PARTIE I Etude de la fonction F

(Q1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{\alpha}{x}+\beta = \frac{\beta}{x}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

f est <u>strictement</u> décroissante sur $]0,\frac{\alpha}{\beta}]$ et <u>strictement</u> croissante sur $[\frac{\alpha}{\beta},+\infty[$.

<u>Ainsi f possède un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vaut $m_f = -\alpha\ln\frac{\alpha}{\beta}+\alpha$ atteint en le seul point $\frac{\alpha}{\beta}$.</u>

<u>De même g possède un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vaut $m_g = -a\ln\frac{a}{b}+a$ atteint en le seul point $\frac{a}{b}$.</u>

(Q2) f_1 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,\frac{\alpha}{\beta}]$ donc f_1 définit une bijection de $]0,\frac{\alpha}{\beta}]$ sur $[f_1(\frac{\alpha}{\beta}), \lim_{x\to 0^+} f_1(x)[= [m_f,+\infty[$

<u>f_1 définit une bijection de $]0,\frac{\alpha}{\beta}]$ sur $[m_f,+\infty[$.</u>

<u>De même f_2 définit une bijection de $[\frac{\alpha}{\beta},+\infty[$ sur $[m_f,+\infty[$, g_1 définit une bijection de $]0,\frac{a}{b}]$ sur $[m_g,+\infty[$ et g_2 définit une bijection de $[\frac{a}{b},+\infty[$ sur $[m_g,+\infty[$.</u>

(Q3) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)\geq m_f$ et $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$, $g(y)\geq m_g$.

$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $F(x,y)=f(x)+g(y)\geq m_f+m_g = f(\frac{\alpha}{\beta})+g(\frac{a}{b}) = F(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$.

$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $F(x,y)\geq F(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})^{=m_f+m_g}$. F présente un minimum qui vaut m_f+m_g atteint (au moins) en $(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$.

Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $F(x,y)=F(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})=m_f+m_g$. Montrons que $(x,y)=(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$.

Si $x\neq\frac{\alpha}{\beta}$, $F(x,y)=f(x)+g(y)>m_f+g(y)\geq m_f+m_g$; et : $F(x,y)>m_f+m_g=F(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$!

Si $x\neq\frac{a}{b}$, $F(x,y)=f(x)+g(y)>f(x)+m_g\geq m_f+m_g$ et : $F(x,y)>m_f+m_g=F(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$!

Ainsi si $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et si $F(x,y)=F(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})=m_f+m_g$ alors : $(x,y)=(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$.

De ce qui précède il résulte que :

1°) F possède un minimum qui vaut m_f+m_g.

2°) ce minimum est atteint en un point et un seul : $(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$.

Partie II. Etude des lignes de niveau de F.

Q1 Rappelons que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ F(x,y)\geqslant m_F$ et
$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ F(x,y)=m_F \Leftrightarrow (x,y)=(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})$.

Ainsi si $c<m_F$: $\Gamma_c=\emptyset$ et si $c=m_F$: $\Gamma_c=\{(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})\}$.

Q2 $c>m_F$. a) $c>m_F=m_f+m_g$; $c-m_g>m_f$; $c-m_g\in]m_f,+\infty[$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $f(x)=c-m_g \Leftrightarrow \begin{cases} x\in]0,\frac{\alpha}{\beta}] \text{ et } f_1(x)=c-m_g \\ \text{ou} \\ x\in[\frac{\alpha}{\beta},+\infty[\text{ et } f_2(x)=c-m_g \end{cases} \underset{\text{I Q2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=f_1^{-1}(c-m_g) \\ \text{ou} \\ x=f_2^{-1}(c-m_g)\end{cases}$

$f(x)=c-m_g \Leftrightarrow x=f_1^{-1}(c-m_g)$ ou $x=f_2^{-1}(c-m_g)$.

Posons $u_c=f_1^{-1}(c-m_g)$ et $v_c=f_2^{-1}(c-m_g)$. $f(x)=c-m_g\Leftrightarrow x=u_c$ ou $x=v_c$.

Notons que $u_c=f_1^{-1}(c-m_g)\in]0,\frac{\alpha}{\beta}]$ et $v_c=f_2^{-1}(c-m_g)\in[\frac{\alpha}{\beta},+\infty[$.

Si $u_c=\frac{\alpha}{\beta}$ alors $c-m_g=f_1(\frac{\alpha}{\beta})=m_f$ et alors $c=m_f+m_g=m_F$.

De même $v_c=\frac{\alpha}{\beta}$ donne $c=m_F$.

Ainsi $u_c\in]0,\frac{\alpha}{\beta}[$ et $v_c\in]\frac{\alpha}{\beta},+\infty[$.

Il existe deux réels strictement positifs u_c et v_c tels que : $\begin{cases} c-m_g=f(u_c)=f(v_c) \\ \text{et} \\ u_c\in]0,\frac{\alpha}{\beta}[,\ v_c\in]\frac{\alpha}{\beta},+\infty[\end{cases}$

Ainsi peut-on dire que :

Il existe deux réels strictement positifs u_c et v_c tels que : $u_c<\frac{\alpha}{\beta}<v_c$ et $m_g=c-f(u_c)=c-f(v_c)$.

D) Montrons par double inclusion que $K_c = [u_c, v_c]$.

→ Soit $x \in K_c$. $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\exists y \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x,y) = c$.

$f(x) = c - g(y)$. Notons que $m_f \leq f(x) = c - g(y) \leq c - m_g$.

$m_f \leq f(x) \leq c - m_g = f(u_c) = f(v_c) = f_1(u_c) = f_2(v_c)$. $m_f \leq f(x) \leq f_1(u_c) = f_2(v_c)$.

1er cas.. $x \in]0, \frac{\alpha}{\beta}]$. Alors $m_f = \underline{f_1}(\frac{\alpha}{\beta}) \leq f(x) = \underline{f_1}(x) \leq \underline{f_1}(u_c)$.

La décroissance de f_1 donne : $u_c \leq x \leq \frac{\alpha}{\beta}$; $x \in [u_c, v_c]$

2e cas.. $x \in]\frac{\alpha}{\beta}, +\infty[$. Alors $m_f = \underline{f_2}(\frac{\alpha}{\beta}) \leq f(x) = \underline{f_2}(x) \leq \underline{f_2}(v_c)$

La croissance de f_2 donne $\frac{\alpha}{\beta} \leq x \leq v_c$. $x \in [u_c, v_c]$.

Finalement $K_c \subset [u_c, v_c]$.

