10;MaxCol=10;
```

```
type matrice = array[1..Maxligne,1..MaxCol] of real;
```

```
var n,p:integer; A:matrice;
```

```
procedure EntreMatrice(n,p:integer;var A:matrice);
```

```
var i,j:integer;
```

```
begin
```

```
for i:=1 to n do
```

```
begin
```

```
for j:=1 to p do
```

```
begin
```

```
write('Donner le coeff. de la ligne ',i,' et de la colonne ',j,' ');
```

```
readln(A[i,j]);
```

```
end;
```

```
writeln;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
function Max_ligne(p,i:integer;A:matrice):real;
```

```
var j:integer;m:real;
```

```
begin
```

```
m:=A[i,1];
```

```
for j:=2 to p do if m<A[i,j] then m:=A[i,j];
```

```
Max_ligne:=m;
```

```
end;
```

```
function MinMax(n,p:integer;A:matrice):real;
```

```
var i:integer;s,u:real;
```

```
begin
```

```
s:=Max_ligne(p,1,A);
```

```
for i:=2 to n do
```

```
begin
```

```
u:=Max_ligne(p,i,A);
```

```
if u<s then s:=u;
```

```
end;
```

```
MinMax:=s;
```

```
end;
```

```
function Min_col(n,j:integer;A:matrice):real;
```

```
var i:integer;m:real;
```

```
begin
```

```
m:=A[1,j];
```

```
for i:=2 to n do if m>A[i,j] then m:=A[i,j];
```

```
Min_col:=m;
```

```
end;
```

```
function MaxMin(n,p:integer;A:matrice):real;
```

```
var j:integer;s,u:real;
```

```
begin
```

```
s:=Min_col(n,1,A);
```

```
for j:=2 to p do
```

```
begin
```

```
u:=Min_col(n,j,A);
```

```
if u>s then s:=u;
```

```
end;
```

```
MaxMin:=s;
```

```
end;
```

```
begin
```

```
Write('Donner n. n=');readln(n);
```

```
Write('Donner p. p=');readln(p);
```

```
EntreeMatrice(n,p,A);
```

```
writeln('MinMax=',MinMax(n,p,A), '      MaxMin=',MaxMin(n,p,A))
```

```
end.
```

```
Donner n. n=2
```

```
Donner p. p=2
```

```
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 1 -2
```

```
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 2 3
```

```
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 1 1
```

```
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 2 -1
```

```
MinMax= 1.0000000000E+00      MaxMin=-1.0000000000E+00
```

```
Donner n. n=3
```

```
Donner p. p=3
```

```
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 1 -1
```

```
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 2 6
```

```
Donner le coeff. de la ligne 1 et de la colonne 3 -2
```

```
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 1 0
```

```
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 2 1
```

```
Donner le coeff. de la ligne 2 et de la colonne 3 0
```

```
Donner le coeff. de la ligne 3 et de la colonne 1 -2
```

```
Donner le coeff. de la ligne 3 et de la colonne 2 3
```

```
Donner le coeff. de la ligne 3 et de la colonne 3 -1
```

```
MinMax= 1.0000000000E+00      MaxMin= 1.0000000000E+00
```

Partie II Le minimum des maxima et le maximum des minima.

Q1) Il doit $(u, y) \in [0, 1]^2$. $h(u, y) = f_{XAY} = (x \ 1-x) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = (x \ 1-x) \begin{pmatrix} -5y+3 \\ 2y-1 \end{pmatrix}$.

$h(u, y) = x(-5y+3) + (1-x)(2y-1) = -7xy + 4x + 2y - 1$.

$\forall (u, y) \in [0, 1]^2$, $h(u, y) = -7xy + 4x + 2y - 1$.

b) Il doit $x \in [0, 1]$. Pour $\forall y \in [0, 1]$, $\varphi_x(y) = h(u, y)$.

$\forall y \in [0, 1]$, $\varphi_x(y) = (2-7x)y + 4x - 1$.

φ_x est une fonction affine sur $[0, 1]$, strictement croissante si $2-7x > 0$, strictement décroissante si $2-7x < 0$ et constante si $2-7x = 0$.

Ainsi $\lambda(x) = \max_{y \in [0, 1]} \varphi_x(y) = \begin{cases} \varphi_x(1) \text{ si } 2-7x > 0 & (\text{ou } x < 2/7) \\ \varphi_x(0) \text{ si } 2-7x < 0 & (\text{ou } x > 2/7) \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) \text{ si } 2-7x = 0 & (\text{ou } x = 2/7) \end{cases}$

$\varphi_x(1) = 1-3x$ et $\varphi_x(0) = 4x-1$. Si $2-7x = 0$ $\varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 1-3x = 4x-1 = \frac{1}{7}$.

Alors $\forall x \in [0, 1]$, $\lambda(x) = \max_{y \in [0, 1]} h(u, y) = \begin{cases} 1-3x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{7}] \\ 4x-1 & \text{si } x \in [\frac{2}{7}, 1] \\ \frac{1}{7} & \text{si } x = \frac{2}{7} \end{cases}$

Remarque... Observons que $\forall x \in [0, \frac{2}{7}]$, $\lambda(x) = 1-3x$ et

$\forall x \in [\frac{2}{7}, 1]$, $\lambda(x) = 4x-1$.

c) $\forall x \in [0, 2/7]$, $\lambda(x) = 1-3x$ et $\forall x \in [2/7, 1]$, $\lambda(x) = 4x-1$.

λ est une fonction affine et strictement décroissante sur $[0, 2/7]$.

croissante sur $[2/7, 1]$.

Alors $\forall x \in [0, \frac{2}{7}]$, $\lambda(x) > \lambda(2/7) = \frac{1}{7}$ et $\forall x \in [\frac{2}{7}, 1]$, $\lambda(x) > \lambda(2/7) = \frac{1}{7}$.

Alors $\forall x \in [0, 1] - \{1/7\}$, $\lambda(x) > \lambda(1/7)$.

Ainsi λ possède un minimum sur $[0, 1]$, qui vaut $\frac{1}{7}$ et qui est atteint uniquement en $1/7$.

$$\min_{x \in [0, 1]} \lambda(x) = \frac{1}{7} \quad \alpha(A) = \min_{x \in K_L} \left(\max_{y \in K_L} (x, y) \right) = \frac{1}{7} \quad \text{Remarque : } \forall y \in [0, 1], h\left(\frac{1}{7}, y\right) = \frac{1}{7}$$

d) Soit $y \in [0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, $\psi_y(x) = h(x, y) = (4+y)x + 2y - 1$.

ψ_y est affine sur $[0, 1]$, strictement croissante si $4+y > 0$, strictement décroissante si $4+y < 0$ et constante si $4+y = 0$.

Dans tous les cas ψ_y possède un minimum sur $[0, 1]$. Posons $f(y) = \min_{x \in [0, 1]} \psi_y(x)$.

$$f(y) = \begin{cases} \psi_y(0) & \text{si } 4+y > 0 \text{ (ou } y < -4) \\ \psi_y(1) & \text{si } 4+y < 0 \text{ (ou } y > -4) \\ \psi_y(0) = \psi_y(1) & \text{si } 4+y = 0 \text{ (ou } y = -4) \end{cases}$$

$$\psi_y(0) = 2y - 1, \quad \psi_y(1) = 3 - 5y. \quad \text{Si } y = \frac{1}{7}, \quad \psi_y(0) = \psi_y(1) = 2y - 1 = 3 - 5y = \frac{1}{7}.$$

$$\forall y \in [0, 1], f(y) = \min_{x \in [0, 1]} h(x, y) = \begin{cases} 2y - 1 & \text{si } y \in [0, \frac{1}{7}[\\ 3 - 5y & \text{si } y \in]\frac{1}{7}, 1] \\ \frac{1}{7} & \text{si } y = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Noter que $\forall y \in [0, \frac{1}{7}]$, $f(y) = 2y - 1$ et $\forall y \in [\frac{1}{7}, 1]$, $f(y) = 3 - 5y$.

f est affine et strictement croissante sur $[0, \frac{1}{7}]$; $\forall y \in [0, \frac{1}{7}[$, $f(y) < f(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7}$.

f est affine et strictement décroissante sur $[\frac{1}{7}, 1]$; $\forall y \in]\frac{1}{7}, 1]$, $f(y) < f(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7}$.

Alors $\forall y \in [0, 1] - \{1/7\}$, $f(y) < f(1/7) = \frac{1}{7}$.

f possède un maximum sur $[0, 1]$ qui vaut $1/7$ et qui est atteint uniquement en $\frac{1}{7}$.

Ainsi $\max_{y \in [0, 1]} \left(\min_{x \in [0, 1]} h(x, y) \right)$ existe et vaut $1/7$. Remarque : $\forall x \in [0, 1]$,

$$h\left(x, \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}.$$

Finalement $\rho(A) = \max_{Y \in K_L, X \in K_L} (\max_{Y \in K_L, X \in K_L} \langle Y, X \rangle)$ existe et vaut $1/2$.

Q2) q) lemme $\left| \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \text{ et} \\ \min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|). \end{array} \right|$

soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$a-b \geq 0$

Si $a \leq b$: $\max\{a, b\} = b$ et $|a-b| = b-a$ d'où $\max\{a, b\} = b = \frac{1}{2}(a+b+b-a) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

$a-b \leq 0$

Si $a \geq b$: $\max\{a, b\} = a$ et $|a-b| = a-b$ d'où $\max\{a, b\} = a = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

d'après ce qui précède

$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$;
 $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$! Ceci achève la démonstration du lemme.

Alors $\forall x \in K_n, h(x) = \max(g_1(x), g_2(x)) = \max\{g_1(x), g_2(x)\} = \frac{1}{2}[g_1(x) + g_2(x) + |g_1(x) - g_2(x)|]$

$\forall x \in K_n, h(x) = \frac{1}{2}[(g_1 + g_2)(x) + |g_1 - g_2|(x)] = \frac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}(x)$.

$$h = \max(g_1, g_2) = \frac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}.$$

* g_1 et g_2 sont continues sur K_n donc $g_1 - g_2$ est continue sur K_n , $|g_1 - g_2|$ également.

Alors $h = \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$ est continue sur K_n comme combinaison linéaire de trois fonctions continues sur K_n .

h est continue sur K_n .

* Il est clair qu'à partir d'ici, pour être conforme au programme on devait élever $\begin{pmatrix} 1 \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\pi_{n,1}(\mathbb{R})$ avec l'élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, ok ??

b) Lemme
 $\exists i \in \mathbb{N}^* \text{ et } (a_1, \dots, a_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} :$

$$\max(a_1, \dots, a_{l+1}) = \max(\max(a_1, \dots, a_l), a_{l+1}).$$

Pour $t = \max(\max(a_1, \dots, a_l), a_{l+1})$.

$t \geq a_{l+1}$ et $t \geq \max(a_1, \dots, a_l)$ donc $\forall i \in [1, l+1]$, $t \geq a_i$.

$\exists i_0 \in [1, l]$, $a_{i_0} = \max(a_1, \dots, a_l)$.

$t = a_{i_0}$ ou $t = a_{l+1}$, donc $\exists i_1 \in [1, l+1]$, $t = a_{i_1}$.

$t = a_{i_1}$ et $\forall i \in [1, l+1]$, $t \geq a_i$ donc $t = \max(a_1, \dots, a_{l+1})$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

On a n est un élément de $[1, p-1]$:

$$\forall x \in K_n, (\max(q_1, \dots, q_{l+1}))(x) = \max(q_1(x), \dots, q_{l+1}(x)) = \max(\max(q_1(x), \dots, q_l(x)), q_{l+1}(x))$$

$$\forall x \in K_n, (\max(q_1, \dots, q_{l+1}))(x) = \max((\max(q_1, \dots, q_l))(x), q_{l+1}(x))$$

$$\forall x \in K_n, (\max(q_1, \dots, q_{l+1}))(x) = (\max(\max(q_1, \dots, q_l), q_{l+1}))(x).$$

$$\text{Donc } \forall l \in [1, p-1], \max(q_1, \dots, q_{l+1}) = \max(\max(q_1, \dots, q_l), q_{l+1}).$$

Il nous reste maintenant à prouver que, pour tout k dans $[1, p]$, $\max(q_1, \dots, q_k)$ est continue sur K_n .