→ Réciproquement soit $x \in [u_c, v_c]$. Montrons que $x \in K_c$.

1er cas.. $x \in [u_c, \frac{\alpha}{\beta}]$.

f étant décroissante sur $]0, \frac{\alpha}{\beta}]$, $f(u_c) \geq f(x) \geq f(\frac{\alpha}{\beta})$.

Alors $c - m_g \geq f(x) \geq m_f$; $c - f(x) \geq m_g$; $c - f(x) \in [m_g, +\infty[$.

Ainsi $\exists y \in]0, \frac{a}{b}]$, $g_1(y) = c - f(x)$ car g_1 définit une bijection de $]0, \frac{a}{b}]$ sur $[m_g, +\infty[$.

Alors $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) + g(y) = f(x) + g_1(y) = c$. Ce qui permet d'affirmer que x appartient à K_c

2e cas.. $x \in]\frac{\alpha}{\beta}, v_c]$. Alors $f(\frac{\alpha}{\beta}) \leq f(x) \leq f(v_c)$; $m_f \leq f(x) \leq c - m_g$.

$c - f(x) \in [m_g, +\infty[$. On termine alors comme dans le cas précédent,

$\exists!\, y \in]0, \frac{a}{b}]$, $g_1(y) = c - f(x)$. $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) + g(y) = c$. $x \in K_c$.

Finalement $\underline{\underline{K_c = [u_c, v_c]}}$.

c) • Soit $x \in]u_c, v_c[$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

$F(x,y) = c \Leftrightarrow f(x) + g(y) = c \Leftrightarrow g(y) = c - f(x)$.

ou $x \in]u_c, \frac{\alpha}{\beta}]$ et $f(x) \in [f(\frac{\alpha}{\beta}), f(u_c)[= [m_f, c - m_g$

ou $x \in]\frac{\alpha}{\beta}, v_c[$ et $f(x) \in]f(\frac{\alpha}{\beta}), f(v_c)[=]m_f, c - m_g[$.

dans les deux cas $f(x) < c - m_g$ donc $c - f(x) \in]m_g, +\infty[$.

Reprenons dans l'équation initiale.

$$F(x,y) = c \Leftrightarrow g(y) = c - f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]0, \frac{a}{b}] & \text{et } y = g_1(c - f(x)) \\ \text{ou} & \\ y \in [\frac{a}{b}, +\infty[& \text{et } y = g_2(c - f(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g_1^{-1}(c - f(x)) \\ \text{ou} \\ y = g_2^{-1}(c - f(x)) \end{cases}$$

Notons que $c - f(x)$ est strictement supérieur à $m_g = g_1^{-1}(\frac{a}{b}) = g_2^{-1}(\frac{a}{b})$ donc

$g_1^{-1}(c - f(x)) \in]0, \frac{a}{b}[$ et $g_2^{-1}(c - f(x)) \in]\frac{a}{b}, +\infty[$ et ainsi $g_1^{-1}(c - f(x)) \neq g_2^{-1}(c - f(x))$.

<u>Si $x \in]u_c, v_c[$ il existe exactement deux réels strictement positifs y tels que</u>
<u>$F(x,y) = c$: $g_1^{-1}(c - f(x))$ et $g_2^{-1}(c - f(x))$.</u>

• $x = u_c = f_1^{-1}(c - m_g)$. $f(u_c) = c - m_g$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. $F(x,y) = c \Leftrightarrow f(x) + g(y) = c \Leftrightarrow g(y) = c - f(x) = m_g \Leftrightarrow y = \frac{a}{b}$.

$$F(x,y) = c \Leftrightarrow y = \frac{a}{b} = g_1^{-1}(c - f(x)) = g_2^{-1}(c - f(x)) \; !$$

<u>Si $x = u_c$: $\{y \in \mathbb{R}_+^*, F(x,y) = c\} = \{\frac{a}{b}\}$.</u>

• $x = v_c$. Même chose car $c - f(x) = c - f(v_c) = c - (c - m_g) = m_g$.

<u>Si $x = v_c$: $\{y \in \mathbb{R}_+^*, F(x,y) = c\} = \{\frac{a}{b}\}$.</u>

<u>Remarque</u>.. $\forall x \in [u_c, v_c]$, $\{y \in \mathbb{R}_+^*, F(x,y) = c\} = \{g_1^{-1}(c - f(x)), g_2^{-1}(c - f(x))\}$.

d) • Posons $\forall x \in [u_c, v_c]$, $h_1(x) = g_1^{-1}(c - f(x))$ et $h_2(x) = g_2^{-1}(c - f(x))$.

g_1^{-1} (resp. g_2^{-1}) prend ses valeurs dans $]0, \frac{a}{b}]$ (resp. $[\frac{a}{b}, +\infty[$).

Par conséquent $\forall x \in [u_c, v_c]$, $h_1(x) \leq \frac{a}{b} \leq h_2(x)$.

$\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid F(x,y) = c\}$

$\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \in K_c$ et $F(x,y) = c\}$ car $K_c = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists y \in \mathbb{R}_+^*, F(x,y) = c\}$

$\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \in [u_c, v_c]$ et $F(x,y) = c\}$ car $K_c = [u_c, v_c]$.

$\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \in [u_c, v_c]$ et $y \in \{g_1^{-1}(c - f(x)), g_2^{-1}(c - f(x))\}\}$ d'après c)

$\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \in [u_c, v_c]$ et $(y = h_1(x)$ ou $y = h_2(x))\}$

$\Gamma_c = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \in [u_c, v_c]$ et $y = h_1(x)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \in [u_c, v_c]$ et $y = h_2(x)\}$.

$\Gamma_c = \{(x, h_1(x)) \mid x \in [u_c, v_c]\} \cup \{(x, h_2(x)) \mid x \in [u_c, v_c]\}$.

Ainsi il existe deux fonctions h_1 et h_2 définies sur $[u_c, v_c]$ telles que

$\forall x \in [u_c, v_c]$, $h_1(x) \leq \frac{a}{b} \leq h_2(x)$ et $\Gamma_c = \{(x, h_1(x)), x \in [u_c, v_c]\} \cup \{(x, h_2(x)), x \in [u_c, v_c]\}$

$\forall x \in [u_c, v_c]$, $h_1(x) = g_1^{-1}(c - f(x))$ et $h_2(x) = g_2^{-1}(c - f(x))$.

• Nous noterons $\hat{\Gamma}_c$ la représentation graphique de Γ_c.
$\hat{\Gamma}_c$ est la réunion des représentations graphiques $\mathcal{C}_{h_1}$ et $\mathcal{C}_{h_2}$ des fonctions h_1 et h_2.

f est décroissante sur $[u_c, \frac{\alpha}{\beta}]$ et croissante sur $[\frac{\alpha}{\beta}, v_c]$.

$\tau : x \mapsto c - f(x)$ est donc croissante sur $[u_c, \frac{\alpha}{\beta}]$ et décroissante sur $[\frac{\alpha}{\beta}, v_c]$

Notons que $\tau([u_c, \frac{\alpha}{\beta}]) = [m_g, c - m_f]$ et $\tau([\frac{\alpha}{\beta}, v_c]) = [m_g, c - m_f]$.

Rappelons que g_1^{-1} est (resp. g_2^{-1}) est une bijection continue et décroissante (resp. croissante) de $[m_g, +\infty[$ sur $]0, \frac{a}{b}]$ (resp. $[\frac{a}{b}, +\infty[$).

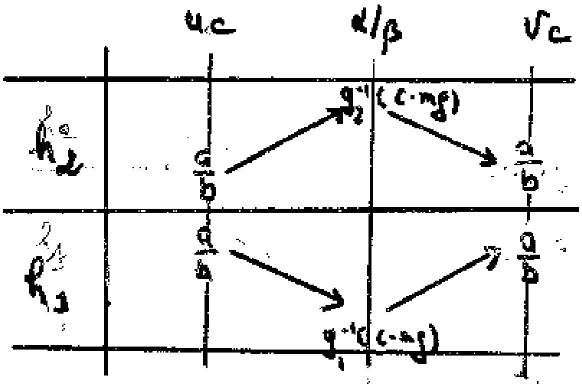
Or $h_1 = g_1^{-1} \circ \tau$ et $h_2 = g_2^{-1} \circ \tau$.

Ainsi h_1 est décroissante sur $[u_c, \frac{\alpha}{\beta}]$ et croissante sur $[\frac{\alpha}{\beta}, v_c]$;
h_2 est croissante sur $[u_c, \frac{\alpha}{\beta}]$ et décroissante sur $[\frac{\alpha}{\beta}, v_c]$.

Notons que $h_1(u_c) = g_1^{-1}(\tau(u_c)) = g_1^{-1}(mg) = \frac{a}{b}$; de même $h_1(v_c) = h_2(u_c) = h_2(v_c) = \frac{a}{b}$

$h_1(\frac{\alpha}{\beta}) = g_1^{-1}(\tau(\frac{\alpha}{\beta})) = g_1^{-1}(c - mg)$. $h_2(\frac{\alpha}{\beta}) = g_2^{-1}(\tau(\frac{\alpha}{\beta})) = g_2^{-1}(c - mg)$.

Notons que $h_1(\frac{\alpha}{\beta}) = g_1^{-1}(c-mg) \in]0, \frac{a}{b}]$ et $h_2(\frac{\alpha}{\beta}) = g_2^{-1}(c-mg) \in [\frac{a}{b}, +\infty[$.



Cela ne justifie-t-il pas la représentation de Γ_c proposée ?!
La partie "supérieure" de Γ_c est $\mathcal{C}_{h_2}$ et la partie "inférieure" est $\mathcal{C}_{h_1}$.

$\tau : x \mapsto c - f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[u_c, v_c]$.
g_1 est dérivable sur $]0, \frac{a}{b}]$. $\forall x \in]0, \frac{a}{b}[$, $g_1'(x) \neq 0$ et $g_1'(\frac{a}{b}) = 0$.
Ainsi g_1^{-1} est dérivable sur $]g_1(\frac{a}{b}), +\infty[=]mg, +\infty[$. g_1^{-1} n'est pas dérivable en mg mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse mg une (demi-) tangente "verticale".
Ce qui précède permet sans doute d'affirmer que h_1 est dérivable sur $]u_c, v_c[$, n'est pas dérivable en u_c et v_c mais sa représentation graphique $\mathcal{C}_{h_1}$ admet aux points d'abscisses u_c et v_c une (demi-) tangente verticale.
Notons que $\forall x \in]u_c, v_c[$, $h_1'(x) = -f'(x)\,(g_1^{-1})'(c - f(x))$; $h_1'(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$ car $f'(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$.
$\mathcal{C}_{h_1}$ admet au point d'abscisse $\frac{\alpha}{\beta}$ une tangente horizontale.

De même $\mathcal{C}_{h_2}$ admet aux points d'abscisses u_c et v_c des (demi-) tangentes verticales et une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\alpha}{\beta}$.

Comme $\widehat{\Gamma}_c = \mathcal{C}_{k_1} \cup \mathcal{C}_{k_2}$:

$\widehat{\Gamma}_c$ admet une tangente verticale en ses points d'abscisses u_c et v_c

$\widehat{\Gamma}_c$ admet une tangente horizontale en ses deux points d'abscisse $\frac{\alpha}{\beta}$.

PARTIE III. Etude du cas discret

Q1

```
procedure hec(S0,R0:real;var S,R:real);

var k:integer;t,d:real;

begin

d:=Delta/n;
S:=S0;R:=R0;
for k:=1 to n do
    begin
    T:=S+S*d*(a-b*R);
    R:=R+R*d*(-alpha+beta*S);
    S:=T;
    end;
end;
```

Q2 a) Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$.

$\beta(S_{\ell+1}-S_\ell)+b(R_{\ell+1}-R_\ell) = \beta\,\delta\, S_\ell(a-bR_\ell) + b\,\delta\, R_\ell(-\alpha+\beta S_\ell) = \delta(\beta a S_\ell - \alpha b R_\ell)$.