→ C'est vrai pour $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $[1, p-1]$ et montrons la pour $k+1$.

$\max(q_1, \dots, q_k)$ est continue sur K_n ainsi que q_{k+1} .

D'après le lemme $\max(\max(q_1, \dots, q_k), q_{k+1})$ est continue sur K_n .

D'après la conclusion précédente $\max(\max(q_1, \dots, q_k), q_{k+1}) = \max(q_1, \dots, q_{k+1})$.

Ainsi $\max(q_1, \dots, q_{k+1})$ est continue sur K_n et la récurrence s'achève.

La propriété est en particulier vraie pour $k = p$.

Alors $g = \max(g_1, \dots, g_p)$ est continue sur K_n .

Q3) a) Soit $\gamma = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ un élément de K_p .

$$f(x, \gamma) = {}^t X A \gamma = \sum_{i=1}^n \left(x_i \times \sum_{j=1}^p a_{ij} y_j \right) \dots \text{en ayant posé } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$f(x, \gamma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^p \left(y_j \times \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right)$$

$$f(x, \gamma) = \sum_{j=1}^p y_j \varphi_j(x).$$

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, y_j \geq 0 \text{ et } \varphi_j(x) \leq \lambda(x).$$

$$\text{donc } y_j \varphi_j(x) \leq y_j \lambda(x).$$

$$\text{Alors } f(x, \gamma) = \sum_{j=1}^p y_j \varphi_j(x) \leq \sum_{j=1}^p y_j \lambda(x) = \lambda(x) \sum_{j=1}^p y_j \stackrel{\gamma \in K_p}{=} \lambda(x).$$

$$\text{Ainsi } \forall \gamma \in K_p, f(x, \gamma) \leq \lambda(x).$$

$$b) \lambda(x) = \max_{j \in \{1, \dots, p\}} \varphi_j(x). \text{ Alors } \exists j_0 \in \{1, \dots, p\}, \lambda(x) = \varphi_{j_0}(x).$$

Notons $\gamma_x (!!) \text{ le } j_0^{\text{ème}} \text{ élément de la base canonique de } \Pi_{p,2}(\mathbb{R}).$

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \{1, \dots, p\}, t_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j_0 \\ 1 & \text{si } i = j_0 \end{cases}.$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p t_i = 1 \text{ donc } \gamma_x \in K_p.$$

$$\text{de plus } f(x, \gamma_x) = {}^t X A \gamma_x = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^p a_{ij} t_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij_0} = \varphi_{j_0}(x) = \lambda(x).$$

$$\text{donc } \gamma_x \in K_p \text{ et } f(x, \gamma_x) = \lambda(x).$$

$$\exists \gamma_x \in K_p, f(x, \gamma_x) = \lambda(x).$$

$$\leq \forall \gamma \in K_p, f(x, \gamma) \leq \lambda(x) \text{ et } \exists \gamma_x \in K_p, f(x, \gamma_x) = \lambda(x)$$

$$\text{donc } \forall \gamma \in K_p, f(x, \gamma) \leq f(x, \gamma_x) = \lambda(x) \text{ avec } \gamma_x \in K_p.$$

$$\text{Alors } \lambda(x) = \max_{\gamma \in K_p} f(x, \gamma).$$

$$\textcircled{Q4} \text{ a) doit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ un élément de } K_n.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

$$\text{Alors } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq x_i \leq \sum_{k=1}^n x_k = 1; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^2 \leq 1.$$

$$\text{Ainsi } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n}.$$

$$\forall x \in K_n, \|x\| \leq \sqrt{n}. \quad K_n \text{ est borné.}$$

$$\text{b) Avec ce que l'on admet } K_n \text{ est un fermé borné de } \Pi_{n,1}(\mathbb{R}).$$

$$\triangle \text{ Il est clair que plus que jamais on définit } \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathbb{R}^n \dots$$

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n, p_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

$$\text{Ainsi pour tout } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, p_j \text{ est la restriction à } K_n \text{ d'une fonction polynomiale.}$$

$$\text{Par conséquent, pour tout } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, p_j \text{ est continue sur } K_n.$$

$$\text{Alors } \lambda = \max(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) \text{ est continue sur } K_n \text{ qui est un fermé borné.}$$

$$\text{donc } \lambda \text{ possède un minimum sur } K_n. \quad \lambda(A) = \min_{x \in K_n} \max_{\gamma \in K_p} f(x, \gamma) \text{ existe.}$$

Exercice... prouver que $\beta(A) = \max_{\gamma \in K_p} \min_{x \in K_n} f(x, \gamma)$ existe.

Q5 a) soit $(x', \gamma) \in K_n \times K_p$.

$$\lambda(x') = \max_{z \in K_p} f(x', z) \geq f(x', \gamma) \geq \min_{x \in K_n} f(x, \gamma).$$

$$\forall (x', \gamma) \in K_n \times K_p, \min_{x \in K_n} f(x, \gamma) \leq \lambda(x')$$

b) soit $\gamma \in K_p$. $\forall x' \in K_n$, $\min_{x \in K_n} f(x, \gamma) \leq \lambda(x')$ d'ac

$$\min_{x \in K_n} f(x, \gamma) \leq \min_{x' \in K_n} \lambda(x') = \alpha(A).$$

Ainsi $\forall \gamma \in K_p$, $\min_{x \in K_n} f(x, \gamma) \leq \alpha(A)$ d'ac $\max_{\gamma \in K_p} \min_{x \in K_n} f(x, \gamma) \leq \alpha(A)$

Alors $\beta(A) \leq \alpha(A)$.