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ \beta(S_{\ell+1}-S_\ell)+b(R_{\ell+1}-R_\ell) = \delta(\beta a S_\ell - \alpha b R_\ell)$.

b) Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

$$\delta a\beta \sum_{\ell=0}^{p-1} S_\ell - \delta\alpha b \sum_{\ell=0}^{p-1} R_\ell = \sum_{\ell=0}^{p-1} \delta(\beta a S_\ell - \alpha b R_\ell) \overset{a)}{=} \sum_{\ell=0}^{p-1} \left(\beta(S_{\ell+1}-S_\ell) + b(R_{\ell+1}-R_\ell)\right)$$

$$S a\beta \sum_{\ell=0}^{p-1} S_\ell - S\alpha b \sum_{\ell=0}^{p-1} R_\ell = \beta \sum_{\ell=0}^{p-1}(S_{\ell+1}-S_\ell) + b \sum_{\ell=0}^{p-1}(R_{\ell+1}-R_\ell) = \beta(S_p-S_0)+b(R_p-R_0).$$

$$\forall p\in [\![1,n]\!],\quad S a\beta \sum_{\ell=0}^{p-1} S_\ell - S\alpha b \sum_{\ell=0}^{p-1} R_\ell = \beta(S_p-S_0)+b(R_p-R_0).$$

c] Soit $p\in [\![1,n]\!]$

$$\alpha \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{S_{\ell+1}-S_\ell}{S_\ell} + a \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell} = \alpha \sum_{\ell=0}^{p-1} S(a-bR_\ell) + a \sum_{\ell=0}^{p-1} S(-\alpha+\beta S_\ell) = \sum_{\ell=0}^{p-1}(\alpha S a - \alpha S b R_\ell - a S\alpha + a S\beta S_\ell).$$

$$\alpha \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{S_{\ell+1}-S_\ell}{S_\ell} + a \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell} = S a\beta \sum_{\ell=0}^{p-1} S_\ell - S\alpha b \sum_{\ell=0}^{p-1} R_\ell \overset{b]}{=} \beta(S_p-S_0)+b(R_p-R_0).$$

$$\forall p\in [\![1,n]\!],\quad \alpha \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{S_{\ell+1}-S_\ell}{S_\ell} + a \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell} = \beta(S_p-S_0)+b(R_p-R_0).$$

Q3) a] $\varphi: t\mapsto \ln t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors :

$$\forall (u,v)\in {\mathbb{R}_+^*}^2,\quad |\ln v - \ln u - (v-u)\ln' u| \leq \frac{|v-u|^2}{2} \max_{t\in[\overleftrightarrow{u,v}]} |\ln'' t|.$$

$$\forall (u,v)\in {\mathbb{R}_+^*}^2,\quad \left|\ln v - \ln u - \left(\frac{v-u}{u}\right)\right| \leq \frac{(v-u)^2}{2} \max_{t\in[\overleftrightarrow{u,v}]} \frac{1}{t^2}.$$

Ainsi $\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $\left|\ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1}-S_k}{S_k}\right| \leq \frac{(S_{k+1}-S_k)^2}{2} \max_{t\in[\overleftrightarrow{S_k,S_{k+1}}]} \frac{1}{t^2}$

Or $\forall \ell\in [\![0,n-1]\!]$, $\max_{t\in[\overleftrightarrow{S_\ell,S_{\ell+1}}]} \frac{1}{t^2} \leq \max_{t\in[m,M]} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{m^2}$.

Ainsi $\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $\left|\ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1}-S_k}{S_k}\right| \leq \frac{(S_{k+1}-S_k)^2}{2m^2}$.

$|a-bR_\ell|^2 = |a-bR_\ell|^2 \leq (|a|+|b||R_\ell|)^2 = (a+bR_\ell)^2$

b] $\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $\frac{(S_{k+1}-S_k)^2}{2m^2} = \frac{S^2(a-bR_k)^2 S_k^2}{2m^2} \leq \frac{S^2(a+bR_k)^2 M^2}{2m^2} \leq \frac{S^2(a+bL)^2 M^2}{2m^2}$

$0\leq a+bR_\ell \leq a+bL$

Comme $s = \frac{\Delta}{n}$ il vient : $\forall \ell \in [\![0,n-1]\!]$, $\frac{(s_{\ell+1}-s_\ell)^2}{2m^2} \leqslant \frac{\Delta^2 \Pi^2 (a+bL)^2}{2m^2 n^2}$.

Alors $\forall \ell \in [\![0,n-1]\!]$, $\left|\ln s_{\ell+1} - \ln s_\ell - \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| \leqslant \frac{\Delta^2 \Pi^2 (a+bL)^2}{2m^2 n^2}$.

c) Soit $p \in [\![1,n]\!]$.

$$\left|\ln s_p - \ln s_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| = \left|\sum_{\ell=0}^{p-1} (\ln s_{\ell+1} - \ln s_\ell) - \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| = \left|\sum_{\ell=0}^{p-1}\left(\ln s_{\ell+1} - \ln s_\ell - \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right)\right|$$

$$\left|\ln s_p - \ln s_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| \leqslant \sum_{\ell=0}^{p-1} \left|\ln s_{\ell+1} - \ln s_\ell - \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| \leqslant \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{\Delta^2\Pi^2(a+bL)^2}{2m^2n^2} = \frac{p\,\Delta^2\Pi^2(a+bL)^2}{2m^2n^2}$$

Or $p \leqslant n$ donc : $\frac{p\,\Delta^2\Pi^2(a+bL)^2}{2m^2n^2} \leqslant \frac{n\,\Delta^2\Pi^2(a+bL)^2}{2m^2n^2} = \frac{\Delta^2\Pi^2(a+bL)^2}{2m^2 n}$.

Ainsi $\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\left|\ln s_p - \ln s_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| \leqslant \frac{\Delta^2\Pi^2(a+bL)^2}{2m^2 n}$.

Q4) Un analogue à celui de Q3 fournit :

$\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\left|\ln R_p - \ln R_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell}\right| \leqslant \frac{\Delta^2 L^2 (\alpha+\beta\Pi)^2}{2\ell^2 n}$.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$.

$$|-\alpha\ln s_p + \beta s_p - a\ln R_p + bR_p - c| = |-\alpha\ln s_p + \beta s_p - a\ln R_p + bR_p + \alpha\ln s_0 - \beta s_0 + a\ln R_0 - bR_0|$$

$$|-\alpha\ln s_p + \beta s_p - a\ln R_p + bR_p - c| = |-\alpha\ln s_p - a\ln R_p + \beta(s_p - s_0) + b(R_p - R_0) + \alpha\ln s_0 + a\ln R_0|$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad = \left|-\alpha(\ln s_p - \ln s_0) - a(\ln R_p - \ln R_0) + \alpha\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell} + a\sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell}\right|$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad = \left|-\alpha\left(\ln s_p - \ln s_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right) - a\left(\ln R_p - \ln R_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell}\right)\right|$$

$$|-\alpha\ln s_p + \beta s_p - a\ln R_p + bR_p - c| \leqslant \alpha\left|\ln s_p - \ln s_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{s_{\ell+1}-s_\ell}{s_\ell}\right| + a\left|\ln R_p - \ln R_0 - \sum_{\ell=0}^{p-1}\frac{R_{\ell+1}-R_\ell}{R_\ell}\right|$$

$$|-\alpha \ln S_p+\beta S_p-a\ln R_p+bR_p-c| \leq \alpha\,\frac{\Delta^2 \Pi^2(a+bL)^2}{2m^2 n}+a\,\frac{\Delta^2L^2(\alpha+\beta\Pi)^2}{2\ell^2 n}$$

En posant $A=\frac{\Delta^2}{2}\left[\frac{\alpha\Pi^2(a+bL)^2}{m^2}+\frac{aL^2(\alpha+\beta\Pi)^2}{\ell^2}\right]$

on obtient : $\forall p\in [\![1,n]\!],\ |-\alpha\ln S_p+\beta S_p-a\ln R_p+bR_p-c|\leq \frac{A}{n}$.