Q6 a) Pour $\forall \gamma \in \pi_{p,1}(\mathbb{R})$, $\phi(\gamma) = \|\gamma\|$. prouver que ϕ est continue sur $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$.
 $\forall \gamma_0 \in \pi_{p,1}(\mathbb{R})$, $\forall \gamma \in \pi_{p,1}(\mathbb{R})$, $|\phi(\gamma) - \phi(\gamma_0)| = |\|\gamma\| - \|\gamma_0\|| \leq \|\gamma - \gamma_0\|$.

Or $\forall \gamma_0 \in \pi_{p,1}(\mathbb{R})$, $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} \|\gamma - \gamma_0\| = 0$ d'ac par encadrement : $\forall \gamma_0 \in \pi_{p,1}(\mathbb{R})$, $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} \phi(\gamma) = \phi(\gamma_0)$.

Ainsi ϕ est continue à tout point de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$.

Comme B est un fermé borné de $\pi_{p,1}(\mathbb{R})$, ϕ possède un minimum sur B .

Alors $\exists w \in B$, $\forall \gamma \in B$, $\phi(w) \leq \phi(\gamma)$.

Ainsi $\exists w \in B$, $\forall \gamma \in B$, $\|w\| \leq \|\gamma\|$.

b) soit $m \in]0, 1[$. $w \in B$, $\gamma \in B$, $m \in]0, 1[$ et B est convexe d'ac

$$\gamma_m = (1-m)w + m\gamma \in B.$$

$$\text{Alors } \|w\|^2 \leq \|\gamma_m\|^2 = (1-m)^2 \|w\|^2 + 2(1-m)m \langle w, \gamma \rangle + m^2 \|\gamma\|^2.$$

Pour conclure: $2(1-m)m \langle w, \gamma \rangle \geq (1-(1-m)^2) \|w\|^2 - m^2 \|\gamma\|^2$.

$2(1-m)m \langle w, \gamma \rangle \geq (1+(1-m)(1-1+m)) \|w\|^2 - m^2 \|\gamma\|^2 = m [(1-m) \|w\|^2 - m \|\gamma\|^2]$.

Or $m \in]0, 1[$ donc $2(1-m)m > 0$.

Réciproquement: $\langle w, \gamma \rangle \geq \frac{m}{2(1-m)} [(1-m) \|w\|^2 - m \|\gamma\|^2] = \frac{1-m}{2(1-m)} \|w\|^2 - \frac{m}{2(1-m)} \|\gamma\|^2$.

$\forall \gamma \in \mathcal{C}, \forall m \in]0, 1[, \langle w, \gamma \rangle \geq \frac{1-m}{2(1-m)} \|w\|^2 - \frac{m}{2(1-m)} \|\gamma\|^2$.

• Yet toujours un élément de $\mathcal{B}$.

$\forall m \in]0, 1[, \langle w, \gamma \rangle \geq \frac{1-m}{2(1-m)} \|w\|^2 - \frac{m}{2(1-m)} \|\gamma\|^2$.

En faisant tendre m vers 0 (pour valeurs supérieures) on obtient: $\langle w, \gamma \rangle \geq \|w\|^2$.

car $\lim_{m \rightarrow 0^+} \frac{1-m}{2(1-m)} = 1$ et $\lim_{m \rightarrow 0^+} \frac{m}{2(1-m)} = 0$.

$\forall \gamma \in \mathcal{B}, \|w\|^2 \leq \langle w, \gamma \rangle$.

(Q7) a) soit m un élément de $[0, 1]$ et soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans l'ensemble de K_n .

Posez $T = mx + (1-m)x'$. $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_i = mx_i + (1-m)x'_i$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0$ et $x'_i \geq 0$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_i = mx_i + (1-m)x'_i \geq 0$ car m et $(1-m)$ sont positifs.

De plus $\sum_{i=1}^n t_i = m \sum_{i=1}^n x_i + (1-m) \sum_{i=1}^n x'_i = m + (1-m) = 1$.

Ceci achève de prouver que $T = mx + (1-m)x'$ appartient à K_n .

$\forall m \in [0, 1], \forall x \in K_n, \forall x' \in K_n, mx + (1-m)x' \in K_n$. K_n est convexe.

b) $\mathcal{B}$ est évidemment une partie de E_p .

→ prouver que $\mathcal{B}$ est convexe.

Soit $\lambda \in [0, 1]$ et soit $(U, U') \in \mathcal{B}^2$. Prouver que $\lambda U + (1-\lambda)U' \in \mathcal{B}$.

$$\exists (m, x, \gamma) \in [0, 1] \times K_n \times K_p, \quad U = mAx + (1-m)\gamma.$$

$$\exists (m', x', \gamma') \in [0, 1] \times K_n \times K_p, \quad U' = m'Ax' + (1-m')\gamma'.$$

$$\text{Ainsi } \lambda U + (1-\lambda)U' = \lambda(A[mx + (1-m)m']x') + \lambda(1-m)\gamma + (1-\lambda)(1-m')\gamma'.$$

$$\text{Posons } \sigma = \lambda m + (1-\lambda)m'. \text{ Alors } \lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m') = \lambda - \lambda m + (1-m') - \lambda + \lambda m' = 1 - \sigma.$$

$$\lambda \in [0, 1], m \in [0, 1], m' \in [0, 1] \text{ d'où } \lambda \geq 0, 1-\lambda \geq 0, m \geq 0, m' \geq 0.$$

$$\text{Alors } \sigma \geq 0. \text{ Noter que } \sigma = 0 \Leftrightarrow \lambda m = (1-\lambda)m' = 0.$$

$$\text{On a également } 1-\sigma = \lambda(1-m) + (1-\lambda)(1-m') \geq 0 \text{ car } \lambda \geq 0, 1-\lambda \geq 0, 1-m \geq 0, 1-m' \geq 0.$$

$$\text{Noter également que } \sigma = 1 \Leftrightarrow 1-\sigma = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-m) = (1-\lambda)(1-m') = 0.$$

$$\text{Ainsi } \sigma \in [0, 1], \sigma = 0 \Leftrightarrow \lambda m = (1-\lambda)m' = 0 \text{ et } \sigma = 1 \Leftrightarrow \lambda(1-m) = (1-\lambda)(1-m') = 0.$$

Envisageons alors trois cas.

1^{er} cas... $\sigma \in]0, 1[$.

$$\text{Alors } \lambda U + (1-\lambda)U' = \sigma A \left[\frac{\lambda m}{\sigma} x + \frac{(1-\lambda)m'}{\sigma} x' \right] + (1-\sigma) \left[\frac{\lambda(1-m)}{1-\sigma} \gamma + \frac{(1-\lambda)(1-m')}{1-\sigma} \gamma' \right]$$

$$\text{Posons } R = \frac{\lambda m}{\sigma} x + \frac{(1-\lambda)m'}{\sigma} x' \text{ et } S = \frac{\lambda(1-m)}{1-\sigma} \gamma + \frac{(1-\lambda)(1-m')}{1-\sigma} \gamma'$$