PARTIE IV Etude du cas continu.

(Q1) a) Soit $t\in\mathbb{R}_+$. $F(S(t),R(t))=f(S(t))+g(R(t))=-\alpha\ln(S(t))+\beta S(t)-a\ln(R(t))+bR(t)$.

S et R sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\ln S$, $\ln R$, S et R sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Alors $z: t\mapsto F(S(t),R(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ z'(t)=-\alpha\frac{S'(t)}{S(t)}+\beta S'(t)-a\frac{R'(t)}{R(t)}+bR'(t)=\frac{S'(t)}{S(t)}(-\alpha+\beta S(t))+\frac{R'(t)}{R(t)}(-a+bR(t))$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ z'(t)=\frac{S'(t)}{S(t)}\times\frac{R'(t)}{R(t)}+\frac{R'(t)}{R(t)}\left(-\frac{S'(t)}{S(t)}\right)=0$. z est dérivable et de dérivée nulle

sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc z est constante sur $\mathbb{R}_+$. $\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ z(t)=c$.

$\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ F(S(t),R(t))=c$. Il existe un réel c tel que pour tout réel t positif "le point de coordonnée" $(S(t),R(t))$ appartienne à Γ_c.

b) Soit $t\in\mathbb{R}_+$. $(S(t),R(t))\in\Gamma_c$ donc $S(t)\in K_c=[u_c,v_c]$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ u_c\leq S(t)\leq v_c$. S est bornée. La symétrie du problème donne R bornée.

S et R sont bornées.

c) Supposons $c=m_F$. $\Gamma_c=\{(\frac{\alpha}{\beta},\frac{a}{b})\}$. $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ S(t)=\frac{\alpha}{\beta}$ et $R(t)=\frac{a}{b}$.

(Q2) a) • Supposons que : $\exists t_1 \in [0,+\infty[, \exists t_2 \in [0,+\infty[, S'(t_1) \leq 0$ et $S'(t_2) \geq 0$.

Notons que $S'(t_1)<0$ et $S'(t_2)>0$ car S' ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

S' est continue sur le segment I défini par t_1 et t_2 et $S'(t_1)S'(t_2)<0$, ainsi $\exists t_3 \in I$, $S'(t_3)=0$. Comme $I \subset [0,+\infty[$, $t_3 \in [0,+\infty[$ et $S'(t_3)=0$ ce qui est impossible.

La supposition initiale est fausse. Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[, S'(t)>0$ ou $\forall t \in [0,+\infty[, S'(t)<0$.

S est donc croissante sur $[0,+\infty[$ ou décroissante. Rappelons que S est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi ou S est croissante et majorée sur $[0,+\infty[$ ou S est décroissante et minorée sur $[0,+\infty[$. Dans les deux cas le théorème de la limite monotone montre que S admet une limite finie en $+\infty$.

• Comme S prend ses valeurs dans $[u_c, v_c]$ $\lim_{t\to+\infty} S(t) \in [u_c, v_c]$. $\lim_{t\to+\infty} S(t) \geq u_c > 0$.

<u>S admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite est strictement positive.</u>

b) Montrons par l'absurde que $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [\lambda,+\infty[, R'(t) \neq 0$.

Supposons donc que $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \exists t \in [\lambda,+\infty[, R'(t)=0$.

Ainsi $\exists \hat{t}_1 \in [0,+\infty[, R'(\hat{t}_1)=0$.

$\exists \hat{t}_2 \in [\hat{t}_1+74,+\infty[, R'(\hat{t}_2)=0$.

$0 \leq \hat{t}_1 < \hat{t}_2$ et $R'(\hat{t}_1)=R'(\hat{t}_2)=0$. Alors $-\alpha+\beta S(\hat{t}_1) = \frac{R'(\hat{t}_1)}{R(\hat{t}_1)} = 0$ donc $S(\hat{t}_1) = \frac{\alpha}{\beta}$.

De même $S(\hat{t}_2) = \frac{\alpha}{\beta}$.

S est de classe C^1 sur $[\hat{t}_1, \hat{t}_2]$ et $S(\hat{t}_1)=S(\hat{t}_2)$. Rolle montre que $\exists \hat{t}_3 \in]\hat{t}_1, \hat{t}_2[$, $S'(\hat{t}_3)=0$.

$\hat{t}_3 \in [0,+\infty[$ et $S'(\hat{t}_3)=0$. Ceci contredit le fait que S' ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

Ainsi <u>$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [\lambda,+\infty[, R'(t) \neq 0$.</u>

Comme pour S on peut alors prouver que <u>R admet une limite finie strictement positive en $+\infty$.</u>

c) • $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $S'(t) = (a - b R(t))S(t)$. Comme R et S possèdent une limite finie en $+\infty$: <u>S' admet une limite finie en $+\infty$.</u>

- S' est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall A\in[0,+\infty[$, $\int_0^A S'(t)dt = S(A)-S(0)$ et S admet une limite finie a $+\infty$

Ainsi $A\mapsto\int_0^A S'(t)dt$ admet une limite finie a $+\infty$. $\int_0^{+\infty} S'(t)dt$ converge.

Notons ℓ la limite de S' a $+\infty$. Supposons $\ell\neq 0$. Pour fixer les idées supposons $\ell>0$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists A\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in[A,+\infty[$, $|S'(t)-\ell|<\varepsilon$ (ou $\ell-\varepsilon<S'(t)<\ell+\varepsilon$)

$\exists A\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in[A,+\infty[$, $\ell-\frac{\ell}{2}<S'(t)<\ell+\frac{\ell}{2}$ $(\dots\varepsilon=\frac{\ell}{2})$.

Alors $\forall t\in[A,+\infty[$, $S'(t)>\frac{\ell}{2}$.

$\forall B\in[A,+\infty[$, $\int_A^B S'(t)dt \geqslant \int_A^B \frac{\ell}{2}dt = \frac{\ell}{2}(B-A)$. Or $\lim\limits_{B\mapsto+\infty}\frac{\ell}{2}(B-A)=+\infty$ $(\frac{\ell}{2}>0)$

Ainsi $\lim\int_A^B S'(t)dt=+\infty$ et $\int_A^{+\infty} S'(t)dt$ diverge ; $\int_0^{+\infty} S'(t)dt$ est alors divergente !

On obtient le même type de contradiction avec $\ell<0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} S'(t)=0$.

d) Nous avons vu que $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+$, $\forall t\in[\lambda,+\infty[$, $R(t)\neq 0$.

R a alors "les mêmes" qualités que S.

Une démonstration analogue à celle de c) donne : $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} R'(t)=0$.

e) Posons $\lambda=\lim\limits_{t\mapsto+\infty} S(t)$ et $\mu=\lim\limits_{t\mapsto+\infty} R(t)$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $S'(t)=aS(t)-bR(t)S(t)$ et $R'(t)=-\alpha R(t)+\beta S(t)R(t)$.

En faisant tendre t vers $+\infty$ on obtient : $0=a\lambda-b\mu\lambda$ et $0=-\alpha\mu+\beta\lambda\mu$.

Or $\lambda\neq 0$ et $\mu\neq 0$ donc $\mu=\frac{a}{b}$ et $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$.

Rappelons que : $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f(R(t))+g(R(t))=c$. En faisant tendre t vers $+\infty$ il vient :

$f(\frac{\alpha}{\beta})+g(\frac{a}{b})=c$. $m_f+m_g=c$. $m_F=c$!! On aboutit effectivement à une contradiction.

L'hypothèse $\exists \theta \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [\theta, +\infty[, S'(t) \neq 0$ est donc fausse.

Ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R}_+, \exists t \in [\theta, +\infty[, S'(t) = 0$.

Supposons que S' ne s'annule qu'en un nombre fini de points $t_1, t_2, \dots, t_r$.

Posons $\theta = \max\{t_1, t_2, \dots, t_r\} + 1$. $\theta \in \mathbb{R}_+$ et $\forall t \in [\theta, +\infty[, S'(t) \neq 0$!!

Ainsi S' s'annule en une infinité de points ... sur $\mathbb{R}_+$

(Q3) a) $a - bR(\tau_1) = \frac{S'(\tau_1)}{S(\tau_1)} = 0$; $R(\tau_1) = \frac{a}{b}$. De même $R(\tau_2) = \frac{a}{b}$.

R est de classe C^1 sur $[\tau_1, \tau_2]$ et $R(\tau_1) = R(\tau_2)$. Rolle montre qu'il existe θ dans $]\tau_1, \tau_2[$ tel que : $R'(\theta) = 0$.

$\exists \theta \in]\tau_1, \tau_2[, R'(\theta) = 0$.

b) $-\alpha + \beta S(\theta) = \frac{R'(\theta)}{R(\theta)} = 0$; $S(\theta) = \frac{\alpha}{\beta} = f_1^{-1}(m_f) = f_2^{-1}(m_f)$.

$a - bR(\tau_1) = \frac{S'(\tau_1)}{S(\tau_1)} = 0$; $R(\tau_1) = \frac{a}{b}$.

De plus $c = f(S(\tau_1)) + g(R(\tau_1)) = f(S(\tau_1)) + m_g$; $f(S(\tau_1)) = c - m_g$

Or $c - m_g > m_f$ car $c > m_F = m_f + m_g$. Alors $S(\tau_1) = f_1^{-1}(c - m_g)$ ou $f_2^{-1}(c - m_g)$.

Ainsi $|S(\theta) - S(\tau_1)| = |f_1^{-1}(m_f) - f_1^{-1}(c - m_g)|$ ou $|f_2^{-1}(m_f) - f_2^{-1}(c - m_g)|$

Posons $\rho = \min\left(\left|f_1^{-1}(m_f) - f_1^{-1}(c - m_g)\right|, \left|f_2^{-1}(m_f) - f_2^{-1}(c - m_g)\right|\right)$

$|S(\theta) - S(\tau_1)| \geq \rho$. De plus $m_f \neq c - m_g$ donc $|f_1^{-1}(m_f) - f_1^{-1}(c - m_g)| > 0$ et

$|f_2^{-1}(m_f) - f_2^{-1}(c - m_g)| > 0$ (f_1^{-1} et f_2^{-1} sont injectives). Alors $\rho > 0$.

Terminons en remarquant que ρ ne dépend pas de τ_1 et τ_2.

Ainsi $\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, |S(\theta) - S(\tau_1)| \geq \rho$.

c) $S' = (a - bR)S$. $|S'| \leq (a + b|R|)|S|$. Comme R et S sont bornées, $|R|$ et $|S|$ sont majorées et $|S'|$ l'est également.

Ainsi S' est bornée.

d) $\exists C' \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|S'(t)| \leq C'$.

S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc le théorème des accroissements finis indique que $\exists \omega \in]\tau_1, \theta[$, $S(\tau_1) - S(\theta) = S'(\omega)(\tau_1 - \theta)$.

Alors $0 < \mu \leq |S(\tau_1) - S(\theta)| = |S'(\omega)|\,|\tau_1 - \theta| \leq C|\tau_1 - \theta| \overset{\theta \in]\tau_1, \tau_2[}{\leq} C'|\tau_1 - \tau_2|$.

Ainsi $|\tau_1 - \tau_2| \geq \frac{\mu}{C'} > \frac{\mu}{2C'}$ $|\tau_1 - \tau_2| > \eta$ avec $\eta = \frac{\mu}{2C'}$. Notons que η est strictement positif et ne dépend pas de τ_1 et τ_2.

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $|\tau_2 - \tau_1| > \eta$ avec η indépendant de τ_1 et τ_2.

Q4 a) S' admet une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi on peut trouver trois zéros de S' qui constituent une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$

$\exists (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}_+^3$, $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ et $S'(\theta_1) = S'(\theta_2) = S'(\theta_3) = 0$.

b) Une fois encore raisonnons par l'absurde et supposons que S' s'annule une infinité de fois sur $[0, \theta_3]$.

Fixons r quelconque dans $[\![2, +\infty[\![$. L'hypothèse que nous avons faite permet de dire qu'il existe une suite strictement croissante $(\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_r)$ de zéros de S' appartenant à $[0, \theta_3]$.