comme $\sigma \in [0, 1]$, pour montrer que $\lambda U + (1-\lambda)U' (= \sigma AR + (1-\sigma)S)$ appartient à $\mathcal{B}$ il suffit de prouver que $R \in K_n$ et $S \in K_p$.

On va montrer maintenant que K_n est convexe... pour n'importe quel $\alpha \in \mathbb{R}^n$ dans K_n et aussi convexe !

$$\sigma = \lambda m + (1-\lambda)m' \text{ d'où } R = \frac{\lambda m}{\sigma} x + \left(1 - \frac{\lambda m}{\sigma}\right) x'.$$

$$\lambda \geq 0, m \geq 0, \sigma \geq 0 \text{ d'où } \frac{\lambda m}{\sigma} \geq 0.$$

$$1 - \frac{\lambda m}{\sigma} = \frac{(1-\lambda)m'}{\sigma} \geq 0 \text{ car } 1-\lambda \geq 0, m' \geq 0, \sigma \geq 0; \quad \frac{\lambda m}{\sigma} \leq 1.$$

$$\text{Alors } \frac{\lambda m}{\sigma} \in [0, 1], x \in K_n, x' \in K_n \text{ d'où } R = \frac{\lambda m}{\sigma} x + \left(1 - \frac{\lambda m}{\sigma}\right) x' \in K_n \text{ car } K_n \text{ est convexe.}$$

$$S = \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma} \gamma + \frac{(1-\lambda)(1-\alpha')}{1-\sigma} \gamma' \quad \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1-\alpha') = 1-\sigma$$

$$\text{Ainsi } S = \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma} \gamma + \left(1 - \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma}\right) \gamma'$$

$$\frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma} \geq 0 \text{ car } \lambda \geq 0, 1-\sigma \geq 0, 1-\alpha \geq 0.$$

$$1 - \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma} = \frac{(1-\lambda)(1-\alpha')}{1-\sigma} \geq 0 \text{ car } 1-\lambda \geq 0, 1-\alpha' \geq 0, 1-\sigma \geq 0.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma} \in [0, 1], \gamma \in K_p, \gamma' \in K_p \text{ donc } S = \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma} \gamma + \left(1 - \frac{\lambda(1-\alpha)}{1-\sigma}\right) \gamma'$$

appartient à K_p car K_p est convexe. Ceci achève de montrer que $\lambda U + (1-\lambda)U' \in \mathcal{B}$... dans le cas où $\sigma \in]0, 1[$.

$$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}} \quad \sigma = 0. \text{ Alors } \lambda(1-\alpha) = (1-\lambda)(1-\alpha') = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lambda U + (1-\lambda)U' = \lambda(1-\alpha) \gamma + (1-\lambda)(1-\alpha') \gamma' = \lambda \gamma + (1-\lambda) \gamma'.$$

$\lambda \in [0, 1], \gamma \in K_p, \gamma' \in K_p$ donc $\lambda \gamma + (1-\lambda) \gamma' \in K_p$ car K_p est convexe.

$\lambda U + (1-\lambda)U' = 0 \xrightarrow{\text{au m\u00eame q.cq de } K_u!!} \in A X + (1-0)(\lambda \gamma + (1-\lambda) \gamma')$ avec $0 \in [0, 1] (!!)$, $X \in K_u (!!)$
et $\lambda \gamma + (1-\lambda) \gamma' \in K_p$. Par cons\u00e9quent $\lambda U + (1-\lambda)U' \in \mathcal{B}$.

$$\underline{2^{\text{e}} \text{ cas}} \quad \sigma = 1. \text{ Alors } \lambda(1-\alpha) = (1-\lambda)(1-\alpha') = 0.$$

$$\lambda U + (1-\lambda)U' = \lambda A(\lambda x + (1-\lambda)x') = \lambda A(\lambda x + (1-\lambda)x').$$

$\lambda \in [0, 1], \lambda \in K_u$ et $x' \in K_u$ donc $\lambda x + (1-\lambda)x' \in K_u$ car K_u est convexe.

Alors $\lambda U + (1-\lambda)U' = \lambda \times \lambda A(\lambda x + (1-\lambda)x') + (1-\lambda) \gamma \xleftarrow{\text{au m\u00eame q.cq. de } K_p} \text{ avec}$

$\lambda \in [0, 1], \lambda x + (1-\lambda)x' \in K_u$ et $\gamma \in K_p$. Ainsi $\lambda U + (1-\lambda)U' \in \mathcal{B}$.

$\forall \lambda \in [0, 1], \forall U \in \mathcal{B}, \forall U' \in \mathcal{B}, \lambda U + (1-\lambda)U' \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ est convexe.

→ remarquer que $\mathcal{B}$ est borné. Posons $C = \max_{(i,j) \in \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I} \cup \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3} |a_{ij}|$.

Soit U un élément de $\mathcal{B}$. $\exists (m, \lambda, \gamma) \in [0, 1] \times K_n \times K_p$, $U = m \epsilon_A \lambda + (1-m) \gamma$.

$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}$. Alors $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I} \cup \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3$, $u_i = m \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j + (1-m) \gamma_i$
soit $i \in \mathbb{I}_3, \mathbb{I}_3$.

$$|u_i| \leq |m| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |\lambda_j| + |1-m| |\gamma_i| = m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \lambda_j + (1-m) \gamma_i$$

$m \in [0, 1], \lambda \in K_n, \gamma \in K_p$

$$|u_i| \leq m \sum_{j=1}^n C \lambda_j + (1-m) \lambda_j = m C \lambda_j + (1-m) \lambda_j = m C + (1-m).$$

$$\begin{cases} \gamma_i \leq 1, 1-m \geq 0, \\ |a_{ij}| \leq C, m \geq 0, \lambda_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p u_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p (m C + (1-m))^2} = (m C + 1-m) \sqrt{p}.$$

$\forall U \in \mathcal{B}, \|U\| \leq (m C + (1-m)) \sqrt{p}$. $\mathcal{B}$ est borné.