D'après Q3, $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $|\tau'_{i+1} - \tau'_i| > \eta$

Ainsi $(r-1)\eta \leq |\tau'_2 - \tau'_1| + |\tau'_3 - \tau'_2| + \dots + |\tau'_r - \tau'_{r-1}| = (\tau'_2 - \tau'_1) + (\tau'_3 - \tau'_2) + \dots + (\tau'_r - \tau'_{r-1}) = \tau'_r - \tau'_1$

$(r-1)\eta \leq \tau'_r - \tau'_1 \leq \theta_3$ ($\tau'_r \in [0, \theta_3]$ et $\tau'_1 \in [0, \theta_3]$). Finalement $(r-1)\eta \leq \theta_3$.

Mieux $\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $(r-1)\eta \leq \theta_3$ ou $\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $r \leq \frac{\theta_3}{\eta} + 1$ $(\eta > 0 \dots)$

ceci est de toute évidence impossible. Alors S' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0, \theta_3]$.

c) Posons $H = \{t \in [0, \theta_3] \mid S'(t) = 0\}$. H est un ensemble fini et H contient au moins trois éléments distincts : θ_1, θ_2 et θ_3.

Posons $t_1 = \min H$, $t_2 = \min(H - \{t_1\})$ et $t_3 = \min(H - \{t_1, t_2\})$

On a : $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq \theta_3$. De plus $]t_1, t_2[\cap H =]t_2, t_3[\cap H = \emptyset$.

Alors $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq \theta_3$ et $\forall t \in [t_1, t_3]$, $S'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{t_1, t_2, t_3\}$.

(Q5) Si S' n'est pas de signe constant sur $]t_1, t_2[$, S' prend sur cet intervalle une valeur positive et une valeur négative ; S' étant continue sur $]t_1, t_2[$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que S' s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$ ce qui n'est pas.

Ainsi S' garde un signe constant sur $]t_1, t_2[$. De même S' garde un signe constant sur $]t_2, t_3[$.

Supposons que S' ait le même sur $]t_1, t_2[$ et sur $]t_2, t_3[$.

Pour fixer les idées, supposons que $\forall t \in]t_1, t_2[\cup]t_2, t_3[$, $S'(t) > 0$ (même type de démonstration pour $\cdots < 0 \cdots$).

S est continue sur $[t_1, t_2]$ (resp. $[t_2, t_3]$) et $\forall t \in]t_1, t_2[$, $S'(t) > 0$ (resp. $\forall t \in]t_2, t_3[$, $S'(t) > 0$).

Alors S est strictement croissante sur $[t_1, t_2]$ et sur $[t_2, t_3]$ donc sur $[t_1, t_3]$.

$\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $a - b R(t_i) = \dfrac{S'(t_i)}{S(t_i)} = 0$; $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $R(t_i) = \dfrac{a}{b}$.

$R(t_1) = R(t_2) = R(t_3)$ et R est de classe C^1 sur $[t_1, t_2]$ et $[t_2, t_3]$.

Rolle montre alors que $\exists u \in]t_1, t_2[$, $R'(u) = 0$ et $\exists v \in]t_2, t_3[$, $R'(v) = 0$.

$-\alpha + \beta S(u) = \dfrac{R'(u)}{R(u)} = 0$ et $-\alpha + \beta S(v) = \dfrac{R'(v)}{R(v)} = 0$.

Ainsi $t_1 < u < v < t_3$ et $S(u) = S(v) = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Ceci contredit la stricte croissance de S sur $[t_1, t_3]$.

Finalement S' est de signe constant sur $]t_1, t_2[$ et sur $]t_2, t_3[$ et les signes respectifs de S' sur ces deux intervalles sont opposés.

(Q6) a) Nous avons vu plus haut que $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $S'(t_i) = 0$ donne $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $R(t_i) = \dfrac{a}{b}$.

Alors $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $c = f(S(t_i)) + g(R(t_i)) = f(S(t_i)) + m_g$.

$\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $f(S(t_i)) = c - m_g$.

Rappelons que u_c et v_c sont les deux réels de $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient $\begin{cases} u_c < \frac{\alpha}{\beta} < v_c \\ \text{et} \\ f(u_c) = f(v_c) = c - mg \end{cases}$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $S(t_i) = u_c$ ou v_c.

D'après les hypothèses S est strictement croissante sur $[t_1,t_2]$ et strictement décroissante sur $[t_2,t_3]$. Ainsi $S(t_1) < S(t_2)$ et $S(t_3) < S(t_2)$.

Comme $u_c < v_c$ nécessairement $\underline{\underline{S(t_1) = S(t_3) = u_c \text{ et } S(t_2) = v_c}}$.

b) $\underline{\underline{R(t_1) = R(t_2) = R(t_3) = \frac{a}{b}}}$ (déjà vu en Q5 !)

Q7 **a)** S est continue et strictement croissante sur $[t_1,t_2]$. S définit une bijection de $[t_1,t_2]$ sur $[S(t_1), S(t_2)] = [u_c, v_c]$.

$\frac{\alpha}{\beta} \in]u_c, v_c[$ donc $\exists !\, \mathfrak{z} \in]u_c, v_c[$, $S(\mathfrak{z}) = \frac{\alpha}{\beta}$.

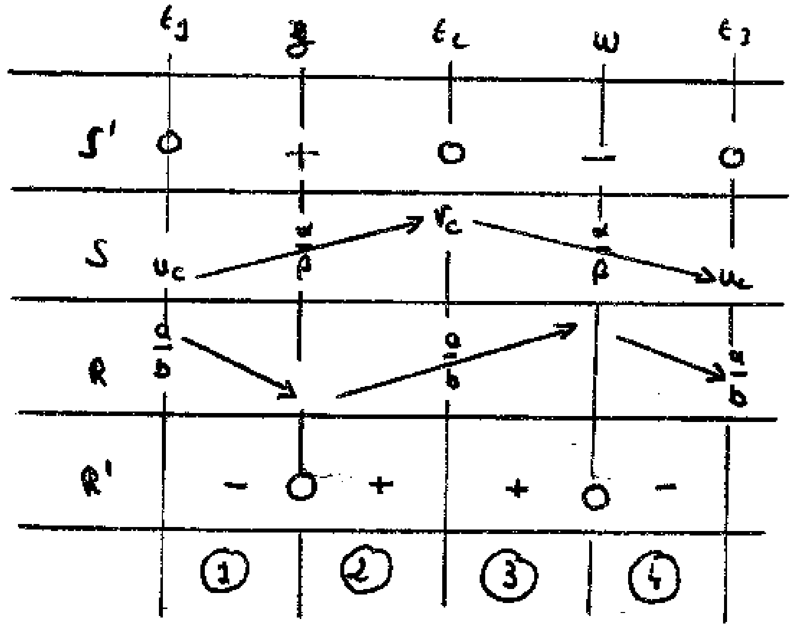
$\forall t \in [t_1, \mathfrak{z}]$, $S(t) \leqslant \frac{\alpha}{\beta}$ et $\forall t \in [\mathfrak{z}, t_2]$, $S(t) \geqslant \frac{\alpha}{\beta}$.