Finalement $\mathcal{B}$ est une partie convexe et bornée de E_p .

Avec ce que l'a admet $\mathcal{B}$ est une partie convexe, fermée et bornée de E_p .

Q8 a) $0_{\pi_{p,1}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}$ donc $\exists (m_0, \lambda_0, \gamma_0) \in [0, 1] \times K_n \times K_p$, $0_{\pi_{p,1}(\mathbb{R})} = m_0 \epsilon_A \lambda_0 + (1-m_0) \gamma_0$

1^{er} cas... $m_0 \neq 0$. Alors $\epsilon_A \lambda_0 = - \frac{1-m_0}{m_0} \gamma_0$. Posons $\mu = - \frac{1-m_0}{m_0}$.

$$\epsilon_A \lambda_0 = \mu \gamma_0 \text{ et } \mu = - \frac{1-m_0}{m_0} \leq 0 \text{ car } m_0 \in]0, 1].$$

2nd cas... $m_0 = 0$. Alors $0_{\pi_{p,1}(\mathbb{R})} = \gamma_0$ donc $0_{\pi_{p,1}(\mathbb{R})} \in K_p$!!

ceci est impossible.

Ainsi $\exists (\mu, \lambda_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times K_n \times K_p$, $\epsilon_A \lambda_0 = \mu \gamma_0$ et $\mu \leq 0$.

$$b) \forall \gamma \in K_p, {}^t x_0 A \gamma = {}^t ({}^t \gamma {}^t A x_0) = {}^t ({}^t \gamma \gamma_0) = \gamma {}^t \gamma_0 \gamma.$$

$$\text{Soit } \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \text{ un élément de } K_p. \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1^0 \\ \vdots \\ \gamma_p^0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi: } {}^t x_0 A \gamma = \gamma {}^t \gamma_0 \gamma = \gamma \sum_{i=1}^p \gamma_i^0 \gamma_i \leq 0 \text{ car } \gamma \leq 0 \text{ et}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \gamma_i^0 \geq 0 \text{ et } \gamma_i \geq 0.$$

$$\underline{\underline{\forall \gamma \in K_p, {}^t x_0 A \gamma \leq 0.}}$$

$$c) \forall \gamma \in K_p, {}^t x_0 A \gamma \leq 0; \quad \text{Pax } {}^t x_0 A \gamma \leq 0; \quad \lambda(x_0) \leq 0.$$

$$\text{Après } \lambda(A) = \max_{x \in K_n} \lambda(x) \leq \lambda(x_0) \leq 0. \quad \underline{\underline{\lambda(A) \leq 0.}}$$

Q9 a) Soit une partie convexe, bornée et fermée de K , donc, d'après Q6, $\exists w \in B, \forall u \in B, \langle w, u \rangle \geq \|w\|^2$.

$$w \neq 0_{\pi_{p,j}(K)} \text{ car } 0_{\pi_{p,j}(K)} \notin B. \text{ Donc } \|w\|^2 > 0.$$

$$\text{Alors } \forall u \in B, \langle w, u \rangle > 0.$$

$$\text{On: } \forall \mu \in [0, 1], \forall x \in K_n, \forall \gamma \in K_p, \langle \mu {}^t A x + (1-\mu) \gamma, w \rangle > 0.$$

$$\forall \mu \in [0, 1], \forall x \in K_n, \forall \gamma \in K_p, {}^t (\mu {}^t A x + (1-\mu) \gamma) w > 0.$$

$$\forall \mu \in [0, 1], \forall x \in K_n, \forall \gamma \in K_p, (\mu {}^t x A + (1-\mu) {}^t \gamma) w > 0.$$

$$\underline{\underline{\text{Finalement: } \forall \mu \in [0, 1], \forall x \in K_n, \forall \gamma \in K_p, \mu {}^t x A w + (1-\mu) {}^t \gamma w > 0.}}$$

$$b) \text{ En particulier } \forall x \in K_n, \forall \gamma \in K_p, 0 {}^t x A w + (1-0) {}^t \gamma w > 0.$$

$$\text{Alors } \forall \gamma \in K_p, {}^t \gamma w > 0.$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Noter γ_i le $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\pi_{p,j}(K)$.

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \gamma_1^i \\ \vdots \\ \gamma_i^i \\ \vdots \\ \gamma_p^i \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}. \text{ Alors } \gamma_i \in K_p.$$

$$\text{Ani: } \epsilon y_i w > 0. \quad \sum_{j=1}^p y_j^i \omega_j > 0; \quad \omega_i = \sum_{j=1}^p y_j^i \omega_j > 0.$$

$$\text{f\u00fcdenart } \underline{\underline{\forall i \in \{1, p\}, \omega_i > 0.}}$$

$$\subseteq \forall u \in \{0, 1\}, \forall x \in K_n, \forall y \in K_p, u^t x A w + (1-u)^t y w > 0.$$

$$\text{Was } \forall x \in K_n, \forall y \in K_p, 1^t x A w + (1-1)^t y w > 0.$$

$$\text{Also } \underline{\underline{\forall x \in K_n, 1^t x A w > 0.}}$$

$$\text{d) } w = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 1 \\ \omega_p \end{pmatrix} \text{ et } \forall i \in \{1, p\}, \omega_i > 0. \text{ Posons } t = \sum_{i=1}^p \omega_i; \quad t > 0.$$

$$\text{Posons alors } \forall i \in \{1, p\}, \omega'_i = \frac{1}{t} \omega_i \text{ et } w' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ 1 \\ \omega'_p \end{pmatrix}. \quad w' = \frac{1}{t} w.$$

$$\forall x \in K_n, 1^t x A w' = \frac{1}{t} 1^t x A w > 0 \text{ car } \forall x \in K_n, 1^t x A w > 0 \text{ et } 1/t > 0.$$

$$\text{Or pour } \forall i \in \{1, p\}, \omega'_i = \frac{1}{t} \omega_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p \omega'_i = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^p \omega_i = \frac{1}{t} t = 1.$$

$\uparrow$ $\omega_i > 0$
 $\omega_i > 0$

$$\text{Ainsi } w' \in K_p \text{ et } \forall x \in K_n, 1^t x A w' > 0.$$

$$\text{Was } \underline{\underline{\exists w' \in K_p, \forall x \in K_n, 1^t x A w' > 0.}}$$

$$\subseteq \forall x \in K_n, 1^t x A w' > 0. \text{ Ainsi } \min_{x \in K_n} 1^t x A w' > 0.$$

$$\text{Ainsi } \beta(A) = \max_{y \in K_p} \min_{x \in K_n} 1^t x A y \geq \min_{x \in K_n} 1^t x A w' > 0.$$

$$\underline{\underline{\beta(A) > 0.}}$$

$$\textcircled{Q30} \text{ a) } \text{donc } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 1 \\ y_p \end{pmatrix} \in K_p.$$

$$1^t x \theta y = 1^t x (A - \beta(A) J) y = 1^t x A y - \beta(A) 1^t x J y.$$

$$t_{XY} = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^p y_j \right) \underset{Y \in K_p}{\uparrow} = \sum_{i=1}^n x_i \underset{X \in K_n}{\uparrow} = 1 ; \text{ ainsi } \underline{t_{XY} = t_{XAY} - \beta(A)}.$$

$$\text{Alors } \alpha(B) = \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} t_{XY} = \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} (t_{XAY} - \beta(A)) = \min_{X \in K_n} (\max_{Y \in K_p} t_{XAY} - \beta(A))$$

$$\alpha(B) = \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} t_{XAY} - \beta(A) = \alpha(A) - \beta(A); \quad \underline{\alpha(B) = \alpha(A) - \beta(A)}.$$

$$\text{En utilisant maintenant : } \beta(B) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} t_{XY} - \beta(A) = \beta(A) - \beta(A) = 0; \quad \underline{\beta(B) = 0}.$$

b) $\beta(B) = 0$ donc $0_{\pi_{p,1}(E)}$ appartient à

$$\tilde{E} = \{u t_{BX} + (1-u)Y, X \in K_n, Y \in K_p, u \in [0,1]\} \text{ (d'après } \S 9 \text{ e)}).$$

$\S 8$ e) nous indique que $\alpha(B) \leq 0$. Ce qui donne $\alpha(A) - \beta(A) \leq 0$

ou encore $\alpha(A) \leq \beta(A)$. Or $\S 5$ b) nous a donné $\beta(A) \leq \alpha(A)$.

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\alpha(A) = \beta(A)}}.$$

Partie III Point-selle et point critique.

$$\textcircled{QT} \quad \alpha(A) = \beta(A) \text{ donc } \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} f(X,Y) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} f(X,Y)$$

$$\text{Ainsi } \exists \hat{X}_0 \in K_n, \exists \hat{Y}_0 \in K_p, \max_{Y \in K_p} f(\hat{X}_0, Y) = \min_{X \in K_n} \max_{Y \in K_p} f(X, Y) = \max_{Y \in K_p} \min_{X \in K_n} f(X, Y) = \min_{X \in K_n} f(X, \hat{Y}_0)$$

$$\text{Alors } \alpha(A) = \beta(A) = \max_{Y \in K_p} f(\hat{X}_0, Y) = \min_{X \in K_n} f(X, \hat{Y}_0).$$

$$\forall Y \in K_p, \alpha(A) = \beta(A) \geq f(\hat{X}_0, Y) \text{ et } \forall X \in K_n, \alpha(A) = \beta(A) \leq f(X, \hat{Y}_0).$$

$$\forall x \in K_u, \forall y \in K_p, f(\hat{x}_0, y) \leq \alpha(A) = \beta(A) \leq f(x, \hat{y}_0).$$

En particulier $f(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \leq \alpha(A) = \beta(A) = f(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$; $f(\hat{x}_0, \hat{y}_0) = \alpha(A) = \beta(A)$.

Alors $\forall x \in K_u, \forall y \in K_p, f(\hat{x}_0, y) \leq f(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \leq f(x, \hat{y}_0)$, $\hat{x}_0 \in K_u$ et $\hat{y}_0 \in K_p$.

Ainsi f possède un point selle.

Supposons que (x_0, y_0) est un point-selle pour f . Notons que $f(x_0, y_0) = \alpha(A)$.

$x_0 \in K_u, y_0 \in K_p$ et $\forall (x, y) \in K_u \times K_p, f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$

Alors $\max_{y \in K_p} f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$ et $f(x_0, y_0) \leq \min_{x \in K_u} f(x, y_0)$.

Ainsi $\alpha(A) = \min_{x \in K_u} \max_{y \in K_p} f(x, y) \leq \max_{y \in K_p} f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$ et

$$f(x_0, y_0) \leq \min_{x \in K_u} f(x, y_0) \leq \max_{y \in K_p} \min_{x \in K_u} f(x, y_0) = \beta(A) = \alpha(A).$$

Alors $\alpha(A) \leq f(x_0, y_0) \leq \alpha(A)$; $f(x_0, y_0) = \alpha(A)$.

Si (x_0, y_0) est un point-selle pour f alors $f(x_0, y_0) = \alpha(A) = \beta(A)$.

Q2) a) Soit $(u, y) \in \mathbb{R}^2$. $g(x, y) = (x \ 1-x) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$.

$$g(x, y) = (x \ 1-x) \begin{pmatrix} (a-b)y + b \\ (c-d)y + d \end{pmatrix} = (a-b)xy + bx + (c-d)y(1-x) + d(1-x).$$

$$g(x, y) = (a-b-c+d)xy + (b-d)x + (c-d)y + d.$$

g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car g est une fonction polynomiale.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (a-b-c+d)y + b-d$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (a-b-c+d)x + c-d$

Soit $(u, y) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial g}{\partial x}(u, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(u, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b-c+d)y = d-b \\ (a-b-c+d)x = d-c \end{cases} \quad (1)$

Si $a-b-c+d \neq 0$, (1) admet une solution et une seule : $(\frac{d-c}{a-b-c+d}, \frac{d-b}{a-b-c+d})$.

Si $a-b-c+d = 0$, l'ensemble des solutions de (1) est $\mathbb{R}^2$ si $d-b = d-c = 0$ et $\emptyset$ dans le cas contraire.

Alors (1) admet une solution et une seule si $a-b-c+d \neq 0$.

g admet un point critique et un seul si et seulement si $a+d-b-c \neq 0$.

Dans ce cas le point critique de g est $(\frac{d-c}{a+d-b-c}, \frac{d-b}{a+d-b-c})$.