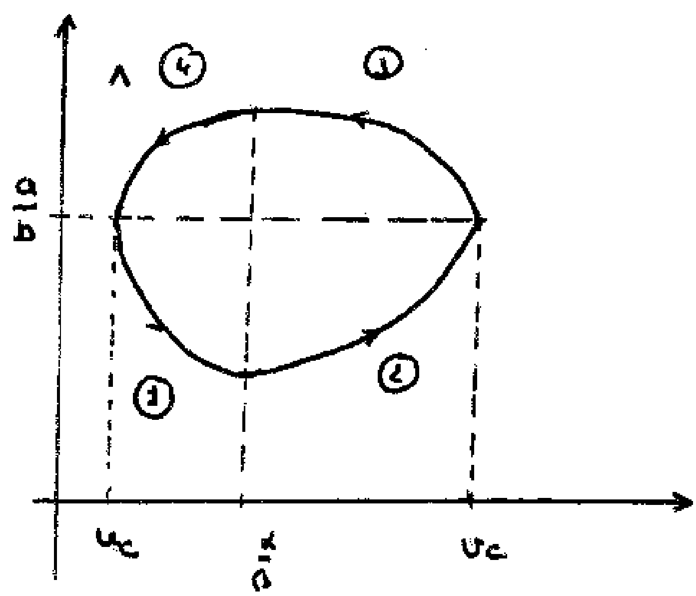
$\forall t \in [t_1, \mathfrak{z}]$, $\frac{R'(t)}{R(t)} = \beta(S(t) - \frac{\alpha}{\beta}) \leqslant 0$ et $\forall t \in [\mathfrak{z}, t_2]$, $\frac{R'(t)}{R(t)} = \beta(S(t) - \frac{\alpha}{\beta}) \geqslant 0$.

Comme R est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$: $\forall t \in [t_1, \mathfrak{z}]$, $R'(t) \leqslant 0$ et $\forall t \in [\mathfrak{z}, t_2]$, $R'(t) \geqslant 0$.

R est décroissante sur $[t_1, \mathfrak{z}]$ et croissante sur $[\mathfrak{z}, t_2]$.

On montre de la même manière que : $\exists !\, \omega \in]t_2, t_3[$, $S(\omega) = \frac{\alpha}{\beta}$ et que R est croissante sur $[t_2, \omega]$ et décroissante sur $[\omega, t_3]$.





⚠ On montre ainsi que $\Gamma_c = \{(S(t), R(t)) \,;\, t \in [t_1, t_3]\}$!!

(Q8) Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $S_1(t) = S(t+T)$ et $R_1(t) = R(t+T)$.

Montrons que $S_1 = S$ et que $R_1 = R$.

Notons que S_1 et R_1 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons que (S_1, R_1) vérifie (E).

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{S_1'(t)}{S_1(t)} = \frac{S'(t+T)}{S(t+T)} = a - b\,R(t+T) = a - b\,R_1(t)$. On montre de même que

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{R_1'(t)}{R_1(t)} = -\alpha + \beta\, S_1(t)$.

D'après le résultat admis pour montrer que $S_1 = S$ et $R_1 = R$ il ne reste plus qu'à prouver l'existence de t_0 dans $\mathbb{R}_+$ tel que $S_1(t_0) = S(t_0)$ et $R_1(t_0) = R(t_0)$.

Or $S_1(t_1) = S(t_1+T) = S(t_1 + t_3 - t_1) = S(t_3) = u_c = S(t_1)$.

$R_1(t_1) = R(t_1+T) = R(t_1 + t_3 - t_1) = R(t_3) = \frac{a}{b} = R(t_1)$.

Ainsi $S_1(t_1) = S(t_1)$ et $R_1(t_1) = R(t_1)$.

Alors $S_1 = S$ et $R_1 = R$. $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $S(t+T) = S(t)$ et $R(t+T) = R(t)$.

S et R sont périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

(Q9) Soit $u \in \mathbb{R}_+$.

a) $\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)}\,dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{S'(t)}{S(t)}\,dt = \left[\ln|S(t)|\right]_{t_1}^{t_3} = \ln|S(t_3)| - \ln|S(t_1)| \overset{S(t_3) = S(t_1)}{=} 0$. $\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)}\,dt = 0$.

b) $\frac{1}{T}\int_u^{u+T} R(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_u^{u+T} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\frac{S'(t)}{S(t)}\right)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{a}{b}\int_u^{u+T} dt - \frac{1}{b}\int_u^{u+T}\frac{S'(t)}{S(t)}\,dt\right] = \frac{1}{T}\,\frac{a}{b}\,T = \frac{a}{b}$.

La valeur moyenne de R sur le segment $[u, u+T]$ est $\frac{a}{b}$. De même la valeur moyenne de S sur le segment $[u, u+T]$ est $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Q10) (E') se déduit de (E) en remplaçant a par $a - \varepsilon$ et α par $\alpha + \varepsilon$.

R et S étaient périodiques de période $T = t_3 - t_1$ strictement positive.

Ainsi il existe un réel Θ strictement positif tel que les fonctions K et H sont périodiques de période Θ.

La valeur moyenne de K (resp. H) sur un segment de longueur égale à θ et $\frac{a+\varepsilon}{\beta}$ (resp. $\frac{a-\varepsilon}{b}$).

PARTIE V. Le contexte historique du modèle Vito Volterra

$\varepsilon \mapsto \frac{a+\varepsilon}{\varepsilon}$ (resp. $\varepsilon \mapsto \frac{a-\varepsilon}{b}$) est une fonction croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi lorsque le taux de pêche diminue la valeur moyenne de K (resp. H) sur un segment de longueur θ diminue (resp. augmente).

Une diminution du taux de pêche est défavorable aux proies.