b). $a-b$ et $d-c$ sont de même signe et non nuls d'ac leur somme n'est pas nulle ; $a+d-b-c \neq 0$.

Alors g admet un unique point critique (x_0, y_0) ; $x_0 = \frac{d-c}{a+d-b-c}$ et

$$y_0 = \frac{d-b}{a+d-b-c}.$$

posons $\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ si } a-b \geq 0 \\ -1 \text{ si } a-b < 0 \end{cases}$ et $\varepsilon' = \begin{cases} 1 \text{ si } a-c \geq 0 \\ -1 \text{ si } a-c < 0 \end{cases}$.

Alors $a-b = \varepsilon |a-b|$; $d-c = \varepsilon |d-c|$, $a-c = \varepsilon' |a-c|$ et $d-b = \varepsilon' |d-b|$ car $a-b$ et $d-c$ ont même signe ainsi que $a-c$ et $d-b$.

$$x_0 = \frac{\varepsilon |d-c|}{\varepsilon |a-b| + \varepsilon |d-c|} = \frac{|d-c|}{|a-b| + |d-c|} ; x_0 \geq 0.$$

$$1 - x_0 = \frac{|a-b|}{|a-b| + |d-c|} \geq 0 ; 1 - x_0 \geq 0 ; x_0 \leq 1.$$

Ainsi $x_0 \in [0, 1]$. En remarquant que $y_0 = \frac{|d-b|}{|a-b| + |a-c|}$ on montre de même que $y_0 \in [0, 1]$.

g admet un unique point critique (x_0, y_0) et $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$.

• soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) = (a - b - c + d)(xy - x_0 y_0) + (b - d)(x - x_0) + (c - d)(y - y_0).$$

$$\text{or } b - d = -(a - b - c + d)y_0 \text{ et } c - d = -(a - b - c + d)x_0.$$

$$\text{Alors } g(x, y) - g(x_0, y_0) = (a - b - c + d)(xy - x_0 y_0 - y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0)).$$

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) = (a + d - b - c)(xy - x_0 y_0 - y_0 x + y_0 x_0 - x_0 y + x_0 y_0).$$

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) = (a + d - b - c)(xy - x y_0 - x_0 y + x_0 y_0).$$

$$g(x, y) - g(x_0, y_0) = (a + d - b - c)(x(y - y_0) - x_0(y - y_0)) = (a + d - b - c)(x - x_0)(y - y_0).$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = g(x_0, y_0) + (a + d - b - c)(x - x_0)(y - y_0). \quad (*)$$

• Pour $x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 - x_0 \end{pmatrix}$ et $y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 - y_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in K_L$ et $y_0 \in K_L$ car $x_0 \in [0, 1]$ et

$$y_0 \in [0, 1].$$

soit $(x, y) \in K_L$. $x = \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in [0, 1]^2$.

$$f(x_0, y_0) - f(x_0, y) = g(x_0, y_0) - g(x_0, y) = 0 \text{ d'après } (*).$$

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(x, y_0) - g(x_0, y_0) = 0 \text{ toujours d'après } (*).$$

$$\text{Ainsi } \forall (x, y) \in K_L^2, \quad f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = f(x, y_0).$$

$$\text{Alors } \forall (x, y) \in K_L^2, \quad f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) !!$$

(x_0, y_0) est un point-selle pour f . n'oublions pas que :

$$\forall (x, y) \in K_L^2, \quad f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = f(x, y_0).$$

$$\bullet \quad \Delta(A) = f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) = (a + d - b - c)x_0 y_0 + (b - d)x_0 + (c - d)y_0 + d$$

$$\Delta(A) = (a + d - b - c) \frac{(d - c)(d - b)}{(a + d - b - c)^2} + \frac{(b - d)(d - c)}{a + d - b - c} + \frac{(c - d)(d - b)}{a + d - b - c} + d.$$

$$d(A) = \frac{1}{a+d-b-c} \left(\underbrace{(d-c)(d-b) + (b-d)(d-c) + (c-d)(d-b)}_{=0} + d(a+d-b-c) \right).$$

$$d(A) = \frac{1}{a+d-b-c} \left((c-d)(d-b) + d(a+d-b-c) \right) = \frac{1}{a+d-b-c} (cd - cb - d^2 + db + da + d^2 - db - dc).$$

$$\underline{\underline{d(A) = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}}}$$

Partie IV Application à une étude de la concurrence

Q1) Noter S'_1 (resp. S'_2) l'événement secador choisit S_1 (resp. S_2).
Noter P'_1 (resp. P'_2) l'événement primeur choisit P_1 (resp. P_2).

$$P(S'_1) = y, P(S'_2) = 1-y, P(P'_1) = x, P(P'_2) = 1-x.$$

$$V_{xy}(x) = \{-2, -1, 1, 3\}. \quad \text{Indépendance entre le choix de Primeur et de Secador.}$$

$$P(V_{xy} = -2) = P(P'_1 \cap S'_1) \stackrel{\downarrow}{=} P(P'_1)P(S'_1) = xy.$$

$$P(V_{xy} = -1) = P(P'_2 \cap S'_1) = P(P'_2)P(S'_1) = (1-x)y.$$

$$\text{De même } P(V_{xy} = 1) = (1-x)y \text{ et } P(V_{xy} = 3) = x(1-y).$$

$$\text{Ainsi } E(V_{xy}) = -2xy - (1-x)y + (1-x)y + 3x(1-y).$$

$$E(V_{xy}) = -2xy + 4x + y - 1 = (x \ 1-x) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

Q2) Ici nous pourrions nous appuyer sur II Q1 ou sur III.

utilisons III. En posant $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $a = -2$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = -1$

$$\text{on a } \forall (x, y) \in [0, 1]^2, E(V_{xy}) = g(x, y) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}\right).$$

$$a+d-b-c = -7$$

$$a-b = -5 \text{ et } d-c = -2; \quad a-b \text{ et } d-c \text{ sont de même signe et tous deux négatifs.}$$

$$a-c = -3 \text{ et } d-b = -4; \quad a-c \text{ et } d-b \text{ sont de même signe et tous deux négatifs.}$$

$$\text{Pour } x_0 = \frac{d-c}{a-b} = \frac{2}{-1} \text{ et } y_0 = \frac{d-b}{a-b} = \frac{4}{-1}.$$